



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Tese de doutorado

**USO DA PERCOLAÇÃO E  
DIFERENTES MODELOS DE  
COMPETIÇÃO NO ESTUDO EM  
SISTEMA RPS**

Willian Alves dos Santos

Orientador: Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Coorientador: Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Maringá, 19 de agosto de 2025



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Tese de doutorado

**USO DA PERCOLAÇÃO E  
DIFERENTES MODELOS DE  
COMPETIÇÃO NO ESTUDO EM  
SISTEMA RPS**

Tese apresentada à Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Willian Alves dos Santos

Orientador: Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Coorientador: Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Maringá, 19 de agosto de 2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

S237p

Santos, Willian Alves dos

Uso da percolação e diferentes modelos de competição no estudo em sistema RPS /  
Willian Alves dos Santos. -- Maringá, PR, 2025.  
74 f. : il. color., figs.

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira.

Coorientador: Prof. Dr. Miguel Jorge Barnabé Ferreira.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,  
Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Sistemas RPS. 2. Simulação computacional. 3. Dinâmica de populações. 4.  
Biodiversidade. I. Oliveira, Breno Ferraz de, orient. II. Ferreira, Miguel Jorge Barnabé,  
coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento  
de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

CDD 23.ed. 530.13

Rosana de Souza Costa de Oliveira - 9/1366

WILLIAN ALVES DOS SANTOS

USO DA PERCOLAÇÃO E DIFERENTES MODELOS DE COMPETIÇÃO NO  
ESTUDO EM SISTEMAS RPS

Tese apresentada à Universidade Estadual de  
Maringá, como requisito parcial para a  
obtenção do título de doutor.

Aprovado em: Maringá, 19 de maio de 2025.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

---

Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

---

Prof. Dr. Jilvan Lemos de Melo  
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB

---

Prof. Dr. Wellington de Lima Caetano  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB

---

Dr. Wagner Schlindwein  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

---

Prof. Dr. Guilherme Maia Santos  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1 Ferramentas matemáticas</b>	<b>5</b>
1.1 Percolação . . . . .	5
1.2 Transformada de Fourier . . . . .	8
1.2.1 Transformada de Fourier continua . . . . .	8
1.2.2 Transformada inversa de Fourier . . . . .	9
1.2.3 Transformada de Fourier discreta . . . . .	10
1.3 Função de correlação . . . . .	11
1.4 Função de autocorrelação . . . . .	12
1.5 Lotka-Volterra . . . . .	14
1.6 May-Leonard . . . . .	15
<b>2 Modelos</b>	<b>17</b>
2.1 Modelos de RPS . . . . .	17
2.1.1 RPS clássico . . . . .	17
2.1.2 RPS com espécie invasora . . . . .	20
2.1.3 RPS com supercompetidores . . . . .	21
2.1.4 RPS com super-reprodutores . . . . .	23
2.2 Um modelo para o cálculo da densidade de espirais . . . . .	25
2.3 Largura Característica de Percolação . . . . .	27
<b>3 Resultados e Discussão</b>	<b>29</b>
3.1 Espécie invasora em RPS . . . . .	29
3.1.1 Influência da variação da mobilidade nas mudanças de fase . . . . .	29
3.1.2 Influência da variação da mobilidade nos domínios . . . . .	35
3.1.3 Influência da variação da mobilidade na percolação do sistema . . . . .	37
3.2 Estimativa do tamanho das espirais formadas no modelo RPS . . . . .	40
3.2.1 Comparação qualitativa . . . . .	40
3.2.2 Comparação via comprimento característico . . . . .	41
3.2.3 Comparação via largura característica de percolação . . . . .	43
3.2.4 Comparação via densidade de espirais . . . . .	44
3.3 Supercompetidores em RPS . . . . .	47
3.4 Super-reprodutores em RPS . . . . .	55

<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Resumo

Ao longo dos últimos anos, simulações computacionais têm sido aplicadas para elucidar diversos mecanismos de interações biológicas. Dentre os modelos mais estudados está o modelo de predação cíclica denominado RPS. Neste sistema, três espécies interagem em uma rede quadrada em que cada sítio da rede pode armazenar no máximo um indivíduo. Estes se auto-reproduzem, competem e se movem pela rede. O caráter cíclico do modelo reflete que cada espécie é presa de uma espécie e predadora da outra. Controlando-se os parâmetros da simulação, pode-se obter cenários de estabilidade na biodiversidade, ou seja, obter coexistência entre as espécies. Recentemente na literatura, se introduziu o conceito de quarta espécie pestilenta, que exerce predação sobre uma das três espécies tradicionais, porém não é predada por nenhuma outra espécie. Quando esta quarta espécie falha em sua tentativa de predação, o indivíduo pestilento é eliminado, controlando-se assim sua população. Neste presente trabalho, expandimos essa linha de pesquisa, analisando as mudanças de fase na biodiversidade para diversos valores da mobilidade dos indivíduos na rede. Além disso, analisamos o papel da variação dos valores da mobilidade na estabilidade da biodiversidade em modelos que incluem espécies supercompetidoras, capazes de realizar até quatro eliminações simultâneas, e super-reprodutoras, que se reproduzem até 4 vezes mais que no modelo RPS clássico. E sabendo que no sistema RPS tradicional o padrão de distribuição dos indivíduos na rede formam estruturas espirais, analisamos a importância da mudança da mobilidade dos indivíduos no tamanho destas espirais por meio de duas novas técnicas denominadas, largura média de percolação ( $\mathcal{L}$ ) e raios médios das espirais ( $r_{esp}$ ).

**Palavras chave:** Dinâmica de populações; simulações estocásticas; transformada de Fourier discreta; supercompetidor; super-reprodutor; espécie pestilenta; espécie invasora; percolação.

# Abstract

Over the last few years, computer simulations have been applied to elucidate various mechanisms of biological interactions. Among the most studied models is the cyclical predation model called RPS. In this system, three species interact in a square network in which each site can hold a maximum of one individual. These individuals self-reproduce, compete and move around the network. The cyclical nature of the model reflects the fact that each species is prey for one species and predator for the other. By controlling the parameters of the simulation, scenarios of biodiversity stability can be achieved, i.e. coexistence between species. Recently, the literature has introduced the concept of a fourth pest species, which preys on one of the three traditional species, but is not preyed on by any other species. When this fourth species fails in its predation attempt, the pestilent individual is eliminated, thus controlling its population. In this paper, we expand on this line of research by analyzing phase shifts in biodiversity for different values of the mobility of individuals in the network. In addition, we analyze the role of varying mobility values in the stability of biodiversity in models that include super-competitor species, capable of carrying out up to four simultaneous eliminations, and super-reproducers, which reproduce up to 4 times more than in the classic RPS model. And knowing that in the traditional RPS system the distribution pattern of individuals in the network forms spiral structures, we analyzed the role of changing the mobility of individuals on the size of these spirals using two new techniques called average percolation width ( $\mathcal{L}$ ) and average spiral radius ( $r_{esp}$ ).

**Keywords:** Population dynamics; stochastic simulations; discrete Fourier transform; supercompetitor; superreproducer; pest species; invasive species; percolation.

*"A ciência não pode prever o que vai acontecer. Só pode prever a probabilidade de algo acontecer."*  
— César Lattes

# Introdução

As interações entre espécies têm sido um dos ramos mais férteis na pesquisa científica. Desde Darwin sabemos que descrever estas interações é possível, embora complexo [1]. Com inspirações diversas, em 1925, A. J. Lotka e em 1926, V. Volterra, propuseram, de maneira independente, equações diferenciais, que pela primeira vez descreviam a dinâmica de interações do tipo presa predador, estimando as concentrações dos indivíduos de cada espécie estudada. Lotka teve como inspiração a interação química entre moléculas reagentes que produziam padrões de concentrações oscilantes no tempo [2], Volterra, por sua vez, teve como objeto de estudo as populações de peixes no Mar Adriático, que por paralisação da atividade pesqueira na região, motivada pela Primeira Guerra Mundial, pôde proporcionar uma análise sem interferência humana nas populações de peixes e seus predadores [3]. Paralelamente, em 1925, R. M. May e W. J. Leonard publicaram seu trabalho, em que descreveram a dinâmica de interação e competição cíclica através das equações, que ficaram conhecidas como equações de May-Leonard, em que, diferentemente das equações de Lotka-Volterra, as espécies são presas e predadoras ao mesmo tempo. Esses dois modelos de equações demonstraram grande êxito em descrever o comportamento medido empiricamente em diversos sistemas na natureza, ampliando a compreensão dos mecanismos que regem a biodiversidade. Mas há exceções. Por exemplo, em 1962, J. C. Calhoun, com seu experimento conhecido como universo vinte e cinco, demonstrou que animais com a capacidade de interação comunitária complexa não obedecem às equações de Lotka-Volterra, evidenciando que em cenários não naturais o comportamento das espécies se tornava mais complexo [4].

Ao longo dos anos, com o advento da computação, da teoria do caos e do conceito de mapa logístico, foram desenvolvidos os números pseudoaleatórios (não são verdadeiramente aleatórios) [5–7], que deram vazão às primeiras simulações computacionais. Estas se desenvolveram ao ponto de se tornar uma das ferramentas mais importantes e indispensáveis nos mais diversos ramos das ciências. Dentre elas, as simulações desenvolvidas para se verificar a alta eficiência das equações de competição em sistemas com parâmetros controlados [8]. Estas simulações se mostraram importantes no entendimento da biodiversidade na natureza e demonstraram como é delicado seu equilíbrio, além de evidenciar a interdependência entre as espécies, e como consequência, a importância da conservação da natureza para garantir o futuro da própria espécie humana.

Dos trabalhos mais importantes que corroboraram com as equações de May-Leonard, destacaremos o realizado por B. Sinervo e C. M. Lively em 1996. O trabalho consiste da análise da eficiência de reprodução entre três tipos de lagartos de uma mesma espécie nos Estados Unidos da América, cujos machos apresentavam

três morfologias distintas, como exemplificado na Figura 1 [9]. Por simplificação, identificaremos estes três fenótipos apresentados pelos machos usando somente o tamanho, pequeno, médio e grande, e nível de agressividade como pequena, média e grande, que está diretamente relacionada com seu nível de agressividade. No eminente trabalho, Sinervo e Lively demonstraram que o macho do tipo maior e mais agressivo apresentava um comportamento de dominância extremamente territorialista. Este defendia uma vasta porção de terra, onde todas as fêmeas naquele território pertenciam a ele. O segundo tipo de macho era menor e menos agressivo que o primeiro. Ele demandava menos fêmeas e territórios, embora também apresentasse o comportamento de defesa dos seus domínios e fêmeas e justamente por ter menos fêmeas, ele as vigiava com eficácia. Por fim, o terceiro tipo era o menor dos três e não defendia território, nem mantinha um harém fixo. Este se embrenhava nos territórios alheios e fecundava as fêmeas de forma oculta aos machos maiores. Em um cenário em que os machos maiores eram maioria, os do terceiro tipo logravam grande êxito em fecundar as fêmeas, pois os territórios dos machos maiores eram muito grandes para serem vigiados com grande eficácia. Passado algum tempo, a população de machos pequenos saltava, pois os ovos eclodidos mostravam que sua técnica de reprodução foi a mais eficaz naquele cenário. A partir deste ponto, os machos de tamanho médio usavam de sua vantagem física em relação aos machos de menor tamanho, expulsando-os do habitat local e, como seu território era pequeno, eles se asseguravam de que estes não procriassem com as fêmeas dos seus domínios, acarretando um aumento da população dos machos do segundo tipo. Por fim, quando os machos de tamanho médio se apresentam em abundância, os machos maiores os expulsavam, acasalando com as fêmeas da região e promovendo uma descendência majoritariamente de indivíduos do tipo mais forte e agressivo, voltando ao cenário inicial e repetindo todo o processo. Esta relação cíclica se repete indefinidamente, de forma que podemos dizer que a relação é estacionária. As equações de May-Leonard descrevem com precisão esta interação entre os três tipos de machos, mostrando mais uma vez sua importância na compreensão dos mecanismos que movem a natureza da espécie.

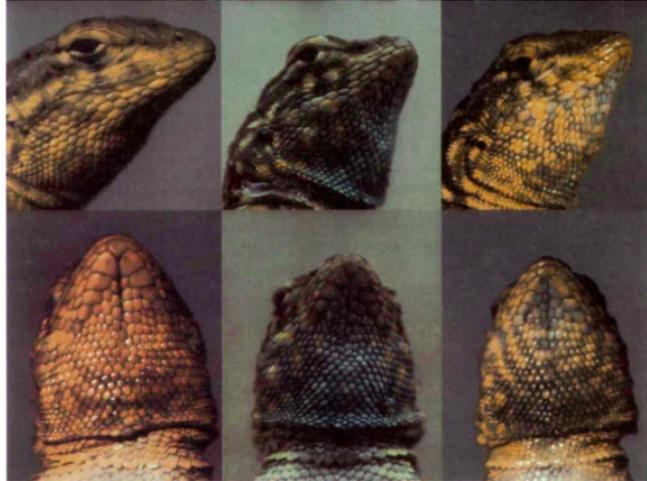


Figura 1: Imagem mostrando as diferenças nas cores dos papos dos lagartos machos que foram objeto de estudo no trabalho de B. Sinervo e C. M. Lively. Retirado de [9].

A relação entre os lagartos no trabalho de B. Sinervo e C. M. Lively é semelhante ao jogo de pedra, papel e tesoura (*rock-paper-scissor*, RPS) em que se estabelece uma relação de competição cíclica [10], ou seja, a pedra "destrói" a tesoura, que "corta" o papel, que "sufoca" a pedra. Este tipo de dinâmica tem sido estudada por meio de diversos modelos teóricos e estocásticos, de forma que estes estudos lançaram luz sobre alguns dos mecanismos fundamentais da biodiversidade, como, por exemplo, os expostos nos trabalhos das referências [11–28]. Estas pesquisas foram realizadas fazendo uso de modelos estocásticos, que consistem em simulações computacionais de cada interação entre os indivíduos e seus vizinhos. Por causa destas interações de competição cíclica, é comum, a depender dos parâmetros, obter de simulações em rede de duas dimensões a formação de espirais na distribuição de indivíduos ao longo do espaço e do tempo [21, 29, 30]. A formação destas espirais pode fornecer vantagens, por exemplo, proteção em relação às espécies invasoras [31]. Sabendo que o tamanho médio destas espirais muda em função da mobilidade (capacidade de movimentação) das espécies [15] e que o comprimento característico da função de autocorrelação é um método válido para se estimar o tamanho das espirais [16, 32], propomos neste trabalho duas novas maneiras de quantificar as mudanças no tamanho médio das espirais formadas no modelo RPS, uma utilizando a probabilidade de percolação e a outra baseada no cálculo da densidade média de espirais. Além disso, abordaremos dois conjuntos de modelos oriundos do modelo RPS clássico. O primeiro dá continuidade a pesquisa realizada por D. Bazeia e colaboradores [33], em que uma quarta espécie é introduzida no modelo RPS, porém esta não possui predadores, mas sofre baixa espontaneamente quando realizada uma tentativa falha de predação. Como esta espécie não possui predadores, ela também é chamada de espécie pestilenta. O trabalho de Bazeia mostra a dependência das mudanças de fases (diminuição no número de espécies) do sistema em relação à eficiência de predação da espécie invasora. Nosso modelo trata-se da continuidade à investigação iniciada por Bazeia, trazendo uma análise da dependência das mudanças de fase

em relação à variação da mobilidade das espécies. O segundo conjunto de modelos que abordaremos trata-se do modelo RPS com espécies capazes de eliminar mais de um vizinho simultaneamente, chamados de modelos com supercompetidores (SC), ou dotados da capacidade de reproduzir em todos os sítios vizinhos vazios mais próximos ao mesmo tempo, chamados de modelos com super-reprodutores (SR).

Este presente trabalho é dividido em três principais partes, no Capítulo 1 descreveremos as ferramentas matemáticas necessárias para compreensão da metodologia e discussão dos resultados; no segundo capítulo apresentamos os modelos utilizados, dentre eles o RPS clássico, RPS com espécie invasora, RPS com supercompetidores (SC) e RPS com super-reprodutores (SR), além de novos métodos desenvolvidos para o cálculo da contagem das espirais apresentadas em alguns dos modelos estudados; no capítulo 3 apresentamos os resultados das simulações dos modelos e a discussão em relação a três principais tópicos, a dependência das mudanças de fase dos parâmetros envolvendo a espécie invasora e como esta dependência está relacionada com a mobilidade das espécies, a estabilidade da biodiversidade nos modelos com um ou mais supercompetidores e com um ou mais super-reprodutores, por fim, discutimos duas novas maneiras de quantificar as mudanças nos tamanhos das espirais dos modelos em RPS quando variada a mobilidade.

# Capítulo 1

## Ferramentas matemáticas

### 1.1 Percolação

A percolação foi definida inicialmente pela geologia, no estudo da permeabilidade de solos. No dicionário Aurélio é definido como passagem de um líquido por uma substância porosa para remoção de suas partes solúveis. Um exemplo de percolação é o ato de coar café, a água passa pelo pó de café, em seguida pelo filtro, transpassando assim aquele meio com o fluxo direcionado pela gravidade. Neste caso, podemos dizer que a água e algumas substâncias, como a cafeína, percolaram. Na década de 1950, a percolação ganha uma fundamentação matemática com a motivação de ser utilizada no desenvolvimento de máscaras químicas que protegessem os soldados de armas químicas e trabalhadores em atividades de mineração [34]. Hoje, as aplicações sobre percolação abrangem várias áreas do conhecimento. Na indústria do petróleo, a análise da percolação dos poros das rochas onde o petróleo se encontra pode dizer se um poço é explorável comercialmente ou não [35]. Na agricultura ecológica, o manejo de espécies diferentes em um mesmo campo evita o espalhamento de pragas específicas na lavoura se estas pragas afetam apenas uma das espécies plantadas e esta espécie não percola no campo [36]. Ao planejar a proteção ambiental, a densidade de árvores doentes é uma análise necessária para se estimar a probabilidade de um incêndio percolar grandes regiões devido à vegetação seca, além de ser usado para determinar o tempo médio de extinção do fogo [37].

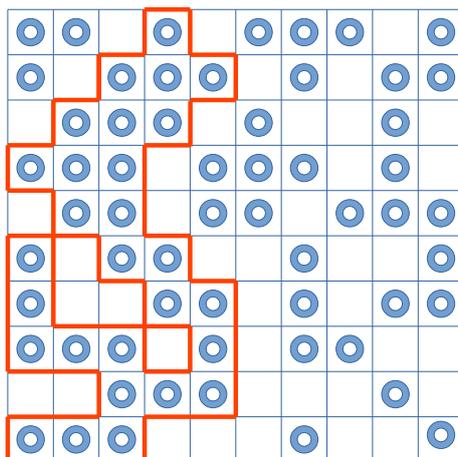


Figura 1.1: Rede com  $L = 10$  ilustrando uma percolação vertical dos sítios preenchidos por círculos. Em destaque, é mostrado o domínio contornado em vermelho que percola a rede verticalmente. Por simetria, a probabilidade de percolação vertical é a mesma que a horizontal. Por convenção, vamos adotar apenas a percolação vertical como objeto de nosso estudo.

Para o nosso interesse específico, tome como exemplo uma rede com largura e altura  $L$ , com sítios preenchidos por círculos ou vazios de forma estocástica, com probabilidade  $p$  do sítio estar preenchido com o círculo e  $1 - p$  para o sítio estar vazio. Dizemos que a rede percolou verticalmente se for possível conectar um sítio preenchido localizado na primeira linha com outro sítio preenchido na última linha, percorrendo, com passos unitários, somente sítios que também são preenchidos. Na figura 1.1 vemos uma rede com  $L = 10$ , em que podemos notar pelas linhas destacadas em vermelho um caminho de percolação dos sítios preenchidos por círculos. Note que o percurso pode ser realizado com passos na direção horizontal ou vertical, não estamos considerando válidos passos na diagonal. Neste exemplo, podemos dizer que o conjunto de sítios preenchidos por círculos azuis percolou. Para o caso de  $p = 0$  é evidente que a rede não pode percolar, pois neste caso todos os sítios ficariam vazios. Para o caso de  $p = 1$  a percolação ocorre com 100% de probabilidade, pois todos os sítios estão preenchidos. É intuitivo constatar que a probabilidade da rede percolar ( $\theta(p)$ ) aumenta conforme  $p$  aumenta. Em particular, em redes infinitas com distribuição aleatória, existe um limiar de Percolação ( $p_c$ ) tal que, para valores de  $p > p_c$ , a função  $\theta(p) > 0$  e se  $p < p_c$ ,  $\theta(p) = 0$  [38]. De forma geral, a curva da probabilidade de percolação em redes infinitas apresenta  $\theta(p)$  com propriedades matemáticas ilustradas pela figura 1.2. Note que entre  $p_c < p < 1$  a função é crescente, porém o seu comportamento exato não possui provas matemáticas, a curva neste intervalo é meramente ilustrativa.

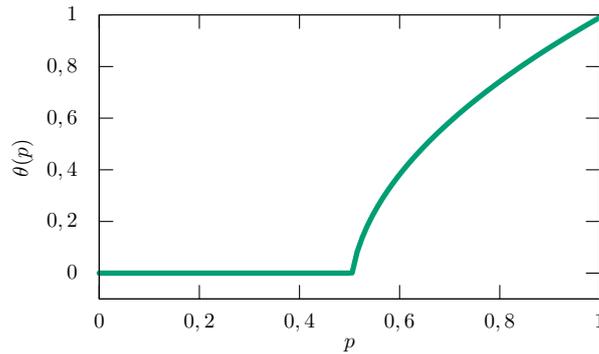


Figura 1.2: Gráfico da conjectura matemática do comportamento de  $\theta(p)$  para rede infinita em duas ou mais dimensões. A curva entre  $p = p_c$  e  $p = 1$  ilustra apenas a informação de que a curva  $\theta(p)$  nesta região é sempre crescente, mas seu formato exato não possui demonstrações matemáticas. Adaptado de [38].

Na Figura 1.3, temos a probabilidade de percolação para diversos valores de  $p$  em tamanhos diferentes de rede quadrada ( $L$ ). Podemos observar que as redes menores transitam de  $\theta(p) = 0,0$  para  $\theta(p) = 1,0$  suavemente. Em redes maiores, essa transição apresenta uma curva mais "abrupta". Conforme consideramos redes ainda maiores, a transição ocorre em um intervalo cada vez mais curto de  $p$ . Para redes tendendo ao infinito, a transição tende a uma função degrau. Na Figura 1.3, observa-se que existe um ponto de intersecção entre as curvas, independente do tamanho de  $L$ . Esse ponto ocorre na altura  $\theta(p) = 0,5$ . Considerando que redes maiores geram comportamento semelhante à função degrau e todas as curvas passam por esse ponto em comum, a função degrau ocorre exatamente neste ponto, definido como ponto crítico de percolação para as redes finitas ( $p_c$ ). Na Figura 1.3, podemos constatar que o  $p_c$  para uma distribuição aleatória é  $p = 0,5927$  [39,40]. Em resumo, o ponto crítico de percolação em uma rede infinita é o valor em que ocorre o degrau da função  $\theta$  e para redes finitas é a intersecção entre as curvas de tamanhos de redes diferentes que sempre será em  $\theta(p) = 0,5$ .

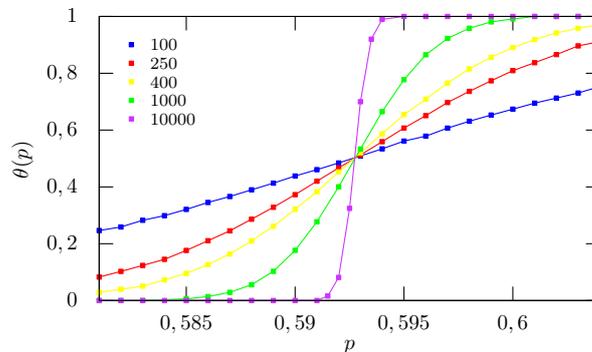


Figura 1.3: As curvas representam a probabilidade de percolação para os seguintes tamanhos de rede:  $L = 100, 250, 400, 1000$  e  $10000$ . Foram utilizadas 10000 simulações para cada ponto. Adaptado de [39].

Encontrar o  $p_c$  em que ocorre a percolação pode ser de grande interesse físico. Já que pode representar uma mudança de fase em um material. Por exemplo, para acontecer corrente elétrica é necessário haver um caminho no qual os elétrons possam percolar, se distribuímos nos sítios de uma rede isolantes e condutores a percolação ocorre se esta distribuição apresentar pelo menos um conjunto de sítios que formem um domínio que transpasse a rede.

## 1.2 Transformada de Fourier

### 1.2.1 Transformada de Fourier continua

Em 1812, Fourier constatou que qualquer função periódica poderia ser suficientemente bem descrita a partir de combinações de senos e cossenos [41]. Considerando senos e cossenos na notação de Euler, podemos expressar a série de Fourier como:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\pi n t/T}, \quad (1.1)$$

em que  $2T$  é o período da função original e

$$C_n = \frac{\pi}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\pi n t/T} dt. \quad (1.2)$$

Observe que  $c_n$  é o peso que cada combinação das funções periódicas exerce na soma, e assim formar a função original  $f(t)$ . No entanto, se fizermos o período tender ao infinito, poderemos encontrar uma série que possa representar uma função qualquer não periódica. Para fazer isso, é conveniente introduzir a seguinte notação:

$$\omega = \frac{\pi n}{T}. \quad (1.3)$$

Sendo  $n$  inteiro nas equações (1.1) e (1.2), a variação de uma unidade nelas implica em

$$\Delta\omega = \frac{\pi(n+1)}{T} - \frac{\pi n}{T} = \frac{\pi}{T}. \quad (1.4)$$

Note que se  $T$  tende ao infinito,  $\Delta\omega = 0$ .

Se reescrevermos a Equação (1.2), considerando a Equação (1.3), concluímos que

$$C_n = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.5)$$

Se introduzirmos a notação:

$$F_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.6)$$

Podemos reescrever  $C_n$  como:

$$C_n = F_T(\omega) \Delta\omega. \quad (1.7)$$

No limite em que  $T$  tende ao infinito, a Equação (1.6) tende à

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Em que  $f(\omega)$  é a transformada de Fourier da função  $f(t)$ ,  $t$  é a variável original da função. Ou seja, os termos  $f(\omega)$  são os pesos que cada combinação de frequências contribui para a composição da função original  $f(t)$ . É também comum o uso da transformada de Fourier por meio da notação

$$\mathcal{F} [f(t)] = f(\omega). \quad (1.9)$$

### 1.2.2 Transformada inversa de Fourier

Uma das principais aplicações da transformada de Fourier é na resolução de equações diferenciais, isto ocorre porque algumas funções são mais fáceis de resolver no espaço de Fourier do que no espaço original da função  $f(t)$ . Mas de pouco adianta solucionar equações diferenciais usando transformadas se não houver uma forma de voltar para a variável original. Esta volta é nomeada de transformada inversa de Fourier e pode ser obtida substituindo a Equação (1.7) na Equação (1.1), resultando em

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega)e^{i\omega t} \Delta\omega. \quad (1.10)$$

Outra notação frequentemente usada na literatura para a transformada de Fourier inversa é:

$$\mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = f(t). \quad (1.11)$$

Na Equação (1.3), se  $T \rightarrow \infty$ , então podemos considerar  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , e neste caso podemos substituir o somatório por uma integral, e a Equação (1.10) se torna

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(+i\omega t)} f(\omega) d\omega. \quad (1.12)$$

Observe que a variável  $t$  também pode ser uma variável espacial e não somente o tempo. No entanto, quando  $t$  for o tempo,  $\omega$  pode ser interpretado como a frequência angular, ou seja, está relacionado à frequência de oscilação da função original. Se  $t$  for uma variável espacial, então  $\omega$  representa o número de onda ( $k$ ), em que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , com  $\lambda$  sendo o comprimento de onda. Observe ainda que  $f(\omega)$  é uma função imaginária e que podemos separá-la em duas partes, a imaginária e a real. A parte real está relacionada à frequência com que  $f(t)$  oscila no tempo. A localidade do pico da parte real da função  $f(\omega)$  representa a frequência característica da função  $f(t)$ , ou seja, podemos usar a transformada de Fourier para obtermos as frequências características das oscilações de qualquer função  $f(t)$  oscilante no tempo. A presença de mais de um pico indica que a frequência característica da função  $f(t)$  possui mais de um valor. Em outras palavras, a função  $f(t)$  é uma composição de várias funções periódicas e a magnitude da altura do pico de  $f(\omega)$  revela as frequências das funções que mais contribuem para a construção de  $f(t)$ . A transformada de Fourier também pode ser usada para filtrar frequências indesejadas, auxiliando na construção de um sinal  $f(t)$  mais puro, como, por exemplo, no tratamento de áudio.

### 1.2.3 Transformada de Fourier discreta

Como em nossas simulações estocásticas a variável  $t$  é discreta, é necessário fazer uso da transformada de Fourier discreta. Neste caso, precisaremos voltar um pouco e redefinir  $\omega$  como  $\omega_n$ . Anteriormente  $2T$  foi definido como período, mas esta definição foi arbitrária, podemos redefinir tanto o período como o domínio onde estamos calculando a transformada sem prejuízo de generalidade, tome, por exemplo, o período como  $L$  e o domínio  $0 < t < T$ , o intervalo da integral na Equação (1.2) será  $[0, T]$ . Desta forma, podemos reescrevê-la como

$$C_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{2\pi}} \int_0^T f(t)e^{-i2\pi nt/T} dt, \quad (1.13)$$

e  $\omega_n$  pode ser expressa como:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (1.14)$$

Portanto, a variação de  $n$  em uma unidade gera:

$$\Delta\omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.15)$$

Substituindo este valor na Equação (1.13), obtemos

$$C_n = \frac{\Delta\omega_n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t} dt. \quad (1.16)$$

Observe que até aqui não fizemos nada além de redefinir o período e o domínio, mas estas mudanças tornaram o  $C_n$  mais fácil de se integrar numericamente. Para obter a transformada de Fourier discreta, vamos discretizar o período em vários intervalos espaçados igualmente por  $\Delta t = T/N$ , em que  $N$  é o número de passos para se obter o período completo. Esses passos em  $t$  podem ser expressos como:

$$t_j = j\Delta t, \quad (1.17)$$

em que  $i$  é  $0, 1, 2, \dots, N$ . Para a função que está dentro da integral na Equação (1.16), podemos assumir que

$$y_j = f(t_j)e^{-i\omega_n t_j}. \quad (1.18)$$

Assim, podemos calcular uma aproximação da Equação (1.16) como sendo a área descrita pelos retângulos de largura  $\Delta t$  e altura  $y_j$ ,

$$C_n \approx \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t f(t_j)e^{-i\omega_n t_j} = \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(jT/N)e^{-i2\pi nj/N}. \quad (1.19)$$

Usando a Equação (1.1), e substituindo  $C_n$ , chegamos à

$$F_n = \sum_{j=0}^{N-1} f(jT/N)e^{-i2\pi nj/N}. \quad (1.20)$$

Que é a transformada de Fourier discreta.

### 1.3 Função de correlação

A função de correlação é um método criado para comparar a dependência que dois conjuntos de dados possuem entre si, desde que esses dois conjuntos dependam de uma mesma variável. Isto é útil em várias situações, por exemplo, quando se procura um determinado sinal em meio a um ruído. Um exemplo prático de aplicação da correlação é a comparação entre fundos de investimentos, se um fundo de investimento investe em ativos semelhantes ao portfólio de outro fundo não faz sentido investir nos dois fundos ao mesmo tempo, pois o investidor não estaria diluindo o risco, por outro lado, fundos com correlação nula entre si proporcionam ao investidor uma diluição do risco do investimento, pois o portfólio de ativos atrelado aos seus investimentos não se repete. Na Tabela 1.1, podemos observar um exemplo de correlação entre fundos hipotéticos em comparação com o índice IBOVESPA. Caso o investidor opte por mais de um fundo, a combinação do fundo 1 com o 2 é a escolha que faz mais sentido, pois é a que possui menor correlação.

Tabela 1.1: Exemplo hipotético de correlação entre fundos e o índice IBOVESPA.

	Fundo 1	Fundo 2	Fundo 3	Ibovespa
Fundo 1	1			
Fundo 2	0,82	1		
Fundo 3	0,87	0,84	1	
Ibovespa	0,86	0,83	0,97	1

Ter um método para medir a correlação de dados é o primeiro passo para se determinar se suas grandezas possuem relação direta. Foi assim, por exemplo, que Hubble observou que galáxias com desvio para o vermelho estavam mais longe e inferiu que a causa do desvio do espectro era o afastamento das mesmas, devido ao efeito Doppler, e, portanto, as galáxias mais distantes se afastavam mais intensamente que as galáxias próximas de nós, o que gera a conclusão de que o universo está em expansão [42].

Para construir a função de correlação, podemos definir que, em caso de funções coincidentes, o valor deverá ser 1, em caso de funções totalmente descorrelacionadas, o valor deverá ser 0 e, em caso de funções iguais, mas com sinais opostos, a correlação será -1. Agora imagine que estamos comparando vetores normalizados, o que diferenciaria os dois vetores seria tão somente o ângulo entre eles, que pode ser obtido fazendo o produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta. \quad (1.21)$$

Este resultado pode ser estendido para dois conjuntos de  $n$  vetores, somando-se os produtos dos vetores dos conjuntos e em seguida normalizando o resultado, podemos definir a correlação como:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \vec{b}_i}{\sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \cdot |\vec{b}_i|}, \quad (1.22)$$

em que  $C$  é a correlação entre os dois conjuntos. Pois comparando dois conjuntos de vetores, se o ângulo entre cada par é nulo,  $C = 1$ , se  $\vec{a}_i = -\vec{b}_i$  ( $\theta = \pi$ ) a correlação é

$C = -1$  e quando o ângulo é intermediário a correlação assume valores intermediários,  $-1 < C < 1$ , como queríamos.

Quando passamos a lidar com conjuntos de escalares, o cálculo é equivalente, pois um escalar é o mesmo que um vetor de uma dimensão. Tome, por exemplo, dois conjuntos escalares dados pelas funções discretas  $\Phi_i$  e  $\phi_i$ , sua correlação pode ser calculada por [43]:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \phi_i}{\sum_{i=1}^n |\Phi_i| \cdot |\phi_i|}. \quad (1.23)$$

## 1.4 Função de autocorrelação

Quando comparamos uma função com ela mesma, é evidente que sua correlação é máxima. Porém, se deslocarmos uma função em uma das suas variáveis e compararmos com a função original, o valor da correlação pode mudar. A esse valor damos o nome de função de autocorrelação. Tomemos, por exemplo, a função  $\text{sen}(t)$ , a autocorrelação dos elementos é total quando a comparamos com si própria, no entanto, quando comparamos  $\text{sen}(t_i)$  com  $\text{sen}(t_i + \Delta t)$ , com  $\Delta t$  representando um deslocamento fixo, os valores das duas funções não são necessariamente os mesmos. Na Figura 1.4.a, podemos observar duas funções do tipo seno, quando a diferença do valor do tempo é  $0.1\pi$ . Na Figura 1.4.b, temos a função de correlação para cada  $\Delta t$  entre 0 e 10. Quando  $\Delta t = 0$ , as duas funções são totalmente idênticas e sua função de correlação é 1, a medida que  $\Delta t$  cresce, as funções se tornam menos correlacionadas, em  $\Delta t = \pi$ , a função de autocorrelação é  $C(\pi) = -1$ , o que indica que as funções têm o mesmo valor, porém com sinais opostos. Note que  $\Delta t$  é uma variável que representa o deslocamento no tempo, no entanto, é também possível fazer autocorrelação de funções espaciais em função do deslocamento espacial  $\Delta x$  em uma ou mais dimensões.

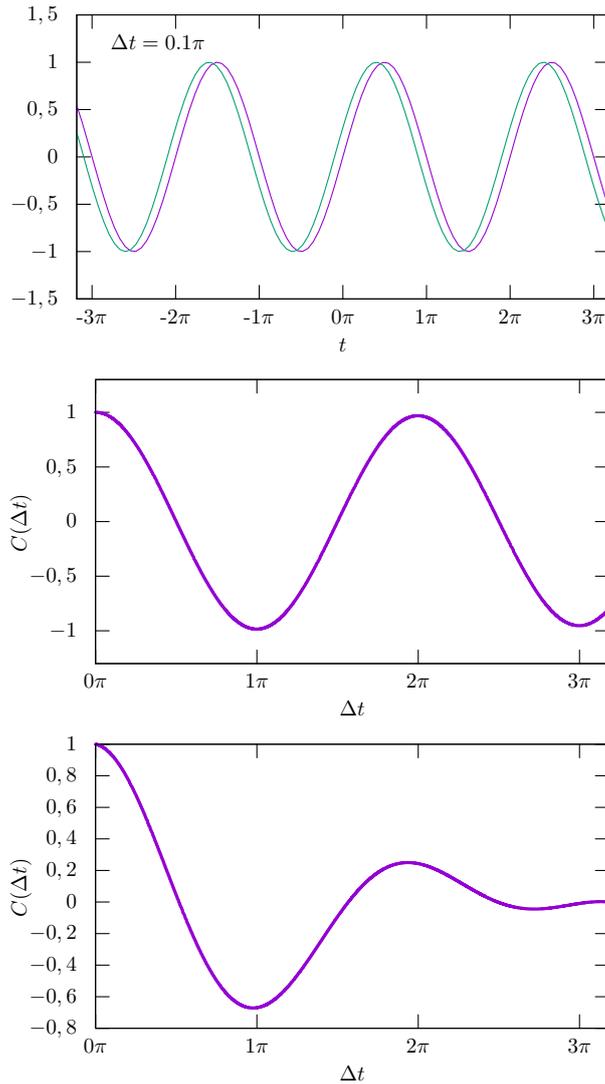


Figura 1.4: a) Duas funções senoidais deslocadas com  $\Delta t = 0.1\pi$  entre elas. Na figura b) a imagem ilustra o valor da função de autocorrelação entre elas em função da defasagem  $\Delta t$ . Em  $0\pi$  a função é  $C(0) = 1$  e em  $\Delta t = \pi$ ,  $C(\pi) = -1$ , ou seja, as duas funções senos em  $\Delta t = \pi$  apenas são diferentes nos sinais opostos. Na figura c) é calculada a função de autocorrelação entre duas funções senoidais no domínio  $[-10,10]$  e nulas no restante. Conforme  $\Delta t$  cresce, a parte nula gera o arrefecimento.

No presente trabalho, a função de autocorrelação será útil para analisarmos como cada indivíduo na rede é semelhante à sua vizinhança, isto é, qual a probabilidade de o indivíduo ser igual aos seus vizinhos em relação à distância entre eles. Desta forma, a função de autocorrelação deve estar vinculada ao tamanho dos domínios que as espécies descrevem na rede, uma vez que para valores próximos de 1 a vizinhança do indivíduo comparável é muito semelhante a ele [16]. A medida que as comparações ocorrem com indivíduos mais distantes, é natural que a relação fique mais aleatória e a função de autocorrelação caia para próximo de 0. Quando os domínios formados na rede são pequenos, essa queda ocorre mais rápido se comparado com domínios

grandes [44, 45].

Para construirmos a função de correlação espacial para a rede quadrada, considere a função espacial discreta em duas dimensões  $\phi_i$ ,  $i$  representa o endereço na rede. Esta função representa as espécies na rede. Cada indivíduo é identificado pelos valores 1, 2 ou 3 respectivamente, de acordo com sua espécie. Sítios vazios são representados pelo valor 0. Considere que  $N$  é o número total de endereços na rede. A distância entre dois endereços na rede é representada como  $d(i, j)$ , que por definição é a menor distância conectando os dois sítios. Seja  $N_r(i)$  o conjunto de sítios cuja distância de  $i$  é  $r\Delta r$ , ou seja,

$$N_r(i) = \{j \in N : d(i, j) = r\Delta r\}, \quad (1.24)$$

sendo  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $\Delta r$  espaçamentos entre sítios na rede, em que  $\Delta r = 1$ .

O coeficiente de autocorrelação entre sítios separados pela distância  $r$  é definido por

$$f_r = \frac{1/2}{r+1} \sum_{i \in \mathcal{L}} \phi_i \left( \sum_{j \in N_r(i)} \phi_j \right), \quad (1.25)$$

em que o fator 1/2 é devido ao fato de que cada par de locais é contado duas vezes para  $r \neq 0$ . Para  $r = 0$ , por outro lado, o coeficiente de autocorrelação é simplesmente

$$f_0 = \sum_{i \in \mathcal{L}} \phi_i^2. \quad (1.26)$$

Finalmente, a função de autocorrelação é dada pela razão

$$C(r) = \frac{f_r}{f_0}. \quad (1.27)$$

Note que  $C(0) = 1$  e que o denominador é uma constante de normalização. O comportamento da função de autocorrelação é rígido principalmente pelo numerador.

## 1.5 Lotka-Volterra

Em 1925, Alfred J. Lotka (1880-1949) e em 1926, Vito Volterra (1860-1940) propuseram, de maneira independente, equações que pela primeira vez descreviam a dinâmica de interações do tipo presa predador. Lotka teve como inspiração a interação química entre moléculas reagentes que produziam padrões de concentrações que oscilavam periodicamente [2]. Volterra, por sua vez, teve como motivação a análise das populações de peixes no Mar Adriático, que por paralisação da atividade pesqueira na região, motivada pela Primeira Guerra Mundial, pôde proporcionar uma análise sem interferência humana nas populações de peixes presas e predadores [3]. O modelo proposto trata-se de uma simplificação dos sistemas tipo presa-predador normalmente observados na natureza, reduzindo a dinâmica a apenas duas espécies, uma sendo presa e outra o predador. Denotando a concentração da espécie predadora por  $y(t)$  e a presa por  $x(t)$ , o modelo Lotka-Volterra pode ser expresso matematicamente pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) \quad (1.28)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x), \quad (1.29)$$

em que as constantes  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  representam os termos que regulam as interações entre as espécies.

Se considerarmos um sistema com apenas presas, a Equação (1.28) se reduz a

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1.30)$$

que tem por solução uma função exponencial,

$$x(t) = x(0)e^{at}, \quad (1.31)$$

ou seja,  $a$  está relacionado a reprodução das presas. Quanto mais presas, maior o número de indivíduos nascendo no cenário em que não há predadores. Aqui é importante destacar que não estão sendo consideradas as limitações de espaço e alimentação para as presas, o que explica o comportamento exponencial. É intuitivo dizer que a variação da população das presas,  $x(t)$ , também deve depender inversamente do número de predadores e das interações com eles, por isso  $\alpha$  aparece na Equação (1.28), ela está relacionada a taxa de predação do predador sobre a presa. Já a concentração de predadores,  $y(t)$ , deve depender do número de predação praticado, ou seja, o aumento da população de predadores depende diretamente da constante de interação  $\beta$ . Na ausência de presas, o fornecimento de alimento é inexistente e portanto,  $y(t)$  deve tender a zero. Neste caso

$$\frac{dy}{dt} = -by, \quad (1.32)$$

cuja solução é um decaimento exponencial,

$$y(t) = \frac{y(0)}{e^{bt}}, \quad (1.33)$$

No entanto, se o número de presas não é nulo, a taxa de crescimento de  $y(t)$  deve aumentar, o que explica o termo positivo  $\beta$  na Equação (1.29).

Na simulação estocástica em rede o modelo de Lotka-Volterra costuma ser representado da seguinte forma: primeiramente seleciona-se um indivíduo aleatório na rede, caso este seja predador se sorteia um dos quatro vizinhos e realiza-se, se este for sua presa, uma predação exitosa, em que o indivíduo do sítio onde havia a presa é preenchido com um novo indivíduo predador. Não havendo neste modelo a produção de vazios na rede [44]. Este modelo será relevante para o presente trabalho quando introduzirmos o modelo RPS com espécie invasora que utilizará em partes a predação de Lotka-Volterra.

## 1.6 May-Leonard

Em 1925, Robert M. May e Warren J. Leonard publicaram seu trabalho em que abordaram a dinâmica de interação e competição cíclica de três espécies [46]. Suponha três espécies denotadas por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , a proposta de May-Leonard é descrever matematicamente a interação entre as espécies pelas seguintes equações:

$$\frac{dA}{dt} = A(1 - A - \alpha B - \beta C), \quad (1.34)$$

$$\frac{dB}{dt} = B(1 - \beta A - B - \alpha C) \quad (1.35)$$

e

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - \alpha A - \beta B - C). \quad (1.36)$$

Em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que representam a taxa de reprodução e competição respectivamente. Note que, diferente do modelo de Lotka-Volterra, não existe espécie presa ou predadora, todas competem entre si, podendo eliminar indivíduos concorrentes ou mesmo serem eliminadas. Ou seja, dadas taxas de reprodução e competição iguais, estas espécies possuem simetria no modelo. Note que nas equações de May-Leonard a eliminação de indivíduos não necessariamente representa predação entre eles, por exemplo, no trabalho de B Sinervo e C. M. Lively de 1996 [9] a competição se dava entre três tipos de machos em uma mesma espécie de lagarto, cada um com seu comportamento gerava uma predominância ocasional e temporária na quantidade de cada indivíduo. Um indivíduo era maior, mais agressivo e territorialista e expulsava os outros indivíduos do território, promovendo a prole do seu tipo. Neste cenário, o indivíduo menor, e que não lutava por território, invadia sorrateiramente o território do macho mais forte e copulava com as fêmeas, deixando muitos descendentes ao ponto de prejudicar grandemente a população de machos grandes. Os machos médios, que não conseguiam vencer o tipo maior e mais forte agora tinha o cenário ideal de crescimento, pois o macho do tipo pequeno era facilmente expulso por ele deixando o território para apenas para o macho do médio, que não demanda um território grande demais e cuidava de suas fêmeas sem deixar os machos do tipo pequeno copularem com ela. Porém, os machos do tipo grande agora podiam lutar às claras com seu adversário médio por território e assim voltar a se reproduzir como no início, fechando o ciclo completo que se repete periodicamente. Ou seja, as equações de May-Leonard não necessariamente descrevem predações, por isso falaremos de competição doravante.

Em 2022, Avelino descreveu uma comparação direta entre dois modelos de simulações estocásticas, um adotando o modelo de Lotka-Volterra e o outro o modelo de May-Leonard [44]. Estas simulações estocásticas de modelos representam as interações descritas pelas equações de May-Leonard e estão no cerne deste presente trabalho. Estes modelos são chamados de RPS (*rock-paper-scissor*), que abordaremos na versão clássica, descrita na seção seguinte, e modificada, seja pela introdução de uma quarta espécie invasora ou pela introdução de mecanismos de competição e reprodução mais agressivos, descritos ainda neste Capítulo.

# Capítulo 2

## Modelos

### 2.1 Modelos de RPS

#### 2.1.1 RPS clássico

O modelo RPS clássico consiste em um sistema de competição cíclico em que três espécies disputam entre si a ocupação de um espaço limitado. Esta relação entre as espécies é semelhante ao jogo de pedra, papel e tesoura, que se fundamenta em uma relação de competição cíclica. Para simular a dinâmica entre as espécies, usaremos uma mecânica de competição estocástica. Inicialmente, os três tipos de indivíduos são distribuídos de forma aleatória em uma rede quadrada. A largura e altura dessa rede serão  $L$ , portanto o número de sítios na rede será  $L^2$ . Podemos denotar as três espécies como  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A interação entre elas pode ser explicitada da seguinte forma:

$$AB \xrightarrow{\gamma} A\otimes, BC \xrightarrow{\gamma} B\otimes, CA \xrightarrow{\gamma} C\otimes, \quad (2.1)$$

$$A\otimes \xrightarrow{r} AA, B\otimes \xrightarrow{r} BB, C\otimes \xrightarrow{r} CC, \quad (2.2)$$

$$A\odot \xrightarrow{m} \odot A, B\odot \xrightarrow{m} \odot B, C\odot \xrightarrow{m} \odot C. \quad (2.3)$$

Nestas expressões,  $A$ ,  $B$  e  $C$  representam as espécies,  $\otimes$  representa um sítio vazio e  $\odot$  um sítio preenchido com qualquer uma das espécies ou o vazio. Nas interações aos pares, o indivíduo da esquerda nas equações é considerado o indivíduo ativo na interação. Por exemplo: Na interação de  $A$  com  $B$ , há uma probabilidade  $\gamma$  do indivíduo ativo  $A$  eliminar o indivíduo passivo  $B$ , deixando vazio o sítio anteriormente ocupado por ele. De forma análoga, as interações de competição de  $B$  com  $C$  e  $C$  com  $A$  também ocorrem com probabilidade  $\gamma$ , como ilustrado na Equação (2.1). Na Equação (2.2) é mostrado o mecanismo de reprodução das espécies em que o indivíduo ativo interage com um sítio vizinho vazio. Neste caso, há uma probabilidade  $r$  em que o ativo produz uma cópia de si no sítio vazio. Por exemplo: Quando o indivíduo ativo  $A$  interage com o sítio vazio ( $\otimes$ ), há uma probabilidade de reprodução ( $r$ ) em que  $A$  é duplicado, ocupando o sítio anteriormente vazio. O mesmo vale quando a espécie  $B$  ou  $C$  é ativa. Na Equação (2.3) está ilustrado o mecanismo de mobilidade das

espécies, isto é, quando um indivíduo de qualquer espécie interage com outro sítio, não importa seu conteúdo, ele irá permutar de posição com o conteúdo deste sítio vizinho com uma probabilidade  $m$ . Por exemplo: Na interação entre o indivíduo ativo  $A$  com o vizinho passivo  $\ominus$ , há uma probabilidade de mobilidade ( $m$ ) em que  $A$  permuta de lugar com o vizinho selecionado. O mesmo ocorre para as demais espécies quando sorteada a mobilidade. As interações de competição entre estas espécies são ilustradas na figura 2.1. O caráter cíclico do modelo fica evidenciado na imagem pelas setas que indicam o sentido de competição das espécies.

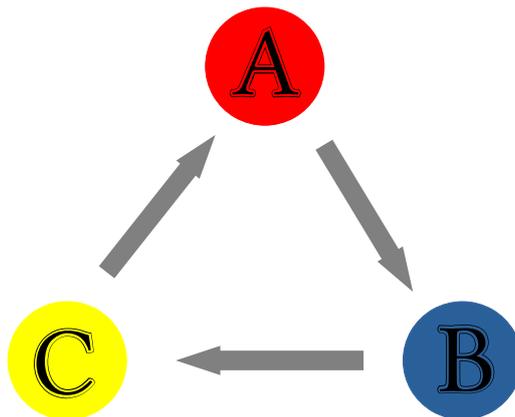


Figura 2.1: Ilustração do modelo de competição para o RPS clássico. As setas indicam o sentido de eliminação.

Para realizar uma interação, é primeiramente selecionado aleatoriamente um indivíduo na rede, este é chamado de indivíduo ativo, em seguida é sorteado um dos seus primeiros vizinhos, chamado de indivíduo passivo. A Figura 2.2 ilustra a vizinhança de von Neumann para os primeiros e segundos vizinhos do sítio ativo. Em todo o presente trabalho, serão considerados apenas os primeiros vizinhos da vizinhança de von Neumann nas interações entre os indivíduos da rede, ou seja, apenas haverá interações entre os sítios que possuem fronteira direta entre si. Em seguida, sorteia-se a ação tomada pelo indivíduo ativo sobre o indivíduo passivo, que pode ser a competição ( $\gamma$ ), reprodução ( $r$ ) ou mobilidade ( $m$ ). As probabilidades das ações sempre obedecem à normalização  $\gamma + r + m = 1$ . Para o caso em que a ação sorteada não pode ser executada, em razão do vizinho selecionado, a ação é encerrada e não contará na passagem do tempo, em seguida será iniciado um novo sorteio de um sítio ativo e uma nova ação a ser tomada, caso a ação sorteada seja possível ela é executada e esta, sim, contará para a passagem do tempo. Quando o número de ações bem sucedidas for igual ao número de sítios na rede, dizemos que se passou uma geração, ou um passo de Monte-Carlo. Observe que um passo de Monte-Carlo também pode ser interpretado como o número de ações em que cada sítio na rede terá realizado na média uma ação. No decorrer do presente trabalho, as unidades de tempo  $t$  representam o número de passos de Monte-Carlo. Ao longo dessas gerações, regulando os parâmetros de competição, é possível encontrar  $\gamma$ ,  $r$  e  $m$  tais que o

sistema encontra-se no estado quase estacionário, isto é, quando as concentrações dos três tipos de indivíduos parecem estáveis ao longo do tempo. Quando isso ocorre, observa-se a aglutinação de indivíduos das mesmas espécies na rede, que chamaremos de domínios. A morfologia destes depende de diversos parâmetros, porém observa-se que majoritariamente esses domínios apresentam formato de espirais [47]. Essas espirais são formadas de tal maneira que, se observarmos um domínio de uma espécie, podemos notar que, em geral, a sua espécie alvo na competição estará localizada no domínio vizinho na parte mais interior da espiral. Este modelo pode ser considerado uma adaptação estocástica do modelo de predação de May-Leonard [46].

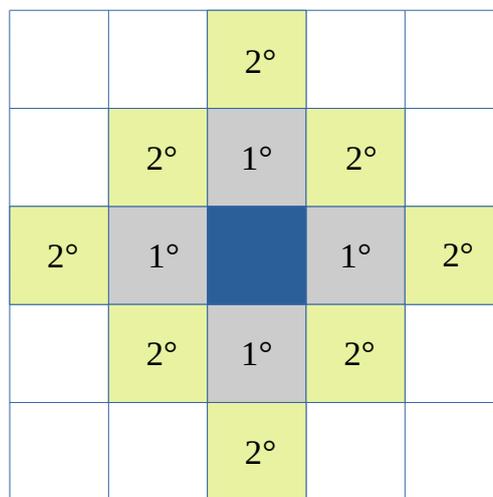


Figura 2.2: Ilustração da vizinhança de von Neumann. O sítio azul representa o indivíduo ativo na ação selecionada, a região acinzentada representa os primeiros vizinhos do sítio ativo e os sítios verdes representam os segundos vizinhos.

Neste trabalho assumimos a condição periódica de contorno para todos os modelos citados doravante, em que nas fronteiras da rede, o vizinho localizado fora da rede é, na verdade, o vizinho da fronteira oposta na rede. Na Figura 2.3 pode ser visto um exemplo nas bordas verticais, mas o mesmo vale para as bordas horizontais. Desta forma, os efeitos de borda são minimizados ao máximo.

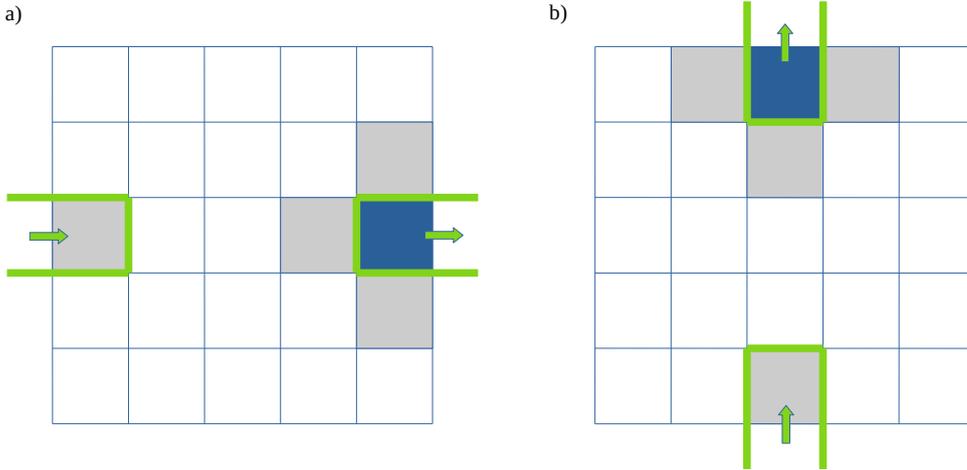


Figura 2.3: Ilustração da condição periódica de contorno em uma rede com  $L = 5$ . No exemplo, o sítio ativo, em azul, seleciona um dos seus primeiros vizinhos, em cinza, para realizar a ação. O vizinho é selecionado e indicado pelo contorno verde. Como esta é uma interação de borda, aplica-se a condição periódica de contorno, o que faz com que o vizinho selecionado seja o sítio da borda oposta. a) Exemplo de condição periódica de contorno nas bordas verticais e b) nas bordas horizontais.

### 2.1.2 RPS com espécie invasora

O sistema RPS com espécie invasora consiste em uma rede quadrada de largura  $L$  em que são distribuídas as quatro espécies de forma aleatória. Três destas espécies obedecem ao sistema de competição cíclica, descrito na seção anterior, que simula uma interação do tipo May-Leonard. A quarta espécie, por sua vez, obedece a uma dinâmica particular [48], semelhante ao modelo do tipo Lotka-Volterra. Primeiramente, quando esta nova espécie é sorteada como indivíduo ativo, indubitavelmente ocorre uma troca de posição com o indivíduo sorteado como passivo, ou seja,

$$D \odot \xrightarrow{1} \odot D. \quad (2.4)$$

Isto é, quando a espécie  $D$  é sorteada como indivíduo ativo, ela troca de posição com um dos quatro vizinhos passivos e, após esse movimento, sorteia-se novamente um vizinho e uma ação. Se esse novo indivíduo passivo for sua presa, ele terá a chance de predá-lo, caso contrário, o indivíduo da espécie  $D$  será substituído pelo vazio, ou seja,

$$DA \xrightarrow{q} DD, DA \xrightarrow{1-q} \otimes A. \quad (2.5)$$

Em outras palavras, na interação com sua presa, ele vai tomar uma decisão entre predação, com probabilidade  $q$  e a auto-aniquilação, com probabilidade  $1 - q$ . Caso seja sorteada a predação, a presa é substituída pela espécie  $D$  naquele sítio e, caso seja sorteada a aniquilação ( $1 - q$ ), a espécie  $D$  é eliminada, deixando o seu sítio vazio (representado por  $\otimes$ ). Caso o vizinho sorteado não seja da espécie  $A$ , a ação

chega ao fim, pois neste caso a predação não é possível. Portanto,  $q$  está relacionado à eficiência predatória da espécie  $D$  e dependendo do valor de  $q$  a espécie  $D$  pode ou não ser extinta na rede. O modelo de predação descrito é ilustrado pela figura 2.4, em que as setas indicam a direção de predação.

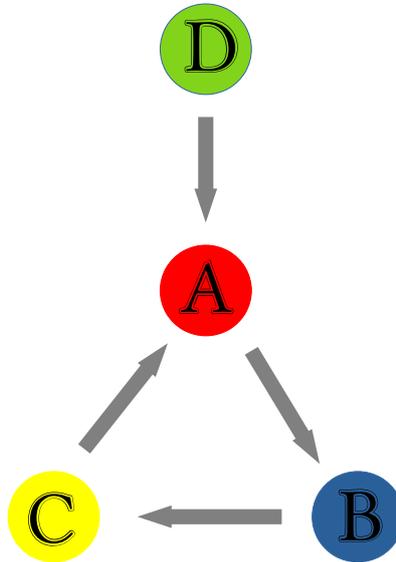


Figura 2.4: Ilustração do modelo de competição para o RPS com espécie invasora. As setas indicam o sentido de eliminação. Note que um indivíduo da espécie  $A$  pode ser eliminado tanto pela espécie  $C$  quanto pela espécie invasora  $D$ . A interação da espécie  $D$  com  $A$  segue o modelo de predação de Lotka-Volterra, enquanto as demais interações seguem o modelo de competição de May-Leonard.

### 2.1.3 RPS com supercompetidores

No modelo de RPS com supercompetidores, consideraremos dois mecanismos de competição possíveis. O primeiro é a competição utilizada no RPS clássico, em que ocorre no máximo uma eliminação para cada ação de competição de um indivíduo. A segunda é a competição realizada por supercompetidores. Quando um indivíduo supercompetidor é sorteado como ativo e em seguida é sorteada a ação de competição, este verifica todos os quatro vizinhos e realiza a eliminação de todos os indivíduos possíveis de serem eliminados pelo indivíduo ativo. Desta forma, em uma única ação, o supercompetidor pode realizar até quatro eliminações ao mesmo tempo. Na Figura 2.5 podemos ver um exemplo comparando uma competição clássica em RPS e uma competição realizada por um supercompetidor. Doravante, vamos nos referir às espécies como espécie 1, 2 e 3 em substituição a  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

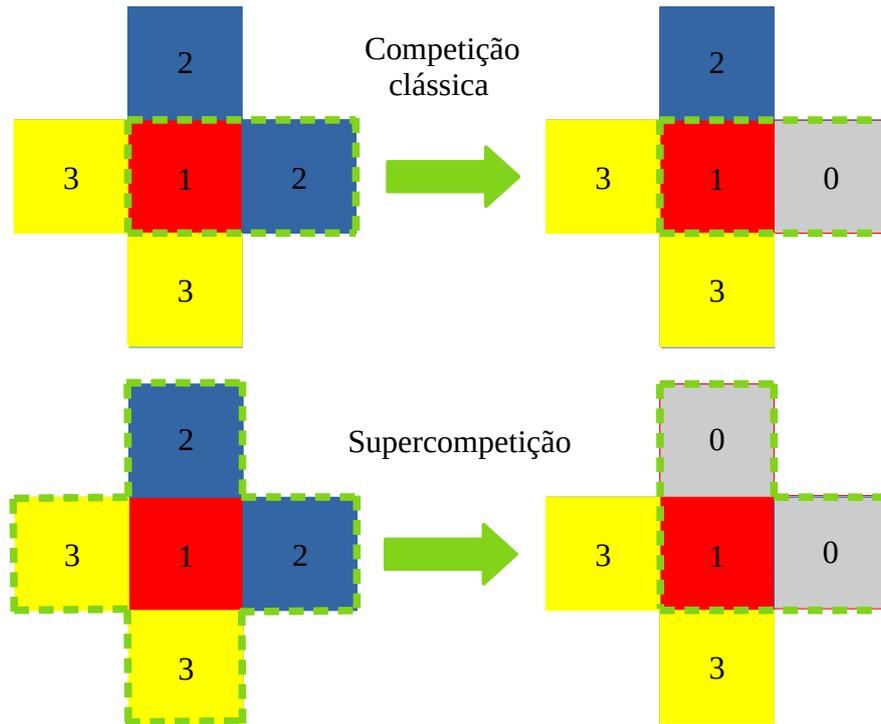


Figura 2.5: Exemplos de competição. No caminho superior é realizada uma competição aos moldes do modelo RPS clássico, neste exemplo a espécie 1 (vermelha) é sorteada como ativa, depois é sorteado um dos sítios vizinhos, indicado pelo tracejado verde, se este for um indivíduo da espécie 2 (azul) e a ação sorteada for de competição o sítio passivo fica vazio. No caminho inferior, é realizada uma supercompetição, na qual o indivíduo ativo 1 (vermelho) verifica todos os primeiros vizinhos, indicado pelo tracejado verde, e em seguida realiza a eliminação de todos os indivíduos da espécie 2 (azul) nesta vizinhança. Apesar do exemplo mostrar uma eliminação dupla, este acontecimento conta apenas como uma ação e não duas ações na contagem de passagem do tempo. Sempre que um supercompetidor seleciona a ação de competição, independentemente da quantidade de indivíduos eliminados, será contada apenas como uma ação na passagem do tempo.

Neste trabalho, construímos quatro modelos para a comparação entre eles. O modelo RPS clássico, sem supercompetidores, e os modelos com um, dois ou três espécies supercompetidoras. Em cada modelo foram feitas diversas simulações com valores variados da mobilidade para comparar as curvas de probabilidade de extinção em função da mobilidade no intuito de analisar a estabilidade do estado de coexistência das três espécies. Para que a análise seja menos dependente do tamanho da rede, será adotada  $M(m)$  [49], em que

$$M = \frac{m}{L^2(1 - m)}. \quad (2.6)$$

Nesta expressão,  $L^2$  representa a multiplicação da largura com a altura da rede quadrada, que é igual ao número de sítios na rede e  $m$  é a probabilidade de mobilidade.

Desta forma, o resultado pouco mudará independente do tamanho da rede, como demonstrado por Reichenbach [49], que realizou simulações em RPS clássico para relacionar a biodiversidade com a mobilidade. Nosso trabalho, porém, dá um passo adiante, pois acrescenta o conceito de supercompetidores ao modelo.

#### **2.1.4 RPS com super-reprodutores**

No modelo de RPS com super-reprodutores, consideraremos dois mecanismos de reprodução possíveis. O primeiro é a reprodução utilizada no RPS clássico, em que ocorre no máximo a ocupação de um sítio a mais para cada ação de reprodução de um indivíduo. A segunda é a competição realizada por super-reprodutores. Quando um indivíduo super-reprodutor é sorteado como ativo e em seguida é sorteada a ação de reprodução, este verifica todos os quatro sítios vizinhos na sua vizinhança de Neumann e realiza a reprodução em todos os sítios que estejam vazios. Desta forma, em uma única ação, o super-reprodutor pode realizar até quatro reproduções ao mesmo tempo. Na figura 2.6 podemos ver um exemplo comparando uma reprodução clássica em RPS e uma super-reprodução.

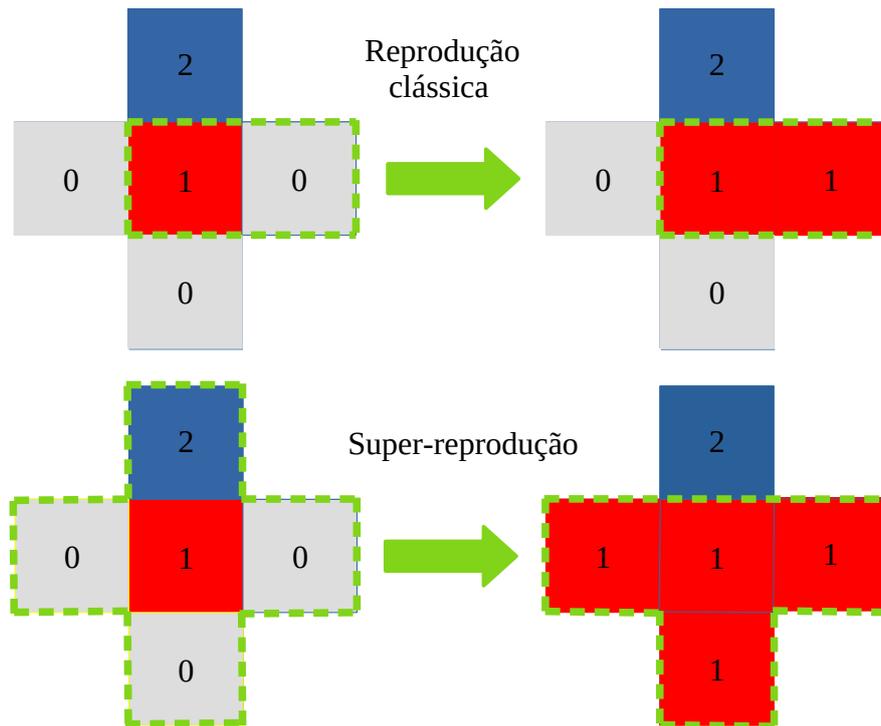


Figura 2.6: Exemplos de reprodução. No caminho superior é realizada uma reprodução aos moldes do modelo RPS clássico, neste exemplo a espécie 1 (vermelha) é sorteada como ativa, depois é sorteado um dos sítios vizinhos, indicado pelo tracejado verde, se este for um sítio vazio (cinza) e a ação sorteada for de reprodução o sítio passivo é preenchido com um novo indivíduo da espécie 1 (vermelha). No caminho inferior, é realizada uma super-reprodução, na qual o indivíduo ativo 1 (vermelho) verifica todos os primeiros vizinhos, indicado pelo tracejado verde, e em seguida realiza a reprodução em todos os sítios vagos nesta vizinhança. Apesar do exemplo mostrar uma reprodução tripla, este acontecimento conta apenas como uma ação. Sempre que um super-reprodutor seleciona a ação de reprodução, independentemente da quantidade de sítios vagos, será contada apenas uma ação na passagem do tempo.

Com este novo método de reprodução, serão construídos três modelos para a comparação entre eles, além da comparação com o modelo RPS clássico. Os modelos contarão com um, dois ou três espécies dotadas da capacidade de super-reprodução. Em cada modelo foram feitas diversas simulações com valores variados da mobilidade para comparar as curvas de probabilidade de extinção em função da mobilidade no intuito de analisar a estabilidade do estado de coexistência da biodiversidade das três espécies.

## 2.2 Um modelo para o cálculo da densidade de espirais

Nesta seção será exposto um modelo que calcula a densidade de espirais na rede. Este dado será relevante no cálculo da área média ocupada pelas espirais. O primeiro passo é definir a densidade de espirais na rede quadrada como

$$\rho_{esp} = \frac{N_{esp}}{L^2}, \quad (2.7)$$

em que  $N_{exp}$  é o número de espirais contadas e  $L$  é a largura (ou altura) da rede, conseqüentemente  $L^2$  é a quantidade de sítios. Para calcular a quantidade de espirais na rede, primeiramente vamos definir um vetor representante de cada espécie. A espécie 1 será representada pelo vetor

$$\vec{A} = (0, 1), \quad (2.8)$$

a espécie 2 será representada pelo vetor

$$\vec{B} = \left( \cos \frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

e a espécie 3 será representada pelo vetor

$$\vec{C} = \left( -\cos \frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

Todos os vetores já estão previamente normalizados e descrevem  $120^\circ$  entre si. Na Figura 2.7 podemos ver a representação gráfica dos três vetores.

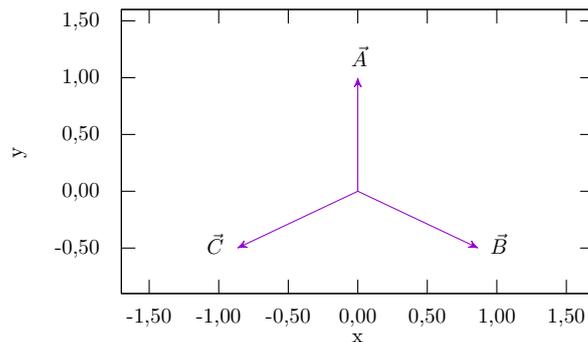


Figura 2.7: Ilustração dos vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ , que equivalem à representação das espécies 1, 2 e 3 respectivamente. Note que para estes três vetores, qualquer par descreve um ângulo de  $120^\circ$  entre eles.

No RPS clássico, as três espécies interagem formando domínios em formas de espirais [47] ao longo das gerações. Na Figura 2.8 temos um exemplo ampliado de uma espiral formada na rede. Podemos notar que dentro dos braços das espirais

temos regiões relativamente homogêneas se comparadas com as regiões de fronteiras entre os domínios. O contraste é ainda mais claro quando comparamos uma região de centro na espiral com a região em um braço da espiral. Podemos usar estes fatos a nosso favor para identificar na rede qual é uma região de centro de espiral e qual não é. Para isso, vamos definir um parâmetro de ordem que vai nos indicar o quão homogênea é uma região. Mas antes vamos definir a região que será objeto de estudo, esta região será formada pelo círculo de raio  $r$  em torno de um sítio localizado na rede, que chamaremos de sítio ativo, ou sítio  $j$ , como exemplificado na Figura 2.8, em seguida definimos um vetor diretor, o qual vai nos mostrar a direção média dos vetores que ocupam os sítios contidos na região de estudo, este pode ser definido como

$$\hat{n}_j = \frac{\sum_{i \in C} \vec{p}_i}{|\sum_{i \in C} \vec{p}_i|}, \quad (2.11)$$

em que  $\vec{p}$  é o valor do vetor que preenche cada sítio representando as espécies 1, 2 e 3, e  $C$  é o conjunto de endereços na rede pertencentes à região a ser estudada. Note na Figura 2.8 que a região de estudo foi definida como uma região circular e, portanto, a área (número de sítios) desta região é dada por  $r = \pi r^2$ . Sabendo que o produto escalar de dois vetores,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , é dado por

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \theta_{12}, \quad (2.12)$$

em que  $\theta_{12}$  é a diferença angular entre os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , podemos multiplicar o vetor diretor por cada vetor na região de estudo para se calcular o parâmetro de ordem. Este podemos definir como

$$S_j = \langle \cos \theta_i \rangle = \left\langle \frac{\vec{v}_i \cdot \hat{n}_j}{|\vec{v}_i| |\hat{n}_j|} \right\rangle = \langle \vec{v}_i \cdot \hat{n}_j \rangle, \quad (2.13)$$

em que  $\theta_i$  é o ângulo em que cada vetor na região de estudo faz com o vetor diretor  $\hat{n}$ . Como cada vetor  $\vec{v}_i$  já é normalizado, o denominador  $|\vec{v}_i| |\hat{n}_j| = 1$ . Quando o valor do parâmetro de ordem é abaixo de um limiar  $S_c$  consideraremos o sítio ativo  $j$  como pertencente aos sítios centrais de uma espiral. Refazendo o processo para todo sítio  $j$  na rede, é possível obter todos os sítios que pertencem às regiões centrais das espirais. Uma vez que identificado todas as regiões pertencentes aos centros das espirais basta contar, com o auxílio da programação em  $c^{++}$ , quantos domínios formados por regiões centrais de espirais existem na rede e obtém-se conseqüentemente a quantidade de espirais na rede ( $N_{exp}$ ), e por fim podemos usar este dado na Equação (2.7) para obtermos a densidade de espirais na rede.

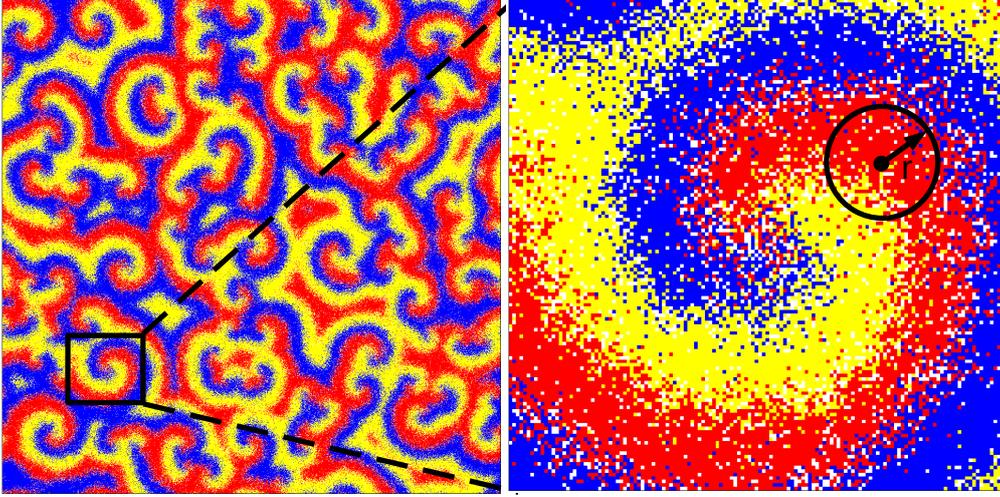


Figura 2.8: Disposição das espécies na rede gerada pelo modelo RPS clássico após 5000 gerações. A mobilidade usada foi  $m = 0,9$  com  $L = 1000$ . À direita pode-se ver a ampliação de uma espiral na rede. Nela, temos destacado por um círculo preto um exemplo ilustrativo de região utilizada para se calcular  $\hat{n}_j$  e  $S_j$  para o sítio  $j$  localizado no centro do círculo preto.

Nesta seção não foi definido o  $r$  que será usado para demarcar a região de estudo, este será definido na seção de resultados mediante ao cálculo do comprimento característico da função de autocorrelação de cada modelo. O limiar  $S_c$  do parâmetro de ordem é definido com o auxílio de uma rede preenchida aleatoriamente por três espécies igualmente prováveis e 25% de sítios vazios. Se calculado o parâmetro  $S_j$  para cada sítio na rede, defini-se  $S_c$  como o valor do parâmetro de ordem em que 99% dos sítios nesta rede aleatória apresentam  $S_j < S_c$ .

## 2.3 Largura Característica de Percolação

Nesta etapa, estamos propondo uma técnica que relaciona a percolação ao tamanho das espirais formadas na rede do modelo RPS clássico. Um dos parâmetros que influencia no tamanho das espirais é a probabilidade de mobilidade. L.Jiang demonstrou que variando a probabilidade de competição (e, portanto, variando a probabilidade de mobilidade devido à normalização das probabilidades) o número de espirais na rede é alterado, bem como o tamanho destas espirais [21], portanto, sabemos que variando a mobilidade, estamos mudando o tamanho das espirais. Para medir a variação do tamanho destas espirais, utilizaremos um conceito matemático chamado percolação, descrito no Capítulo 1 e que será fundamental em nossa metodologia. Se as espirais formadas forem muito grandes em comparação com o tamanho da rede, é provável que a percolação da rede aconteça com maior frequência. Para averiguarmos esta possibilidade, estamos propondo uma metodologia que visa

diminuir a rede em relação ao tamanho da espiral para encontrarmos a dependência da probabilidade de percolação com a diminuição do tamanho da rede, mantendo a distribuição dos indivíduos.

A proposta consiste na seguinte metodologia: primeiramente, de posse de uma rede que já fora previamente simulada, testa-se a percolação vertical da rede. Em seguida, se o teste indica que a rede não percola, retira-se a coluna que forma a borda direita da rede e a linha que forma a borda inferior da rede. Em seguida, repete-se o teste de percolação até que se encontre o tamanho da rede em que há percolação. Como ilustrado no exemplo da Figura 2.9. Esta medida do tamanho da rede em que há percolação chamaremos de largura de percolação e sua média de  $\mathcal{L}$  (largura característica de percolação). Na seção de resultados, discutiremos se  $\mathcal{L}$  está diretamente relacionada com o tamanho das espirais formadas no modelo RPS clássico e compararemos essa medida com o comprimento característico da função de autocorrelação (descrito no Capítulo 1).

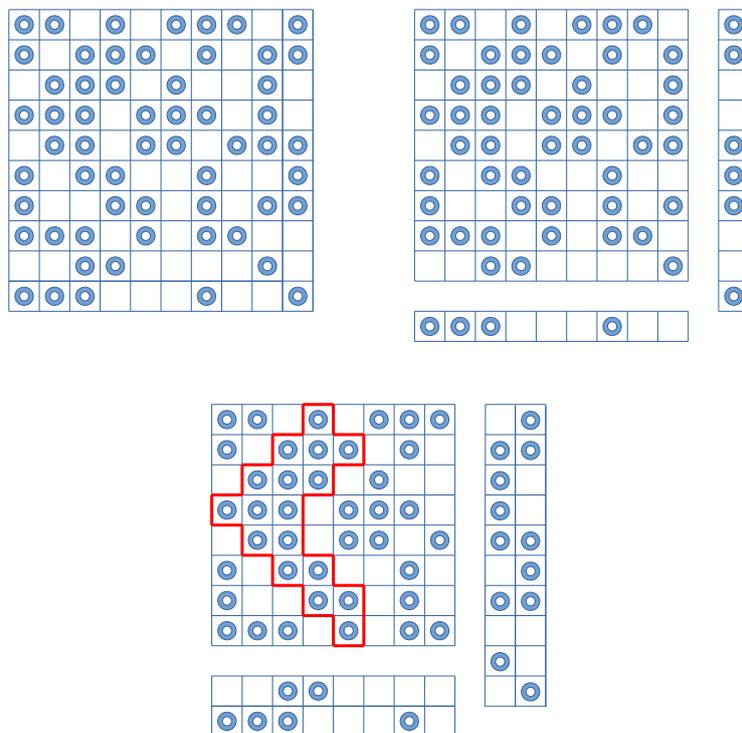


Figura 2.9: Exemplo em que excluimos as linhas inferiores e as colunas à direita para obtermos a largura de percolação dos sítios preenchidos por círculos azuis. Na imagem à esquerda não há percolação, na figura do meio, mesmo retirando uma linha e uma coluna, ainda não houve percolação e na figura à direita houve percolação vertical de um domínio, o que indica o fim do processo de exclusão das linhas e colunas. A largura da rede na figura à direita é o que chamaremos de largura de percolação ( $\mathcal{L}$ ).

# Capítulo 3

## Resultados e Discussão

### 3.1 Espécie invasora em RPS

#### 3.1.1 Influência da variação da mobilidade nas mudanças de fase

Anteriormente, na literatura, Bazeia e colaboradores publicaram um artigo analisando o comportamento das mudanças de fase na biodiversidade para diferentes valores de  $q$  para o sistema RPS em rede com uma quarta espécie invasora [48]. Este artigo considerava uma mobilidade fixa em  $m = 0,5$ . Em nosso presente trabalho, expandimos esta linha de pesquisa realizando diversas simulações com diferentes mobilidades, abrangendo valores da probabilidade de mobilidade entre  $m = 0,00$  e  $m = 0,60$ . Dessa forma, pudemos analisar a influência da mobilidade em diversos parâmetros, tais como os valores de  $q$  em que ocorrem as mudanças de fase na biodiversidade.

Nas simulações, para todos os valores de  $m$  a biodiversidade apresentou quatro fases dependentes de  $q$ . Cada fase apresenta um conjunto diferente de espécies coexistindo na rede. A extinção de uma espécie implica em uma mudança de fase. A fase denominada de fase II consiste na coexistência das quatro espécies, logo, pela necessidade de apresentar as 4 espécies como condição inicial, nossas simulações partem desta fase, variando-se os valores de  $q$  para obter as concentrações e consequentemente as mudanças de fase. As simulações foram feitas em rede com 1000 unidades de largura por 1000 unidades de altura, em que cada unidade representa o tamanho de um sítio na rede. Nos extremos da rede, para diminuir os efeitos de borda, foi adotada a condição periódica de contorno, em que a interação do indivíduo de fronteira com uma localidade fora da rede é substituída pela interação com o sítio da borda oposta na rede. Em cada simulação, foram obtidas 15000 gerações ou paços de Monte-Carlo, mas para evitar as influências das oscilações drásticas das primeiras gerações, são descartadas as 5000 iniciais. A média da concentração ao longo das gerações é calculada a partir das 10000 gerações seguintes. Logo após a conclusão da primeira simulação, o valor de  $q$  é redefinido e é iniciada uma nova simulação usando a última configuração como condição inicial para a seguinte. Desta forma foram obtidos dados para os valores de  $q = 0,77$  até  $q = 1,00$ . Na Figura 3.2.g podemos observar estes dados com as concentrações para mobilidade  $m = 0,5$ .

Este resultado mostra que há duas mudanças de fase neste intervalo de  $q$ , a primeira é a mudança da fase *II* para a fase *III*, em que a concentração de  $\rho_3$  vai a zero, a segunda mudança de fase ocorre entre as fases *III* e *IV*. Esta última consiste no fim da biodiversidade, ou seja, apenas uma espécie sobrevive na rede. Em seguida, voltamos a simular na região da fase *II*, porém variando os vares de  $q$  abaixo de 0,77. Observando a Figura 3.2.g podemos notar que para valores de  $q$  menores que 0,77 temos uma mudança de fase em que a espécie invasora entra em extinção. Esta fase é denominada de fase *I*.

Esse processo de simulações variando-se  $q$  foi repetido 31 vezes, em cada processo foi utilizado um valor de mobilidade diferente entre  $m = 0,00$  até  $m = 0,60$ , obtendo-se 31 destes diagramas de fase. Alguns destes diagramas estão expostos nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3, em que podemos observar o comportamento do sistema para  $0,02 < m < 0,48$ . Neste intervalo, podemos notar que na fase *II* a concentração de  $\rho_4$  aumenta em virtude do acréscimo no parâmetro  $q$ , isto se deve ao fato que  $q$  representa a eficiência predatória desta espécie, o que também aumenta sua eficiência reprodutória, justificando este aumento. Como consequência, a concentração de  $\rho_1$  diminui, pois ela está sofrendo competição das espécies 3 e 4. Com a diminuição de  $\rho_1$ , a concentração de  $\rho_2$ , que sofre competição de  $\rho_1$ , aumenta, o que por sua vez prejudica  $\rho_3$  que sofre competição de  $\rho_2$ . Aumentando-se  $q$ ,  $\rho_3$  atinge valor nulo, o que representa a transição das fases *II* e *III*. É importante destacar que a largura da fase *II* aumenta substancialmente com o aumento de  $m$ , ou seja, a mobilidade exerceu um papel de estabilizador da biodiversidade na fase de coexistência das quatro espécies.

Na fase *III* apenas  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_4$  coexistem. Nesta fase, podemos notar que  $\rho_2$  aumenta sua dominância na rede com o aumento de  $q$ , isto ocorre porque a população  $\rho_1$  diminui com a predação mais eficiente apresentada por  $\rho_4$ . Este comportamento é recorrente para todos os valores da mobilidade simulados até próximo da transição das fases *III*  $\rightarrow$  *IV*. No entanto, nas proximidades da mudança de fase, o valor da mobilidade é crucial para definir a espécie que dominará toda a rede. Para mobilidades maiores que  $m = 0,24$  o comportamento da transição entre as fases *III*  $\rightarrow$  *IV* é análogo ao descrito no artigo [48], ou seja,  $\rho_2$  domina totalmente a rede, como mostrado na Figura 3.4, isto ocorre devido à extinção de  $\rho_1$ , provocada pela predação mais eficiente de  $\rho_4$ . O que muda para mobilidades maiores que 0,24 é apenas o valor de  $q$  em que esta transição ocorre. Entretanto, para simulações com mobilidade entre  $0,0 < m < 0,24$  o comportamento das transições é notoriamente diferente. Primeiramente, vamos analisar o intervalo  $0,18 < m < 0,24$  mostrado nas figuras 3.4(c-f), nela as concentrações de  $\rho_1$  e  $\rho_4$  são semelhantes. Nesta situação, existe uma distribuição de probabilidade em que o sistema pode transitar para o domínio completo de  $\rho_1$  ou  $\rho_2$ . Para o caso de valores de  $m < 0,18$  a transição da fase *III* para a fase *IV* foi observada apenas a dominância completa da rede por  $\rho_1$ , como exemplificado nas figuras 3.4(a-b). Isto ocorre devido à diminuição de  $\rho_4$ , que é a única que está competindo com  $\rho_1$ . Além disso, podemos observar que a fase *IV* fica mais estreita com o aumento de  $m$ . Mostrando que o aumento de  $m$  exerce um papel de estabilizador da biodiversidade também na fase *III*.

Na transição da fase *II* para a fase *I*, mostrada nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3, a diminuição de  $q$  prejudica a sobrevivência de  $\rho_4$ , ao ponto de  $\rho_4 = 0$ . Quando isso

ocorre, o que resta na rede são as espécies que caracterizam o sistema RPS clássico, e as concentrações das três espécies assumem valores simétricos na média temporal.

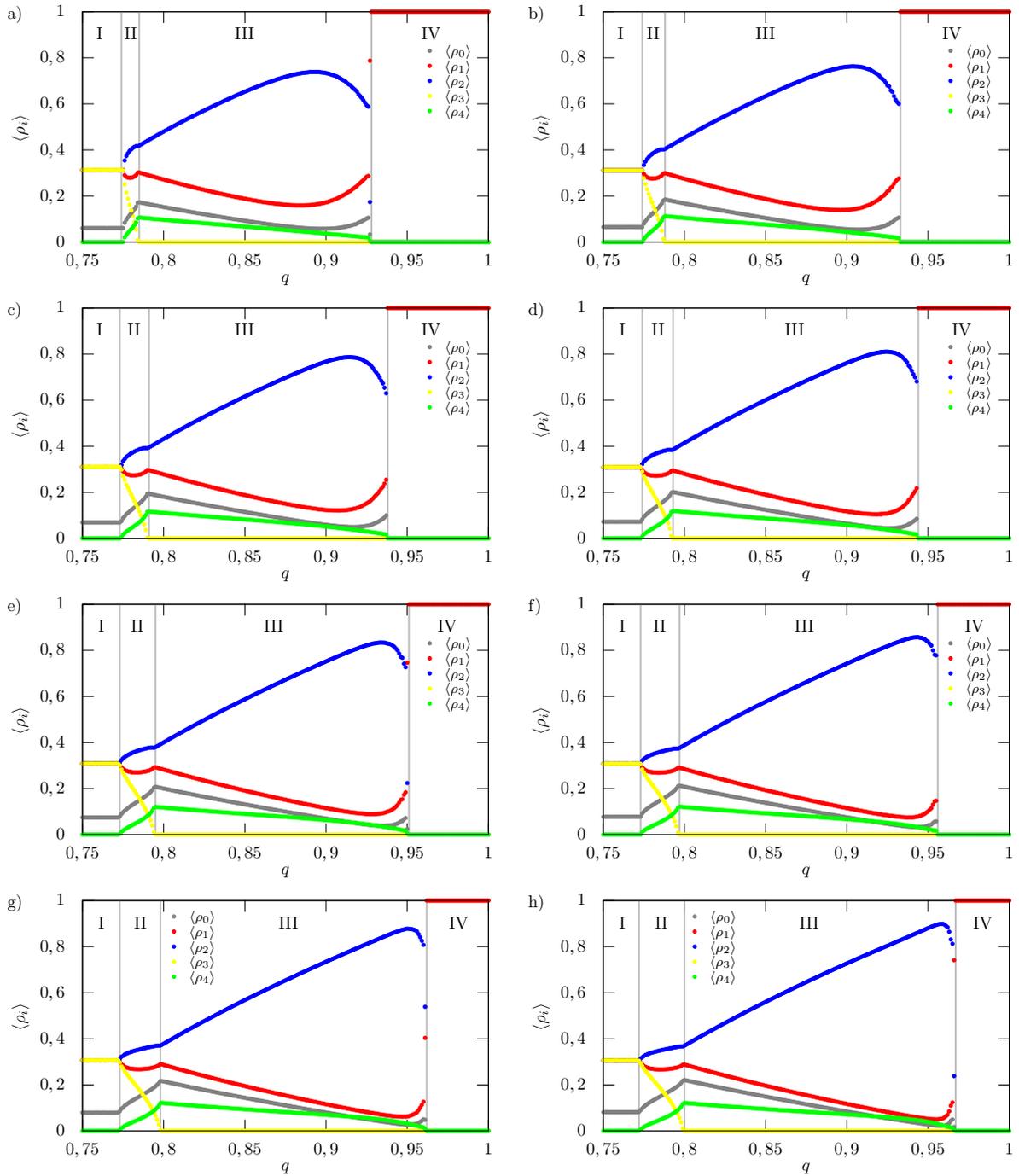


Figura 3.1: Gráfico da densidade média temporal na rede ( $\langle \rho_i \rangle$ ) em função de  $q$  com as seguintes mobilidades: a) 0,02, b) 0,04, c) 0,06, d) 0,08, e) 0,10, f) 0,12, g) 0,14 e h) 0,16. Para cada  $q$  foram obtidas as  $\langle \rho_i \rangle$  em simulações com 15000 gerações em rede quadrada de lado  $L=1000$ , descartando-se as primeiras 5000 gerações.

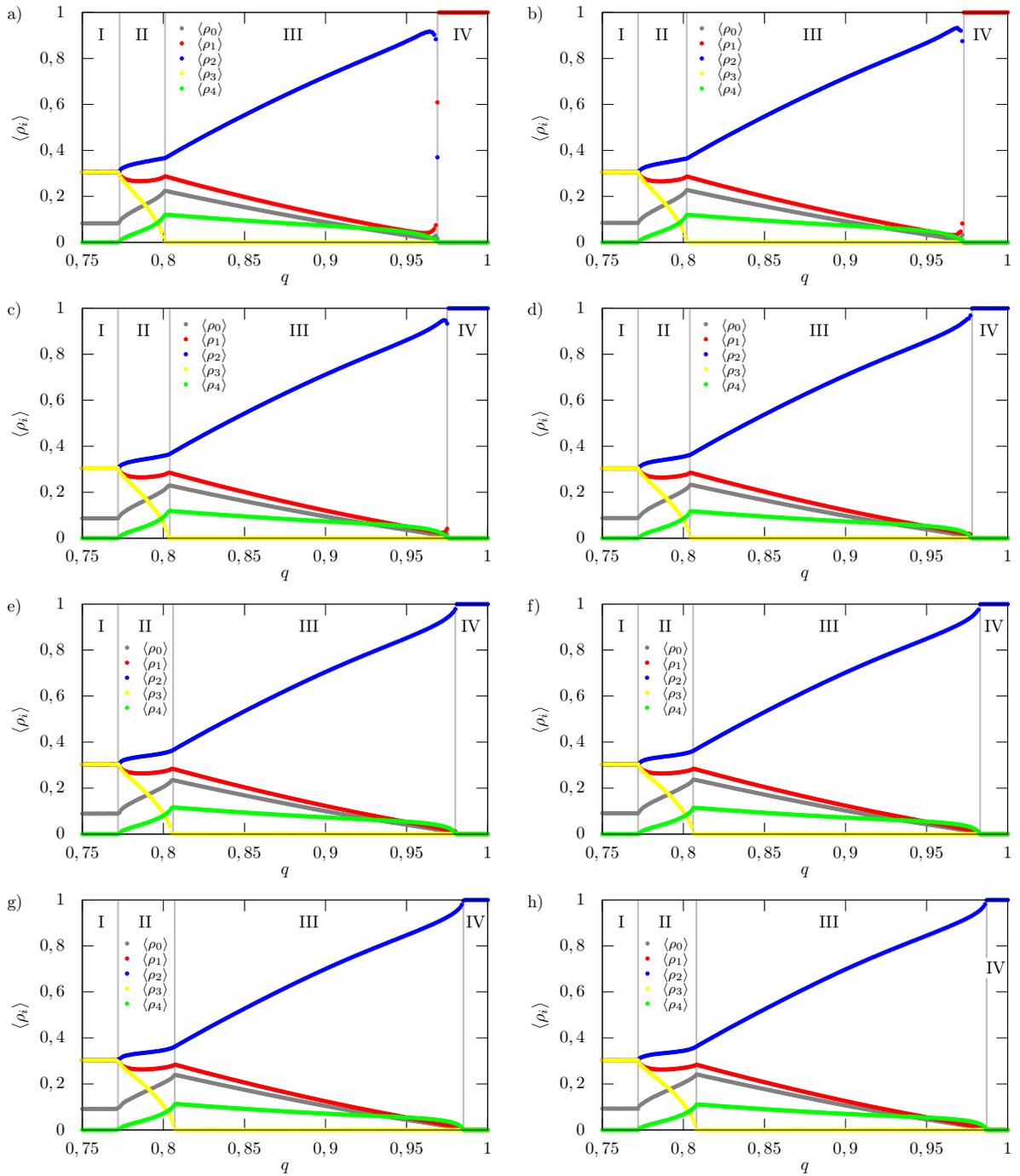


Figura 3.2: Gráfico da densidade média temporal na rede ( $\langle \rho_i \rangle$ ) em função de  $q$  com as seguintes mobilidades: a) 0,18, b) 0,20, c) 0,22, d) 0,24, e) 0,26, f) 0,28, g) 0,30 e h) 0,32. Para cada  $q$  foram obtidas as  $\langle \rho_i \rangle$  em simulações com 15000 gerações em rede quadrada de lado  $L=1000$ , descartando-se as primeiras 5000 gerações.

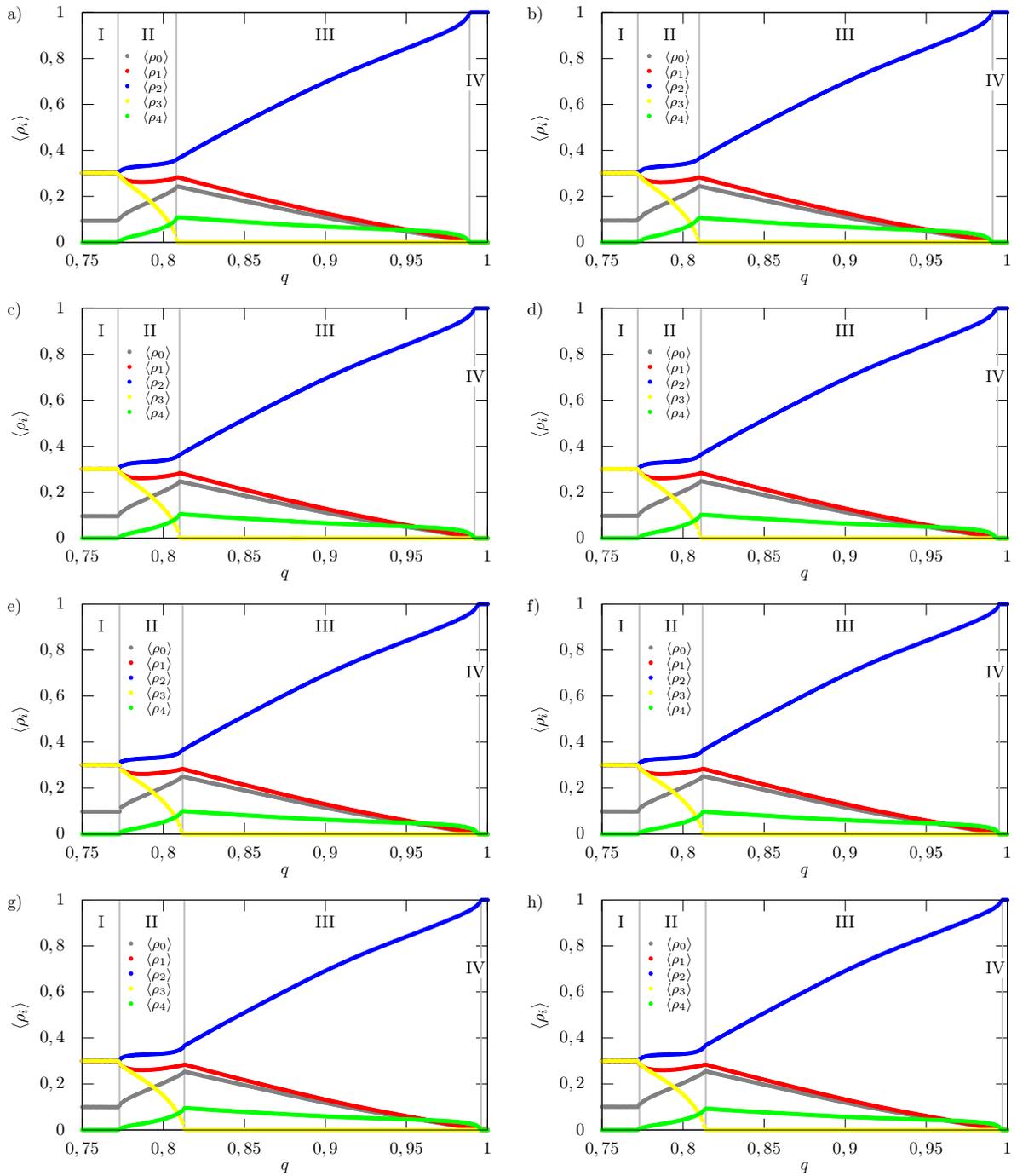


Figura 3.3: Gráfico da densidade média temporal na rede ( $\langle \rho_i \rangle$ ) em função de  $q$  com as seguintes mobilidades: a) 0,34, b) 0,36, c) 0,38, d) 0,40, e) 0,42, f) 0,44, g) 0,46 e h) 0,48. Para cada  $q$  foram obtidas as  $\langle \rho_i \rangle$  em simulações com 15000 gerações em rede quadrada de lado  $L=1000$ , descartando-se as primeiras 5000 gerações.

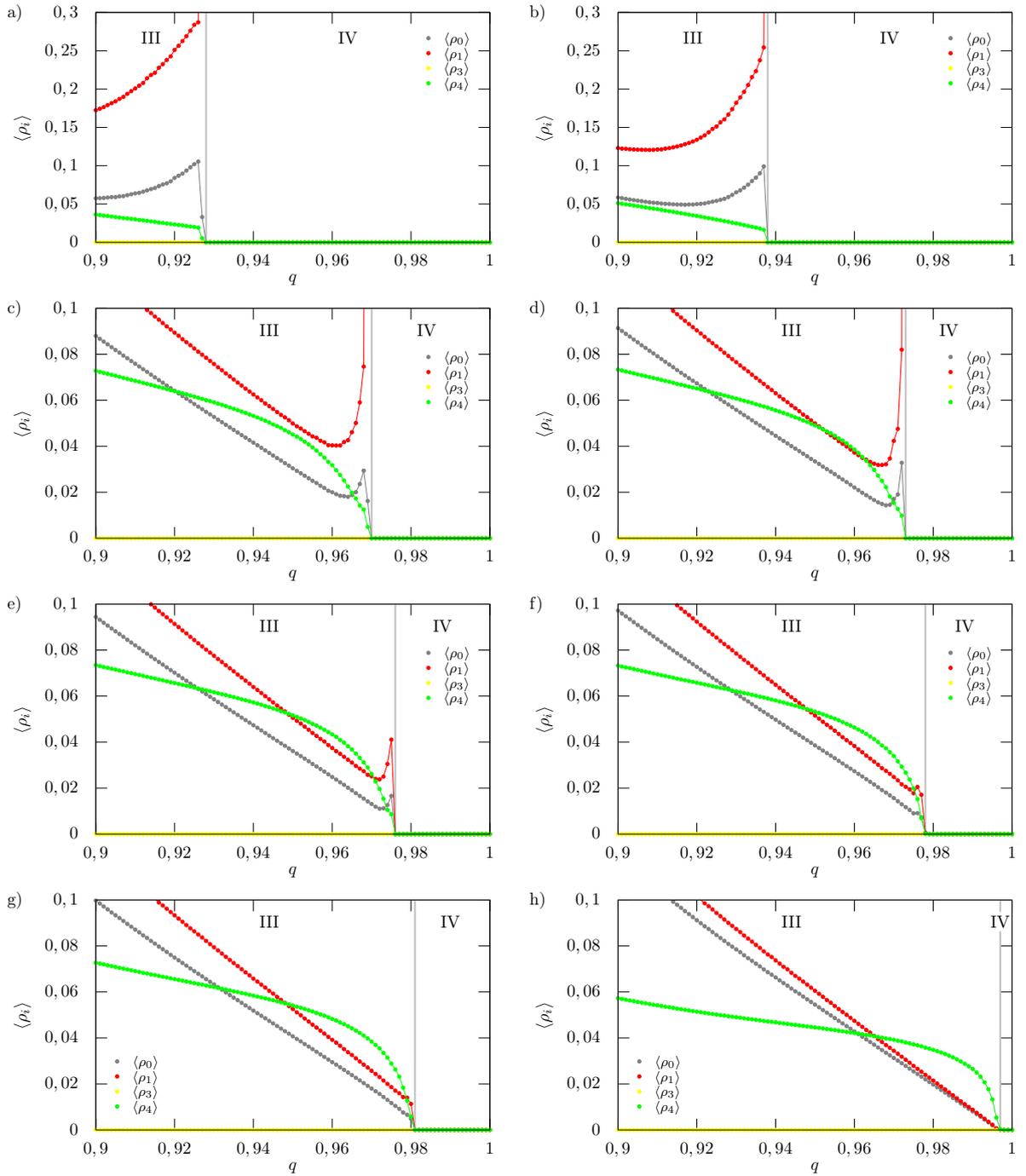


Figura 3.4: Gráficos destacando a transição de fase  $III \rightarrow IV$  com as seguintes mobilidades: a) 0,02, b) 0,06, c) 0,18, d) 0,20, e) 0,22, f) 0,24, g) 0,26 e h) 0,48. Para cada  $q$  foram obtidas as  $\langle \rho_i \rangle$  em simulações com 15000 gerações em rede quadrada de lado  $L=1000$ , descartando-se as primeiras 5000 gerações. Nas figuras a), b), c) e d) a espécie 1 domina toda a rede, mas nas figuras e), f), g) e h) a espécie 2 é a que domina toda a rede.

Como já vimos, para  $m > 0,24$ , o comportamento do sistema é análogo ao que foi anteriormente publicado na literatura para  $m = 0,50$  [48], o que muda substan-

cialmente quando são realizadas simulações para mobilidades diferentes é o valor de  $q$  em que ocorrem as transições. A figura 3.5 mostra os valores obtidos para estas transições de fases. Podemos notar que, para valores pequenos da mobilidade, as transições das fases *II* para *III* e *III* para *IV* ocorrem cada vez mais cedo em  $q$ , e a transição *II* para *I* praticamente se mantém estável, tanto para mobilidades mais baixas, quanto para as mais altas. Por conta disso, a fase *II* fica muito estreita em valores pequenos de  $m$ , no entanto, a fase *II* não deixa de existir, mesmo para  $m = 0$ . Nesta mobilidade, a fase *II* ocorre entre  $q = 0,776$  e  $q = 0,782$ . Já para valores grandes de  $m$  a fase *IV* é quem fica estreita, mas não deixa de existir. Para  $m = 0,6$  a transição para a fase *IV* ocorre em  $q = 1,00$ . É importante destacar que não foram feitas simulações para  $m > 0,6$  porque, para estes valores de mobilidade, nas primeiras gerações, as concentrações das espécies oscilam de tal modo que ocorrem extinções aleatórias que impossibilitam a análise mais aprofundada.

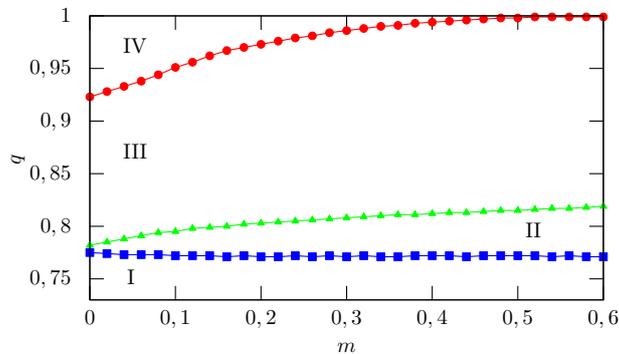


Figura 3.5: Diagrama de fase em função do parâmetro  $q$  e  $m$ . A região *I* representa a fase em que  $\rho_4$  não sobrevive devido a  $q$  ser muito baixo, *II* representa a região que apresenta a coexistência das quatro espécies, a transição  $I \rightarrow II$  é representada pela linha azul interligando os pontos quadrados, *III* é a região em que  $\rho_3 = 0$  e em *IV* o sistema tem três espécies extintas, com somente uma das quatro dominando a rede. A transição  $II \rightarrow III$  é representada pela linha verde interligando os pontos ilustrados pelos triângulos e a transição  $III \rightarrow IV$  é representada pela linha vermelha, que liga os pontos redondos. Cada um dos pontos foi obtido por meio de diagramas como os das Figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

### 3.1.2 Influência da variação da mobilidade nos domínios

Sabemos que no RPS clássico de 3 espécies temos a formação de domínios ao longo do tempo e que esses domínios possuem a tendência de formarem espirais concêntricas devido ao caráter cíclico de competição entre as espécies [47], portanto é natural esperar que na fase *I*, em que a espécie 4 entra em extinção, o comportamento seja análogo ao RPS clássico. Podemos ver na Figura 3.6 que esse comportamento de fato é o mesmo que o apresentado pelo RPS clássico, incluindo a formação das espirais, em que o tamanho e a largura dos braços dependem da mobilidade adotada. Estas formas em espiral ocorrem devido ao caráter cíclico da competição. Se escolhermos uma das espécies que compõem a espiral, podemos

notar que a espécie que pode eliminá-la na competição está concentrada na parte mais interna da espiral e a espécie eliminada por ela fica posicionada na parte mais externa. Ao longo das gerações, todas as três espécies têm seus domínios migrando para a parte externa da espiral. Podemos notar também que, para mobilidades menores, as fronteiras dos domínios ficam mais delineadas e quando aumentamos a mobilidade, as fronteiras ficam mais dispersas. Isto ocorre para os três valores da mobilidade mostradas na primeira coluna da Figura 3.6, entretanto, nas fases com a presença da espécie invasora pode-se notar que não temos formação de espirais devido à perda do caráter de competição cíclica da rede, entretanto a formação de domínios continua existindo. O tamanho e as fronteiras destes domínios também sofrem mudanças em razão da mobilidade. O aumento de  $m$  provoca o aumento dos domínios e suas fronteiras ficam mais dispersas. Na fase *III*, a densidade da espécie 2 ( $\langle \rho_2 \rangle$ ) é maior que as demais espécies, como pode ser visto nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.6. Esse aumento de  $\langle \rho_2 \rangle$  possibilita que haja percolação entre os sítios preenchidos da rede. A probabilidade de percolação será analisada na seção seguinte.

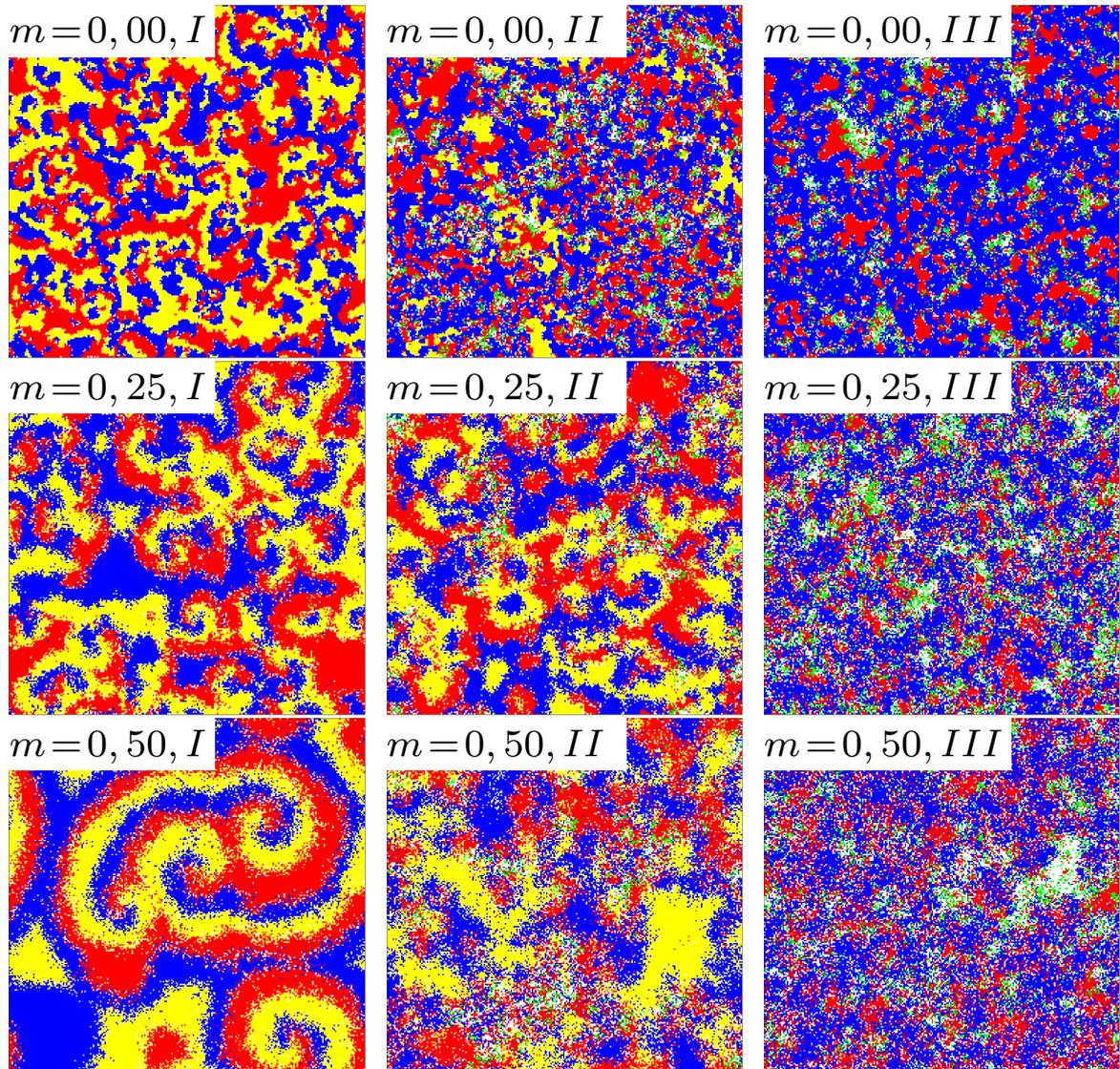


Figura 3.6: Redes com  $L=250$ , obtidas depois de 5000 gerações. A fase em que  $q$  é extinta é denotada por  $I$ , A fase de coexistência das quatro espécies é denotada por  $II$  e a fase em que  $\langle \rho_3 \rangle = 0$  é denotada por  $III$ . A mobilidade é denotada por  $m$ . Note que apenas na fase  $I$  há a presença de espirais na rede.

### 3.1.3 Influência da variação da mobilidade na percolação do sistema

Para a análise da capacidade de percolação das espécies em rede, foram feitas  $10^4$  novas simulações, com  $10^3$  gerações para cada valor de  $q$  em uma rede com  $L = 1000$ . Em cada uma das simulações, observou-se se na última geração a rede percolou ou não, e ao fim das  $10^4$  simulações se obteve a probabilidade da rede percolar na última geração. Em seguida, as mesmas simulações foram feitas para outros valores de  $q$  para obtermos a curva  $\theta(q)$  mostrada na Figura 3.7, em que  $m = 0,5$ . Para

todos os valores de  $q$  testados, a única espécie que apresentou percolação foi a espécie 2 na fase *III*, isto justifica-se observando que a probabilidade de percolação está diretamente relacionada com a concentração da espécie e a espécie 2 atinge concentrações altas durante essa fase. É importante destacar que na fase *IV* temos a dominância completa da rede pela espécie 1 ou 2, a depender do valor da mobilidade, e neste caso é evidente que a rede percola. O objetivo do nosso estudo é analisar a probabilidade de percolação ( $\theta(q)$ ) da espécie 2 durante a fase *III*.

Na Figura 3.7, podemos ver a probabilidade de percolação em função de  $q$  com  $m = 0,5$ . É importante notar que o ponto crítico de percolação ( $q_c$ ) ocorre em  $q = 0,8612$ , sinalizado pelo cruzamento de linhas tracejadas vermelhas na figura. Sabendo que para simulações com redes maiores a curva de  $\theta(q)$  se torna mais abrupta [39], porém centrada no mesmo ponto, em que  $\theta(q) = 0,50$ , se nossa rede fosse infinita, só teríamos percolação após esse ponto. Nestes valores de  $q$  e  $m$  a densidade média  $\langle \rho_2 \rangle$  é de 0,5482, bem menor que a densidade crítica de percolação em rede para uma distribuição aleatória (0,5927) [39]. Esta diferença se deve à formação dos domínios no sistema proposto. A formação dos domínios contribui para que a percolação ocorra mais facilmente na rede do que em uma distribuição uniformemente aleatória. Como os domínios mudam em forma e tamanho dependendo da mobilidade, os  $q_c$  também podem depender dos valores de mobilidade. Foram realizadas simulações para verificar a influência da mobilidade na probabilidade de percolar. Os valores testados para mobilidade ficaram entre  $0,00 \leq m \leq 0,60$ , com um intervalo de  $\Delta m = 0,02$  entre cada valor testado. Para cada valor da mobilidade testada, foram obtidas curvas semelhantes à Figura 3.7, onde podemos identificar o valor de  $q_c$ , assim obtendo a dependência de  $q_c$  em relação à mobilidade. Em cada valor de  $q_c$  a densidade da espécie 2 muda ligeiramente, por isso também podemos expor as densidades em que a percolação tem probabilidade de 50% de acontecer. Essas densidades chamaremos de densidades críticas de percolação ( $\rho_c$ ). O comportamento de  $q_c$  e de  $\rho_c$  está exposto nas Figuras 3.9 e 3.8 respectivamente.

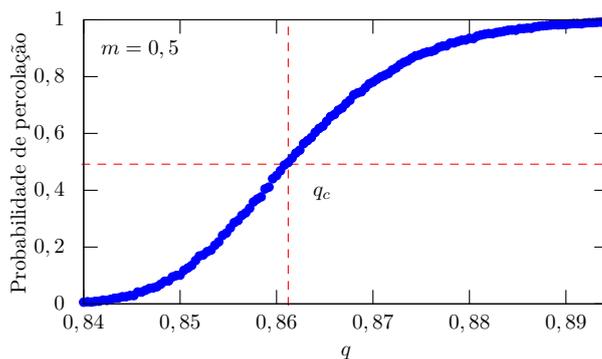


Figura 3.7: Probabilidade de percolação em função de  $q$  para  $m = 0,5$ . Foram feitas 10000 simulações de 1000 gerações para cada ponto do gráfico. O cruzamento das linhas vermelhas pontilhadas indica o ponto crítico de percolação ( $q_c$ ) para  $m = 0,5$  e  $L = 1000$ .

A primeira característica a se destacar na Figura 3.8 é que, em todos os valo-

res de  $m$  testados, a densidade crítica ( $\rho_c$ ) é inferior à concentração necessária em uma distribuição aleatória para que  $\theta = 0,5$ . Devido a formação de domínios, a percolação é facilitada de tal forma que ela ocorre em concentrações menores. Também destaca-se que para mobilidades maiores,  $\rho_c$  aumenta, isto está relacionado ao fato das mobilidades maiores deixarem as fronteiras entre os domínios mais difusas, dificultando a continuidade dos domínios e, portanto, dificultando percolação. Para mobilidades menores, as fronteiras, como mostrado na Figura 3.6, são bem delineadas, o que facilita a percolação e acarreta  $\rho_c$  menores, como visto na Figura 3.8.

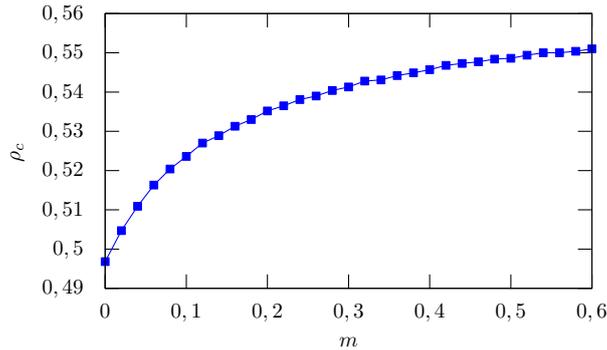


Figura 3.8: Densidade crítica ( $\rho_c$ ) em função da mobilidade ( $m$ ).

Na Figura 3.9 podemos notar que o comportamento da curva de  $q_c$  é semelhante a  $\rho_c$ . Isto ocorre porque, durante a fase *III*, a relação entre  $\langle \rho_2 \rangle$  e  $q$  é aproximadamente linear, como pode ser constatado nas Figuras 3.1 e 3.2.

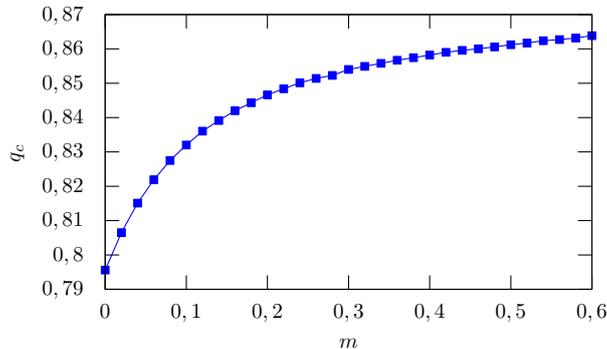


Figura 3.9:  $q_c$  em função da mobilidade.

Como podemos notar na Figura 3.10 a frequência característica mais presente quando o sistema tem  $m = 0,50$  e  $q = 0,790$  (fase *II*) está por volta de 68. Para obter esse dado, foi feita a média de 10000 transformadas de Fourier de simulações com rede  $L = 1000$ . Destaca-se que, apesar da presença da espécie invasora não permitir a formação das espirais, o caráter interdependente das espécies ainda conserva a existência de uma mesma frequência característica para as três espécies tradicionais.

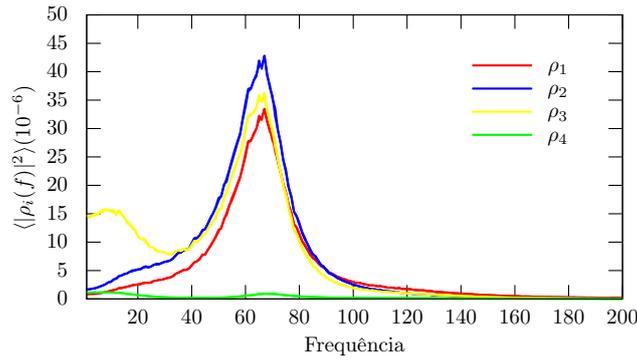


Figura 3.10: Transformada de Fourier para  $m = 0,5$  e  $q = 0,79$  (fase II).

## 3.2 Estimativa do tamanho das espirais formadas no modelo RPS

### 3.2.1 Comparação qualitativa

Nesta seção estaremos discutindo os resultados que demonstram que o tamanho da espiral influencia na probabilidade de percolação e que, devido a isso, é possível relacionar a percolação ao comprimento característico da função de autocorrelação. Na Figura 3.11.a vemos a configuração da rede com três espécies após 5000 gerações no modelo RPS com  $m = 0,9$ . Nela podemos ver as espirais formadas pelos domínios das espécies. A concentração de cada espécie é de cerca de 30% da rede. A Figura 3.11.b mostra as espirais formadas quando  $m = 0,4$ . Conforme a literatura atual [39] a concentração, em uma distribuição aleatória, necessária para termos 50% de probabilidade de percolar, é de 0,5927% da rede, como pode ser notado na Figura 1.3. No entanto, devido à formação de domínios, é evidente que a probabilidade de percolação é aumentada. Além disso, o tamanho das espirais em relação ao tamanho da rede também deve influenciar na probabilidade de percolação. Se as espirais forem da ordem do tamanho da rede, a percolação é quase certa, porém se as espirais forem muito pequenas em relação ao tamanho da rede, a percolação pode ser rara. Para quantificarmos a influência do tamanho das espirais na probabilidade de percolação usamos a variação da mobilidade das espécies para gerarmos configurações com tamanho de espirais variados, como mostrado na Figura 3.11, em que fica evidente que a mudança na mobilidade gera espirais de tamanho diferentes. Note que na Figura 3.11.a as espirais são bem maiores que na Figura 3.11.b, a única mudança entre os dois modelos está nas suas mobilidades,  $m = 0,9$  e  $m = 0,4$  respectivamente. Cientes disso, calculamos a função de autocorrelação das espécies para mobilidades diferentes. Como a função de autocorrelação mede a relação de um indivíduo com seus vizinhos, isto é, o quanto homogênea é a sua vizinhança, quanto maior for o raio em que sua correlação permanece alta com seus vizinhos, maior será o tamanho dos domínios formados na rede.

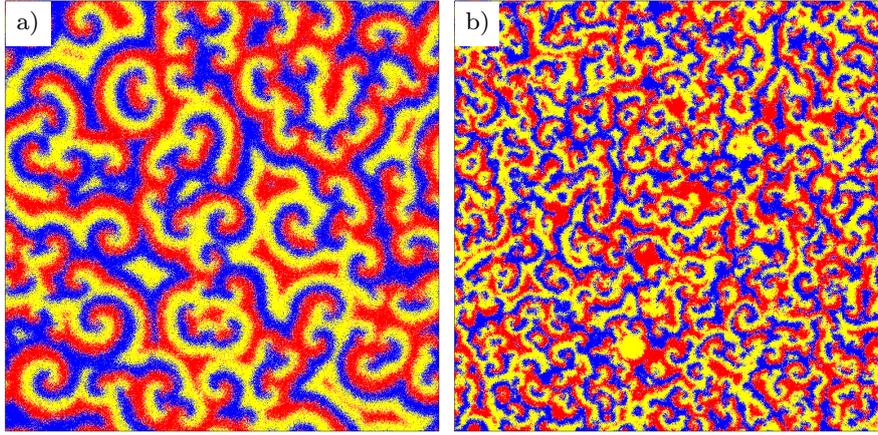


Figura 3.11: Exemplos da disposição das três espécies na rede. Aqui fica evidente que a mudança na mobilidade gera espirais de tamanhos diferentes. Foram realizadas 6000 gerações em rede com  $L = 1000$ . As mobilidades adotadas são a)  $m = 0,9$  e b)  $m = 0,4$ .

### 3.2.2 Comparação via comprimento característico

Na Figura 3.12 temos a função de autocorrelação para o modelo RPS após 6000 gerações em rede quadrada com  $L = 10000$  e  $m = 0,6$ . Desta forma podemos definir o comprimento característico ( $\ell$ ) como o valor do raio que a função de autocorrelação possui quando  $c(r) = 0,15$ . Por exemplo, no caso da Figura 3.12 a mobilidade é  $m = 0,6$  e o valor do comprimento característico é  $\ell = 14,1451$ . Assim, de forma análoga, podemos obter todos os valores de  $\ell$  para as demais mobilidades.

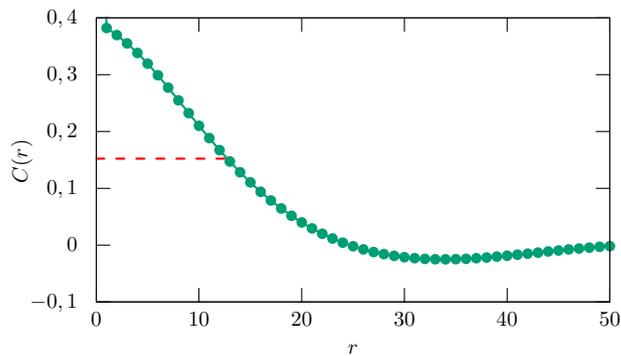


Figura 3.12: Autocorrelação de uma simulação do sistema RPS após 6000 gerações em rede quadrada com  $L = 10000$  e  $m = 0.6$ . A linha tracejada em vermelho indica o comprimento característico medido a partir de  $C(r) = 0.15$ , neste caso  $\ell = 14,1451$ .

A Figura 3.13 mostra as curvas das funções de autocorrelação para diversos valores da mobilidade. No modelo RPS a mobilidade pequena produz espirais pequenas e o contorno de suas fronteiras entre domínios de espécies são bem evidentes devido ao número reduzido de sítios vazios, a medida que a mobilidade aumenta as espirais

também aumentam e o número de vazios cresce, tornando a fronteira entre os domínios das espécies mais difusa, estas características explicam o comportamento das funções de autocorrelação exposto na Figura 3.13. É evidente que existe um ponto de intersecção entre as curvas, este ponto existe devido à densidade de vazios. Na Figura 3.14 vemos que a densidade de vazios difere para cada  $m$ . Quando medimos a função de autocorrelação para os valores grandes de mobilidade e pequenos raios, a presença maior de vazios faz com que a função de autocorrelação fique menor se comparada à função de autocorrelação com valores pequenos de mobilidade e raio, que por sua vez, apresenta menor densidade de vazios na rede. A medida que aumentamos o raio de comparação na função de autocorrelação, observamos que a influência do tamanho da espiral é mais relevante para manter o valor da função de autocorrelação alto do que a densidade de vazios. O ponto de intersecção é o ponto em que a influência do tamanho das espirais se torna maior que a dos vazios presentes na rede. Para o cálculo de  $\ell$  foi considerado  $C_r = 1,5$ , que foi considerado baixo o suficiente para a influência dos sítios vazios ser pequena em relação ao tamanho das espirais em si. A Figura 3.15 expõe os valores calculados de  $\ell$ . Nela fica claro que  $\ell$  tem um comportamento linear para  $0 < m < 0,6$  e um comportamento explosivo acima deste valor.

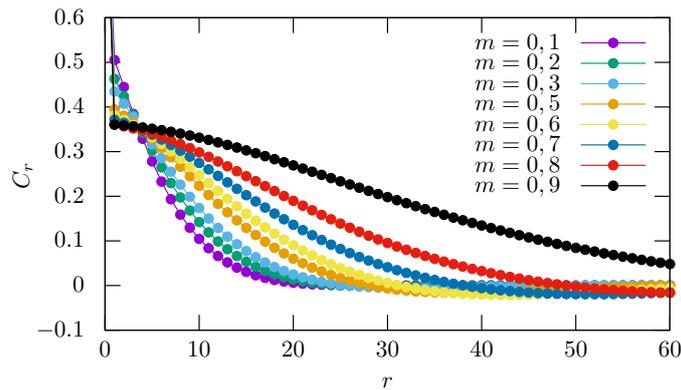


Figura 3.13: Funções de autocorrelação do sistema RPS para vários valores de mobilidade após 6000 gerações em rede quadrada com  $L = 10000$ . As curvas possuem um ponto de intersecção em  $r = 4$ , à esquerda deste ponto a densidade de vazios é o fator preponderante para diminuir as funções de autocorrelação com mobilidades mais altas, favorecendo as de mobilidades mais baixas, à direita de  $r = 4$ , o tamanho dos domínios descritos pelas espécies na rede passa a ser o fator dominante na preservação dos valores elevados das funções de autocorrelação.

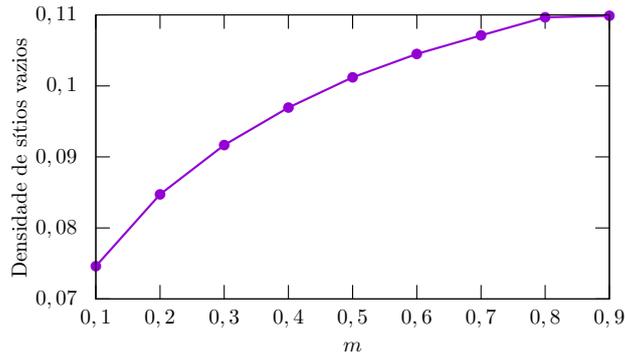


Figura 3.14: Densidade de vazios do sistema RPS em função de  $m$  com  $L = 10000$  e  $t = 3000$ . Notemos que a densidade de vazios aumenta em relação a mobilidade, o que explica o ponto de intersecção na Figura 3.13.

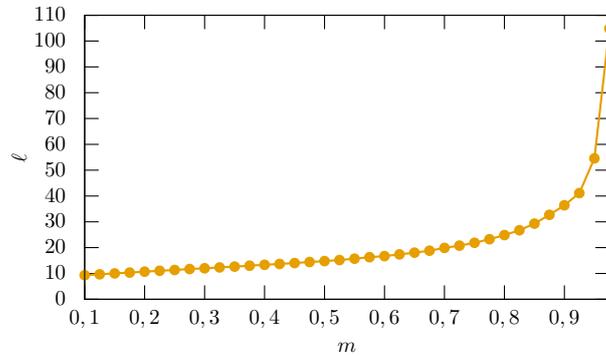


Figura 3.15: Comprimento característico da função da autocorrelação do sistema RPS. Dados obtidos considerando  $C(r) = 0,15$ , a partir de simulações com  $L = 10000$  e  $t = 6000$  gerações. O comportamento explosivo acima de  $m = 0,9$  condiz com o comportamento do tamanho das espirais observados qualitativamente.

### 3.2.3 Comparação via largura característica de percolação

Para quantificarmos a relação entre o tamanho das espirais e a probabilidade de percolação, desenvolvemos uma técnica que consiste em alterar a relação do tamanho da espiral com o tamanho da rede e observar a dependência da percolação diante desta alteração. Para tal, primeiramente fazemos uma simulação do modelo RPS em rede quadrada com  $L = 500$ . Após 1000 gerações, é feito um teste de percolação vertical na rede. Se o teste não indicar percolação de nenhum domínio, retira-se a última coluna e a última linha da rede e repete-se o teste de percolação com a rede menor. Se o teste novamente não indicar percolação, retira-se novamente a última coluna e a última linha, deixando a rede ainda menor. Repete-se este processo até o teste de percolação ser positivo. Quando isso ocorre, o tamanho da rede indica a largura de percolação. Obtivemos a média deste valor após 10000 simulações. A essa média demos o nome de largura característica de percolação

( $\mathcal{L}$ ). Em seguida, aplicamos essa técnica para vários valores de mobilidade ( $m$ ) com o intuito de encontrar a relação entre  $\mathcal{L}$  e  $m$ . Os valores de  $\mathcal{L}$  estão expostos na Figura 3.16.a. A semelhança entre  $\mathcal{L}$  e  $\ell$ , exposta na Figura 3.16.b, se resume no comportamento sempre crescente em relação ao aumento da mobilidade, indicando que o aumento do tamanho médio das espirais realmente aumenta a probabilidade de percolação da rede. No entanto, a técnica desenvolvida para calcular  $\mathcal{L}$  tem uma vantagem em relação ao  $\ell$  que é a não influência dos vazios internos nos domínios das espécies na rede para o cálculo do tamanho da espiral. Estes vazios contribuem para a redução da função de autocorrelação, que por sua vez afeta o cálculo do  $\ell$ , diminuindo-o. Como  $\mathcal{L}$  faz uso apenas da percolação, o importante para o cálculo é o alcance do domínio e não se na região interna dele há vazios presentes.

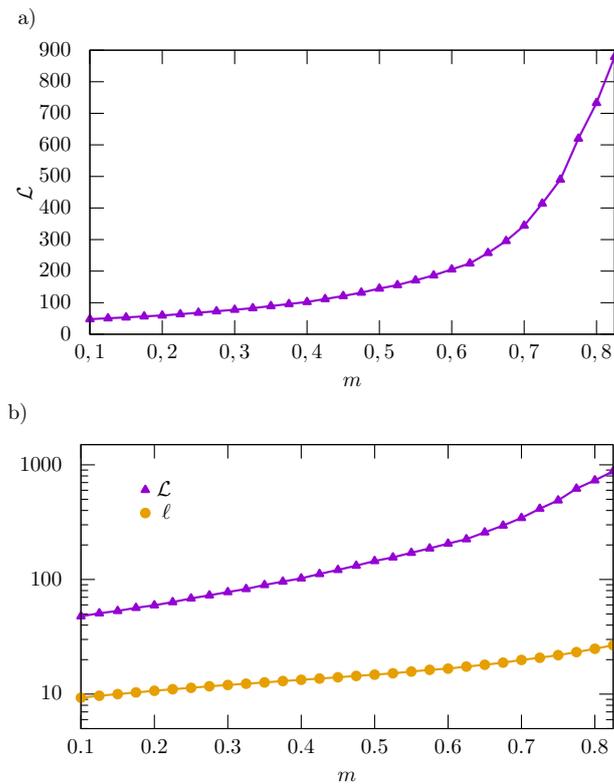


Figura 3.16: a) Largura característica de percolação ( $\mathcal{L}$ ) do sistema RPS. Obtidas a partir de 10000 simulações com  $L = 2000$  e 1000 gerações para cada ponto do gráfico. O intervalo de mobilidade vai até 0,825 por limitação no tamanho da rede. Como o tamanho é  $L = 2000$ , a medida de  $\mathcal{L}$  é comprometida para valores maiores de  $m$ . b) Comparação entre  $\mathcal{L}$  e  $\ell$  em escala logarítmica. Notem que o comportamento é semelhante com a diferença de uma ordem de grandeza.

### 3.2.4 Comparação via densidade de espirais

Há ainda outra forma de estimar o tamanho das espirais. No Capítulo 2 demonstramos a metodologia de cálculo para se estimar a densidade de espirais na rede. Na Figura 3.17 temos um exemplo de rede em que foi aplicada a metodologia para

a estimativa da densidade de espirais na rede. Note que, ao aplicarmos a metodologia, foi gerada uma nova rede para representar as regiões consideradas centros de espirais. Usando um código de programação em  $c^{++}$ , foi contado quantos domínios essa nova rede apresenta e conseqüentemente quantas espirais a rede original possui. Para realizar este cálculo, foi assumido que o raio utilizado para se calcular o parâmetro de ordem é igual ao comprimento característico ( $\ell$ ) apresentado pelo modelo RPS clássico. O próximo passo para encontrar a estimativa do tamanho das espirais é reescrever a Equação (2.7) na forma

$$\frac{1}{\rho_{esp}} = \frac{L^2}{N_{esp}}. \quad (3.1)$$

É relevante lembrar que  $L^2$  é igual à área ocupada pela rede. Quando a dividimos pelo número de espirais, obtém-se a área aproximada que cada espiral ocupa em média,

$$\langle a_{esp} \rangle \approx \frac{L^2}{N_{esp}}. \quad (3.2)$$

Aqui estamos considerando que todo sítio na rede pertence a alguma espiral. Se considerarmos que toda espiral tem aproximadamente o formato de um círculo podemos expressar a área da espiral como:

$$\langle a_{esp} \rangle \approx \pi(r_{esp})^2. \quad (3.3)$$

Em que  $r_{esp}$  é o tamanho aproximado do raio das espirais. Substituindo a Equação (3.3) na (3.2) e isolando o raio, temos:

$$r_{esp} \approx \frac{L}{\sqrt{\pi N_{esp}}}. \quad (3.4)$$

Que nos proporciona uma forma de quantificar o tamanho da espiral. A Figura 3.18.a mostra o  $\langle r_{esp} \rangle$  calculado para alguns valores de  $m$  a partir da Equação 3.4.

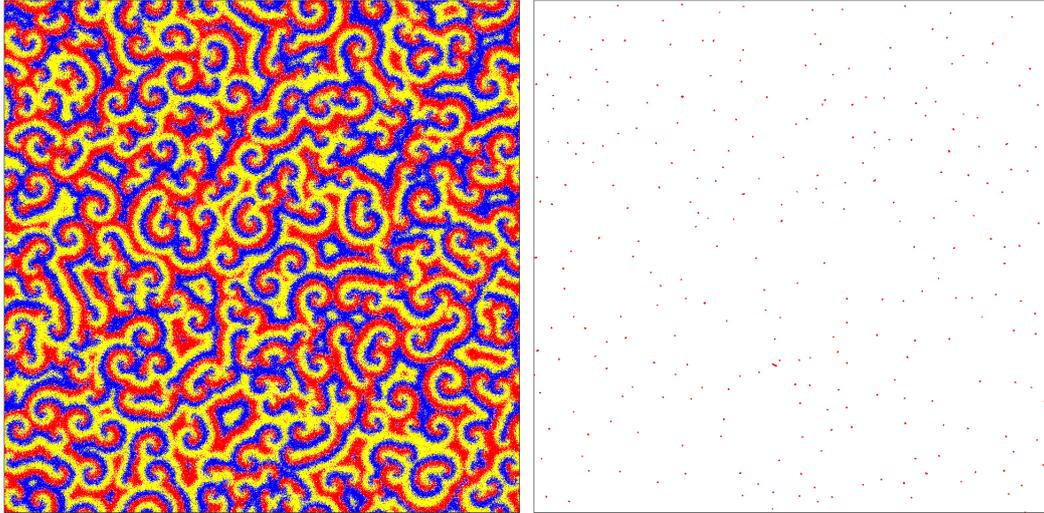


Figura 3.17: À esquerda é mostrada a distribuição das três espécies na rede passadas 5000 gerações no modelo RPS clássico.  $L = 2000$  e  $m = 0,7$ . À direita é mostrada as regiões em que  $S_j < S_c$ , com  $S_c = 0,15$ . Note que cada mancha vermelha na imagem à direita representa a região central de uma espiral.

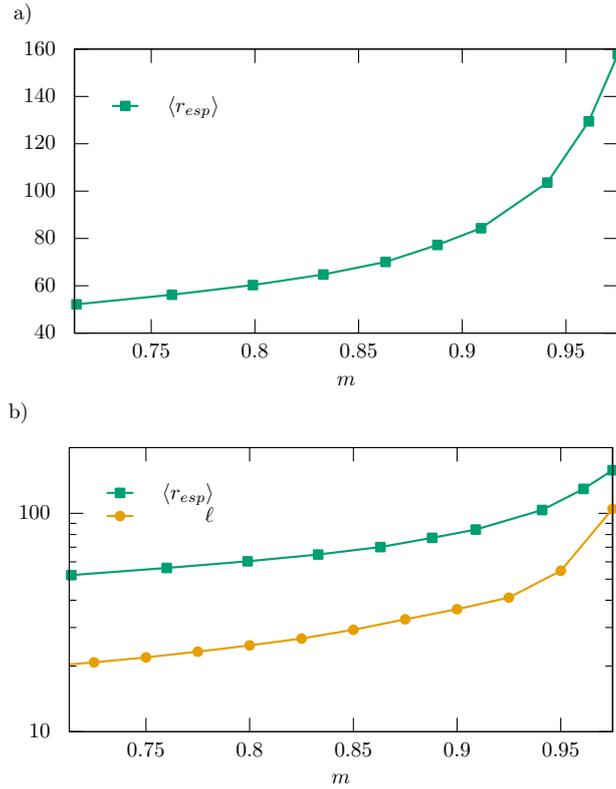


Figura 3.18: a) Raio estimado das espirais pelo método de contagem de espirais. b) Comparação entre o  $\langle r_{esp} \rangle$  e o  $l$  em escala logarítmica. Para a confecção da curva de  $\langle r_{esp} \rangle$  foram realizadas simulações do modelo RPS Clássico com  $L = 1000$  e capturada a última disposição na rede após 3000 gerações. De posse desta distribuição na rede, usou-se o modelo descrito na Seção 1.8 para estimar o número de espirais ( $N_{esp}$ ) e usando este valor na Equação (3.4) obter-se-á o valor de  $r_{esp}$ . Para o cálculo de  $\langle r_{esp} \rangle$  foram realizadas 100 simulações para cada ponto.

Como podemos ver na Figura 3.18.b, a semelhança entre as curvas  $l$  e  $r_{esp}$  é alta. Ambas crescem exponencialmente até  $m \approx 0,9$  e intensificam ainda mais seu crescimento após este valor, fornecendo um forte indício de que a metodologia do cálculo de  $r_{esp}$  é eficaz como parâmetro de estimativa do tamanho das espirais presentes na rede. No presente trabalho não foram realizadas simulações para estimativa de  $r_{esp}$  com  $m < 0,7$ , pois para estes valores as espirais eram demasiadamente pequenas e devido a isto os braços das espirais são estreitos causando a incidência de falsos positivos, o que se mostrou um empecilho relevante no cálculo das densidades do número de espirais na rede.

### 3.3 Supercompetidores em RPS

A literatura tem demonstrado que o aumento da mobilidade no modelo de RPS em rede prejudica a biodiversidade [49]. Nesta seção serão expostos os nossos resultados relacionados ao modelo RPS com espécies apresentando a característica de

supercompetição. Chamaremos o modelo com uma espécie dotada desta capacidade de SC-A, o modelo com duas espécies de SC-AB e o modelo com todas as espécies sendo supercompetidoras de SC-ABC.

A Figura 3.19 mostra os resultados dos quatro modelos diferentes em função de  $M$ . Lembrando que  $M$  é definido na equação (2.6) como:  $M = \frac{m}{L^2(1-m)}$ , em que  $L$  é a largura da rede e  $m$  a mobilidade.  $M$  é definido desta forma para que os resultados pouco dependam do tamanho da rede [49, 50]. Note que a Figura 3.19 mostra a probabilidade do fim da coexistência entre as espécies. O primeiro modelo denotamos como Clássico (representado pelos quadrados sólidos roxos), que consiste em simulações do modelo RPS em rede sem supercompetição. Em verde temos o modelo SC-A, cuja espécie 1 é a espécie supercompetidora, em azul-claro vemos o resultado para o modelo SC-AB, em que as espécies 1 e 2 são as supercompetidoras e em amarelo está exposto o resultado do modelo SC-ABC. Como podemos perceber, os modelos com a maior estabilidade da biodiversidade são os SC-ABC e clássico, justamente os modelos em que todas as espécies são simétricas no que tange ao mecanismo de competição. Para os modelos SC-A e SC-B a desigualdade na forma da competição promoveu uma intolerância maior da coexistência para mobilidades grandes. Ou seja, podemos concluir que a falta de simetria no sistema de competição é o principal fator para a instabilidade da coexistência entre as espécies. É importante notar que na comparação entre os modelos Clássico e SC-ABC, a biodiversidade demonstrou maior resiliência no segundo, o que parece contraintuitivo em um primeiro momento, afinal seria natural imaginar que uma competição mais agressiva resultaria em um modelo mais propenso às extinções, mas uma possível causa para esta estabilidade extra seria justamente uma maior densidade de vazios, como veremos mais adiante.

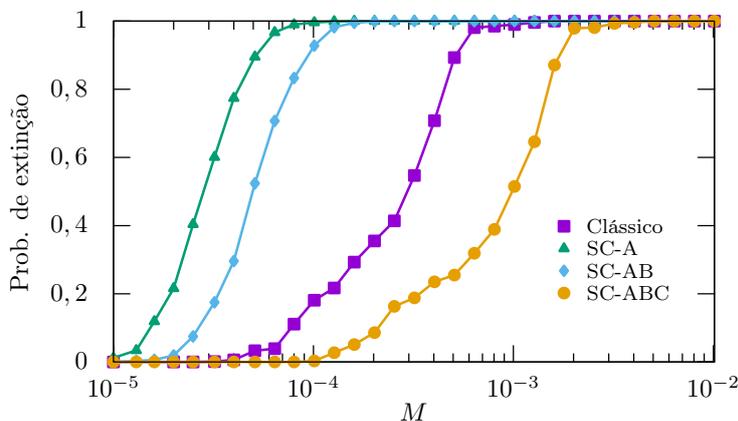


Figura 3.19: Probabilidade de extinção em função de  $M$ . Para cada ponto foram realizadas 1000 simulações com  $t = L^2$  gerações em rede quadrada de largura  $L = 125$ . É notório no gráfico que os modelos SC-ABC e clássico, ambos possuindo simetria na competição, são os que conservaram a biodiversidade para mobilidades mais altas em comparação com os modelos SC-A e SC-AB.

Na Figura 3.20 nota-se que as espirais mais evidentes se formam no modelo RPS Clássico, enquanto nos demais as mesmas ficam menos evidentes. É possível

notar que nos modelos SP-A e SP-AB a concentração de espécie 3 é maior que as demais espécies, portanto, não ser supercompetidor parece oferecer vantagem para esta espécie. Este fato pode estar relacionado com a concentração baixa da espécie 2 devido à espécie 1 ser supercompetidora, o que deixa a espécie 3 menos suscetível à ação de eliminação. No modelo SP-ABC nota-se o equilíbrio das concentrações das espécies, semelhante ao modelo RPS Clássico, porém em uma distribuição mais caótica, com a formação das espirais menos evidentes.

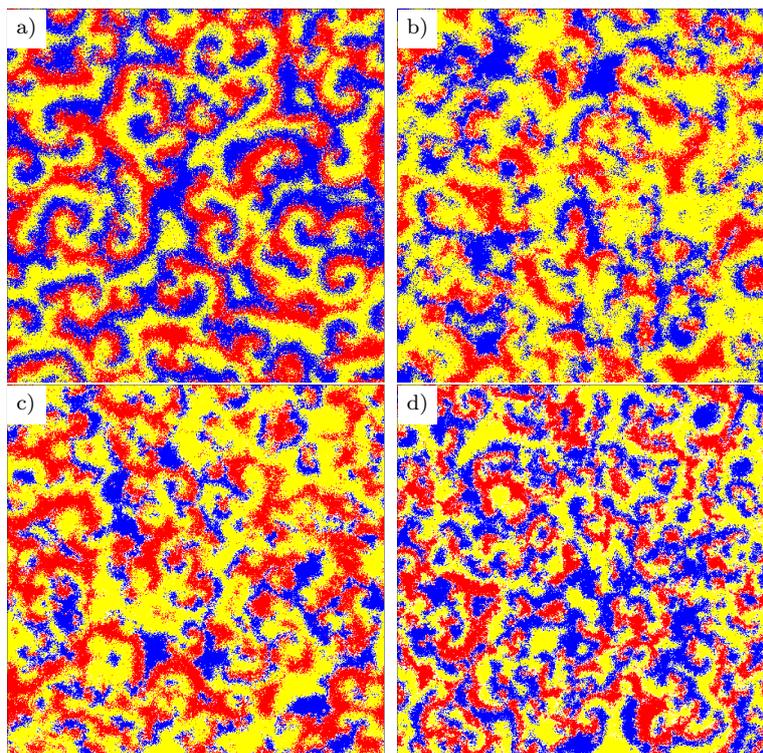


Figura 3.20: Disposição das três espécies em rede representando os modelos a) com competição clássica, b) SC-A, com a espécie 1 (vermelha) dotada da supercompetição, c) SC-AB, com as espécies 1 (vermelha) e 2 (azul) no papel de supercompetidoras e d) SC-ABC, com todas as espécies realizando a supercompetição. Estas redes foram geradas após 2000 gerações com  $L = 250$  e  $M = 10^{-5}$ . Note que apenas em a) a presença das espirais são claramente notáveis. Em a) as três espécies ocupam uma quantidade de sítios semelhantes, em b) e c) a espécie 3 (amarela) é mais abundante e em d) as três espécies voltam a ter concentrações semelhantes entre elas.

Na Figura 3.21 vemos as concentrações de cada espécie nos quatro modelos. Nela podemos perceber a causa dos modelos simétricos apresentarem maior estabilidade na biodiversidade. Nas primeiras gerações os modelos SC-A e SC-AB apresentam oscilações de grande amplitude, o que pode levar uma das espécies facilmente a extinção, nos modelos Clássico e SC-ABC a pequena amplitude de oscilação se faz presente desde as primeiras gerações, dificultando a extinção de qualquer uma delas. Além disso, a Figura 3.22 mostra que a concentração média das espécies é diferentes nos modelos assimétricos, com isso a espécie mais prejudicada fica oscilando em

torno de um ponto médio mais baixo que as demais, o que aumenta a probabilidade de extinção da mesma. Nos modelos simétricos, não há motivos para a concentração média ser diferente entre as espécies, o que resulta em oscilações mais afastadas dos valores muito pequenos e assim mantendo baixa a probabilidade de extinção. Na Figura 3.22 também podemos notar que a concentração de vazios no modelo Clássico é cerca de 10%, bem menor que no modelo SC-ABC, que é de 20%. Sabendo que o segundo apresentou maior faixa de biodiversidade em função de  $M$ , podemos inferir que o aumento da densidade de vazios aumentou a distância média entre os indivíduos nas fronteiras dos domínios entre as espécies, tornando a característica de supercompetição subutilizada, o que pode ter contrabalanceado o aumento de  $M$  fazendo o modelo SC-ABC ter a probabilidade de coexistência maior que o modelo Clássico ao longo dos valores de  $M$ . Se compararmos os modelos SC-A com SC-AB também notamos que os vazios aumentam com o número de supercompetidores, e em paralelo a isso vemos na Figura 3.19 que o modelo SC-AB tem maior faixa de coexistência entre as espécies, novamente os vazios parecem ser a origem desta estabilidade maior mesmo tendo aumentado o número de supercompetidores. Ou seja, a maior causa para uma faixa de coexistência maior é a simetria dos mecanismos de competição e a segunda maior causa parece ser a densidade de vazios que geralmente se concentram nas fronteiras e atuam como um separador de domínios.

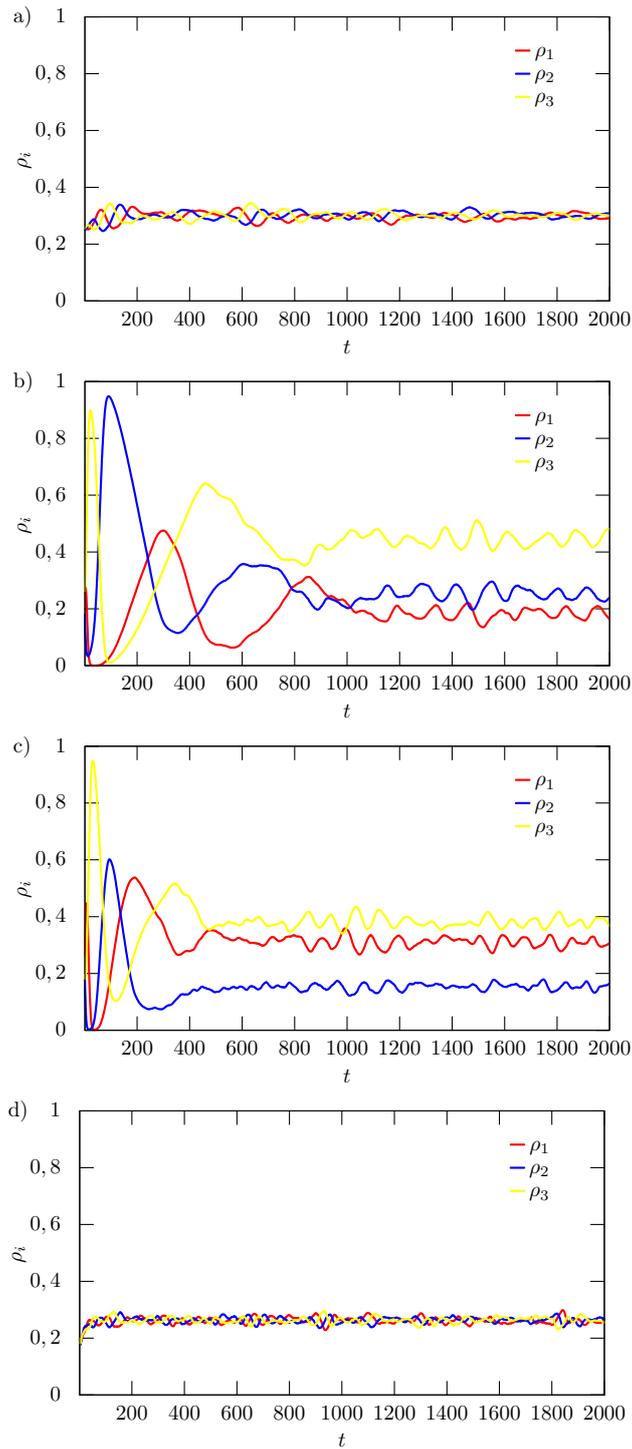


Figura 3.21: Gráfico das concentrações das espécies obtidas em rede com  $L = 250$  e  $M = 10^{-5}$ . A Figura a) representa as concentrações das espécies do modelo Clássico, em que não há supercompetidores; b) representa as concentrações das espécies do modelo SC-A, em que a espécie vermelha ( $\rho_1$ ) é um supercompetidor; c) representa as concentrações das espécies do modelo SC-AB, em que as espécies vermelha ( $\rho_1$ ) e azul ( $\rho_2$ ) são supercompetidoras; d) representa as concentrações das espécies do modelo SC-ABC, neste as três espécies são supercompetidoras. A pequena amplitude de oscilação em a) e d) indica que nestes modelos, que são dotados de simetria entre as espécies, a biodiversidade é mais estável.

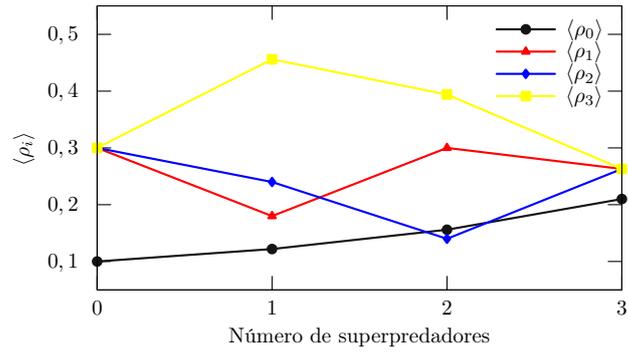


Figura 3.22: Concentração média das espécies na rede em função do número de supercompetidores após 2000 gerações, com  $L = 250$  e  $M = 10^{-5}$ .  $\langle \rho_0 \rangle$  representa a densidade de vazios na rede.

A Figura 3.23 mostra os valores obtidos para a função de autocorrelação das espécies na rede. Como a autocorrelação está atrelada ao tamanho dos domínios e na Figura 3.20 podemos ver de forma qualitativa que o modelo SP-ABC apresenta os menores domínios, é evidente que o modelo com três supercompetidores destaca-se como o modelo com menor valor em sua função de autocorrelação. Nos demais modelos a função de correlação tem valores parecidos entre eles, no entanto, podemos notar que o tamanho médio desses aglomerados são maiores que no modelo SC-ABC, o que contribui para a diminuição da biodiversidade, pois o tamanho da rede é limitado e domínios maiores aumentam a probabilidade de toda a rede ser tomada por uma única espécie.

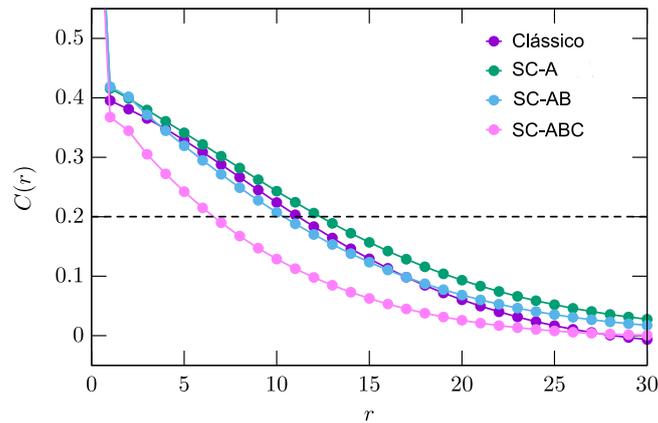


Figura 3.23: Autocorrelação espacial calculada a partir de uma simulação com  $L = 8000$ ,  $t = 5000$  e  $M = 10^{-5}$ .

A Figura 3.24 mostra o resultado da transformada de Fourier para os quatro modelos estudados. Nesta figura, fica evidente que a simetria apresentada nos modelos SC-ABC e Clássico também acarreta na simetria de comportamento da transfor-

mada de Fourier. Além disso, a frequência característica de oscilação das concentrações médias das espécies cresce em relação ao número de espécies supercompetidoras. Isto fica mais evidente na Figura 3.25, ou seja, o aumento da quantidade de espécies supercompetidoras intensifica as frequências de oscilação das densidades médias na rede. Para os modelos SC-A e SC-AB vemos que, apesar da assimetria dos modelos, as frequências características são coincidentes para as três espécies, mostrando a interdependência entre elas. No entanto, isto não significa que as concentrações sejam as mesmas. No modelo SC-A a Figura 3.21.b nos mostra que a espécie supercompetidora, em vermelho, é justamente a espécie com menor densidade. Em modelos cíclicos, é comum que uma espécie que aparentemente possui características aperfeiçoadas em relação às demais tenha sua população diminuída. Isto ocorre porque o aumento da eficiência na competição acarreta na diminuição da densidade média da sua espécie alvo da competição na rede, mas, pelo caráter de competição cíclica, esta é justamente a competidora da espécie responsável por eliminá-lo. Na Figura 3.21.c as duas espécies supercompetidoras apresentam densidade inferior à espécie 3. Neste cenário, comparando o modelo SC-AB com o modelo SC-A, a espécie 2, por ser supercompetidora, acaba diminuindo a concentração da espécie 3, o que por sua vez favorece a espécie 1, que é competidora da espécie 2.

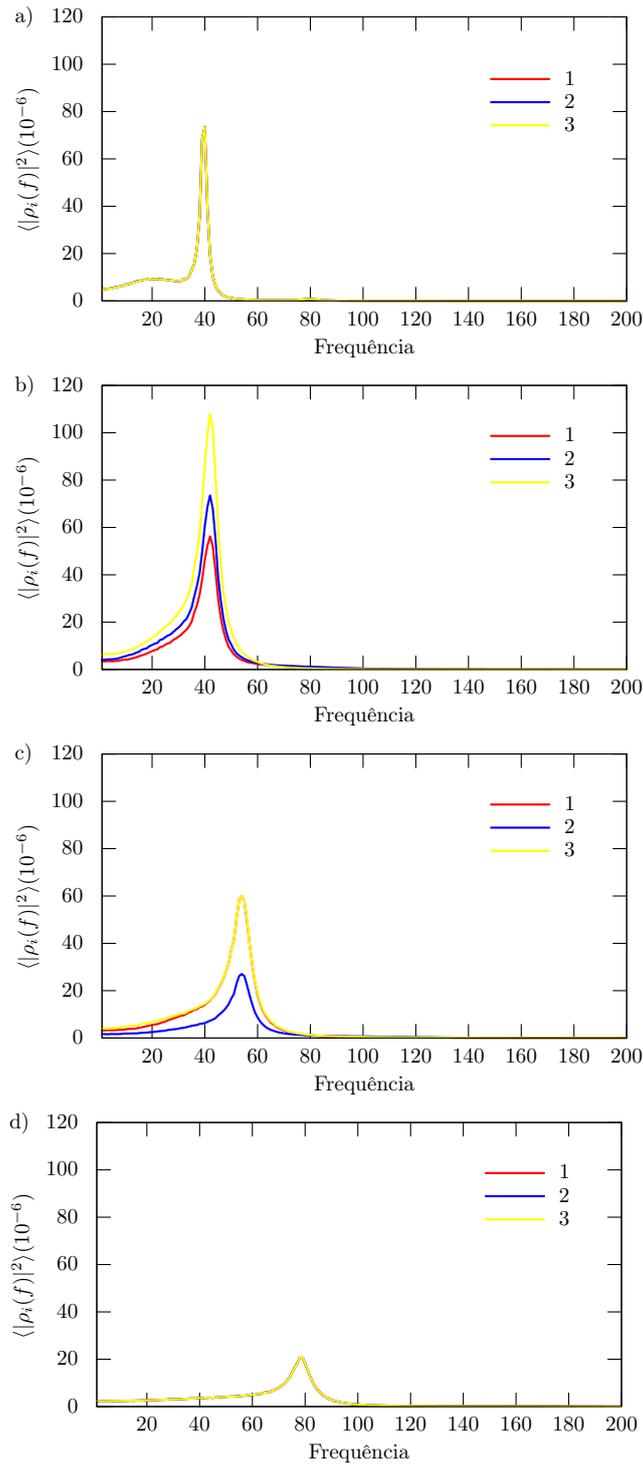


Figura 3.24: Médias das transformadas de Fourier para  $m = 0, 5$  em rede com  $L = 500$  e médias retiradas de 5000 simulações com 10000 gerações cada, em que as 5000 primeiras gerações são descartadas. A Figura a) mostra os valores da transformada para o modelo RPS sem supercompetidores; a Figura b) para o modelo SC-A; a Figura c) para o modelo SC-AB e a Figura d) para o modelo SC-ABC.

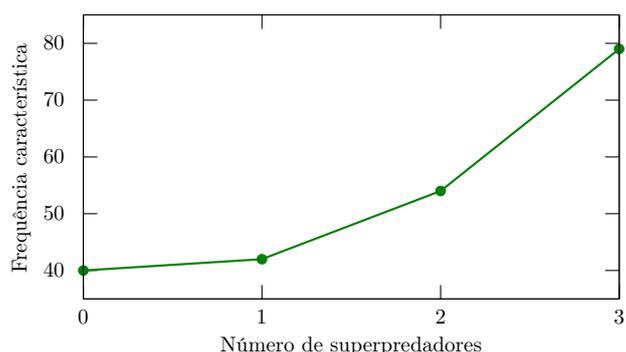


Figura 3.25: Frequência característica em função do número de espécies supercompetidoras.

Na seção seguinte veremos as diferenças entre o Modelo de Supercompetição (SC) e o Modelo de Super-reprodução (SR).

### 3.4 Super-reprodutores em RPS

Nesta seção estão expostos os nossos resultados relacionados ao modelo RPS com espécies apresentando a característica de super-reprodução. Chamaremos o modelo com uma espécie dotada desta capacidade de SR-A, o modelo com duas espécies de SR-AB e o modelo com todas as espécies sendo super-reprodutoras de SR-ABC.

A Figura 3.26 mostra a probabilidade do fim da coexistência entre as espécies para os quatro modelos. O primeiro modelo é o Clássico (representado pelos quadrados sólidos roxos), que consiste em simulações do modelo RPS em rede sem super-reprodução. Em azul, temos o modelo SR-A, cuja espécie 1 é a espécie super-reprodutora. Em vermelho, vemos o resultado para o modelo SR-AB, em que as espécies 1 e 2 são as super-reprodutoras. Por fim, em preto, é mostrado o resultado do modelo SR-ABC. Como podemos perceber os modelos com a maior estabilidade da biodiversidade são os SR-ABC e clássico, justamente os modelos em que todas as espécies são simétricas no que tange ao mecanismo de reprodução. Para os modelos SR-A e SR-B a desigualdade na forma da reprodução promoveu uma intolerância maior da coexistência para mobilidades grandes. Não só isto, mas a introdução da super-reprodução prejudicou a probabilidade de coexistência de tal maneira que, mesmo para mobilidades baixas, o modelo SR-AB não apresentou uma região de plena biodiversidade. Ou seja, podemos reforçar a conclusão de que a falta de simetria no modelo é o principal fator para a instabilidade da coexistência entre as espécies. Na comparação entre os modelos Clássico e SC-ABC a biodiversidade se comportou de modo muito semelhante entre eles, ou seja, desde que o modelo continue simétrico, a adição da característica de super-reprodução não parece ter muita influência na biodiversidade.

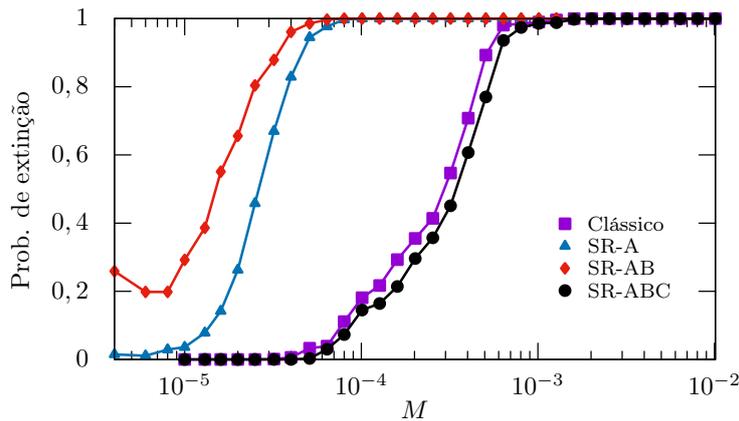


Figura 3.26: Probabilidade de extinção em função de  $M$ . Para cada ponto foram realizadas 1000 simulações com  $t = L^2$  gerações em rede quadrada de largura  $L = 125$ . É notório no gráfico que as curvas dos modelos SR-ABC e clássico, ambos possuindo simetria na competição, são os que conservaram a biodiversidade para mobilidade mais alta em comparação com os modelos SR-A e SR-AB.

Na Figura 3.27 estão expostas imagens da rede após 2000 gerações para os quatro modelos. As quatro primeiras imagens foram feitas com  $M = 10^{-6}$ , cujo valor permite a coexistência das três espécies nos quatro modelos. Na Figura 3.27.a vemos uma distribuição igualitária das espécies. O valor baixo da mobilidade dificulta a identificação das espirais. Na Figura 3.27.b vemos que a espécie 3 (amarela) se sobressai na ocupação da rede no modelo SR-A. Na Figura 3.27.c a espécie 1 (vermelha) é quem ocupa o maior número de sítios no modelo SR-AB e na Figura 3.27.d as concentrações voltam a ser igualitárias no modelo SR-ABC. Nas Figuras 3.27.e e 3.27.f escolhemos um valor de  $M = 10^{-5}$  para mostrarmos que tanto no modelo Clássico como no modelo SR-ABC há a formação de espirais na rede, mostrando mais uma vez que se mantida a simetria a modificação feita no mecanismo de reprodução não surtiu muita diferença entre estes dois modelos.

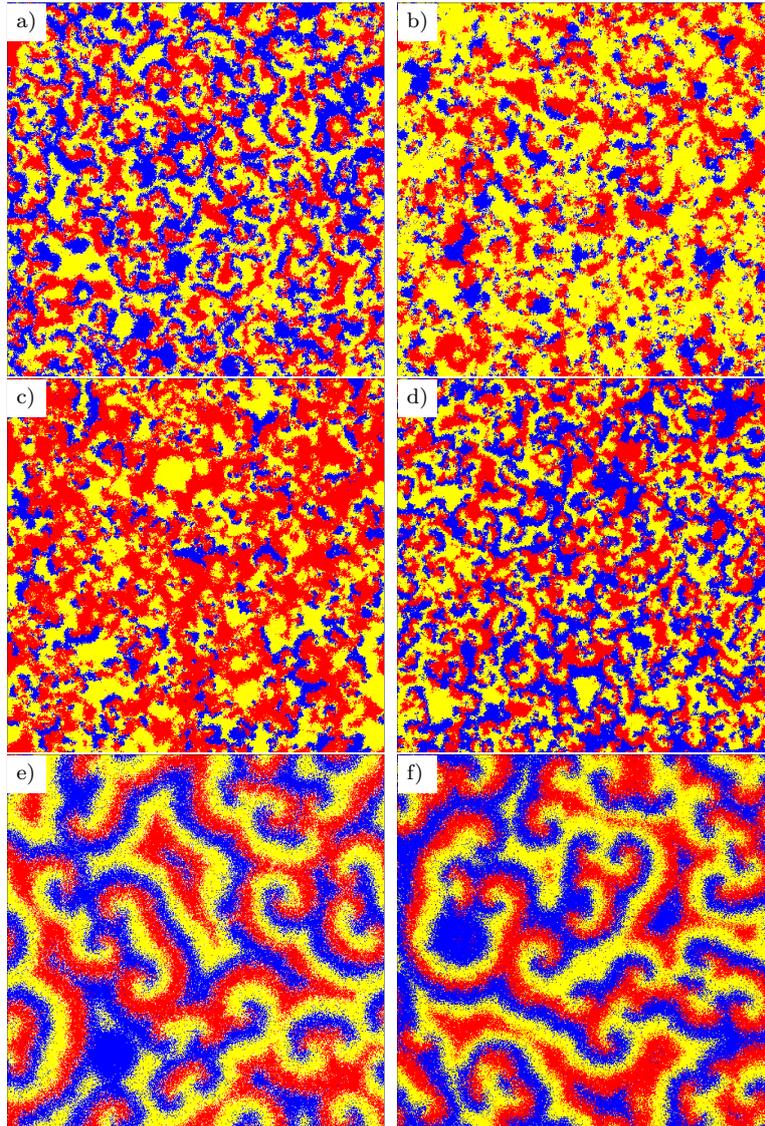


Figura 3.27: Disposição das três espécies em rede representando os modelos a) RPS clássico, b) com a espécie 1 (vermelha) dotada da super-reprodução (SR-A), c) com as espécies 1 (vermelha) e 2 (azul) dotadas da super-reprodução (SR-AB) e d) com todas as espécies dotadas da super-reprodução (SR-ABC). Estas redes foram geradas após 2000 gerações com  $L = 500$  e  $M = 10^{-6}$ . Em a) as três espécies ocupam uma quantidade de sítios semelhantes, em b) a espécie 3 é mais abundante seguida da 1, em c) a espécie 1 é mais abundante seguida da 3 e em d) as três espécies voltam a concentrações semelhantes entre elas. Na figura e) e f) temos os modelos clássico e SR-A respectivamente, porém com  $M = 10^{-5}$ , o que deixa claro que em ambos há a presença de espirais se a mobilidade é suficientemente grande.

Na Figura 3.28 vemos as concentrações de cada espécie nos quatro modelos. Nela podemos perceber novamente a causa dos modelos simétricos apresentarem maior estabilidade na biodiversidade. Nas primeiras gerações os modelos SR-A e SR-AB apresentam oscilações de grande amplitude, o que pode levar uma das

espécies facilmente a extinção, nos modelos Clássico e SR-ABC a pequena amplitude de oscilação se faz presente desde as primeiras gerações, dificultando a extinção de qualquer uma delas. Além disso, a Figura 3.29 mostra que a concentração média das espécies é diferentes nos modelos assimétricos, com isso a espécie mais prejudicada fica oscilando em torno de um ponto médio mais baixo que as demais, o que pode aumentar a probabilidade de extinção da mesma. Nos modelos simétricos não há motivos para a concentração média ser diferente entre as espécies, o que resulta em oscilações mais afastadas dos valores muito pequenos e assim mantendo baixa a probabilidade de extinção, além disso, vemos que as concentrações dos modelos SR-ABC e Clássico são muito semelhantes. Comparando os modelos SR-A, SR-AB e SR-ABC, a Figura 3.29 nos mostra que, ao contrário dos modelos SC os modelos SR apresentam a densidade de vazios decaindo em função do número de super-reprodutores. Isto é útil para entendermos o fato exposto na Figura 3.26 de que SR-A é mais estável na biodiversidade do que o modelo SR-AB. Novamente, entre os assimétricos, o modelo com maior densidade de vazios é o mais estável. Ou seja, a maior causa para uma faixa de coexistência extensa é a simetria dos mecanismos de reprodução e a segunda maior causa parece ser a densidade de vazios.

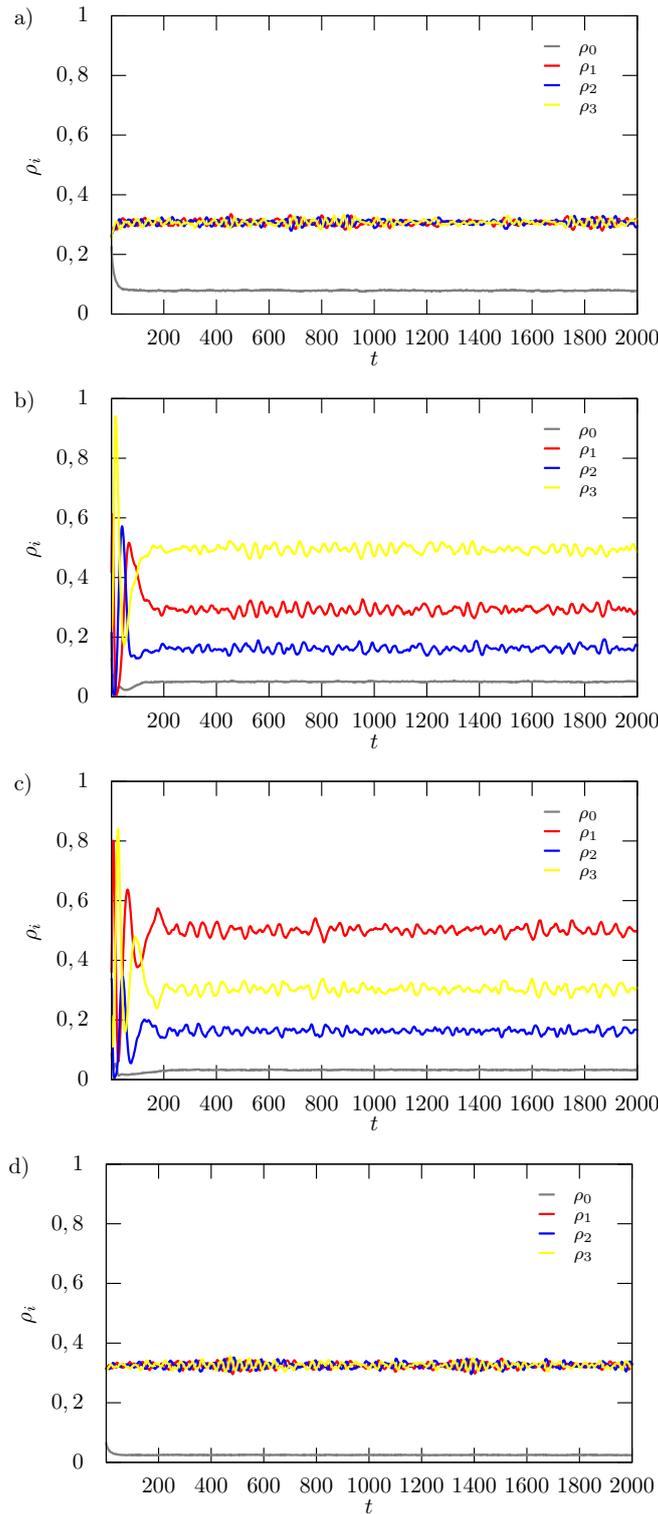


Figura 3.28: Gráfico das concentrações das espécies com  $L = 500$  e  $M = 10^{-6}$ . A figura a) representa as concentrações das espécies do modelo clássico, em que não há super-reprodutores; b) representa as concentrações das espécies do modelo SR-A, em que a espécie vermelha ( $\rho_1$ ) é um super-reprodutor; c) representa as concentrações das espécies do modelo SR-AB, em que as espécies vermelha ( $\rho_1$ ) e azul ( $\rho_2$ ) são super-reprodutoras; d) representa as concentrações das espécies do modelo SR-ABC, neste as três espécies são super-reprodutoras. A pequena amplitude de oscilação em a) e d) indica que nestes modelos, <sup>50</sup>dotados de simetria entre as espécies, a biodiversidade é mais estável.

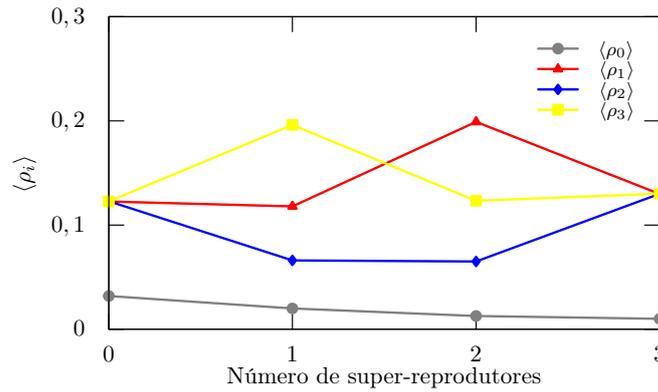


Figura 3.29: Concentração média das espécies na rede em função do número de super-reprodutores após 2000 gerações, com  $L = 500$  e  $M = 10^{-6}$ .  $\langle \rho_0 \rangle$  representa a densidade de vazios na rede.

Na Figura 3.30 estão expostos os valores da função de autocorrelação das espécies na rede para os modelos de super-reprodução. É interessante notar que para os vizinhos mais próximos ( $r$  pequeno) a curva SR-ABC se destaca, tendo o maior valor dos modelos. Isto se deve à quantidade baixa de vazios que ele apresenta e que pode ser verificado na Figura 3.29. No entanto, quando comparamos o modelo Clássico com o SR-ABC para  $r$  acima de 20, podemos constatar que os dois modelos são equivalentes. Neste caso, é possível levantar a hipótese de que a diferença entre estes dois modelos se resume à densidade de vazios. Isto porque a influência dos espaços vazios é pequena para raios grandes e grande para raios pequenos. Este fato reforça o que constatamos na Figura 3.27, os modelos Clássico e SR-ABC produzem praticamente os mesmos resultados. Nos modelos assimétricos a função de autocorrelação é maior que o modelo Clássico mesmo para  $r$  grande, o que indica que em média o tamanho dos domínios é maior que no modelo Clássico, o que contribui para a diminuição da biodiversidade, pois o tamanho da rede é limitado e domínios maiores aumentam a probabilidade de toda a rede ser tomada por uma única espécie. Por isso, os modelos Clássico e SR-ABC apresentam biodiversidade mais resiliente.

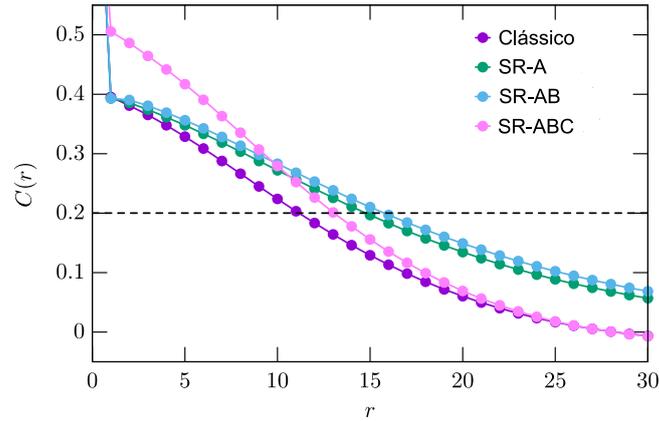


Figura 3.30: Função de autocorrelação dos modelos Clássico e SR após 6000 gerações, média de 1000 simulações. Aqui definimos  $L = 500$  e  $M = 8 \times 10^{-6}$ , o que significa que  $pm = 0.5$  e  $pc = pr = 0.25$ .

A Figura 3.31 mostra o resultado da transformada de Fourier para os quatro modelos comparados. Como esperado, fica evidente que a simetria apresentada nos modelos SR-ABC e Clássico também acarreta na simetria de comportamento das transformadas de Fourier das concentrações das três espécies. Além disso, a frequência característica de oscilação das concentrações médias das espécies cresce na comparação entre os modelos Clássico e SR-ABC. O que indica que as oscilações das concentrações são realizadas com maior frequência na rede, aceleradas pela super-reprodução. Nos modelos assimétricos, SR-A e SR-AB, a frequência característica foi reduzida em comparação com o modelo clássico. Aqui, diferente dos modelos com supercompetição, a assimetria não gerou uma frequência maior, mas sim uma redução. Além disso, apesar da assimetria dos modelos, a frequência característica é coincidente para as três espécies, mostrando que a interdependência entre elas é conservada. No entanto, isto não significa que as concentrações sejam as mesmas.

Por fim, de posse dos dados obtidos, podemos afirmar que tanto no modelo de supercompetição quanto no modelo de super-reprodução a característica preponderante que torna a biodiversidade mais resiliente é a simetria nos modelos.

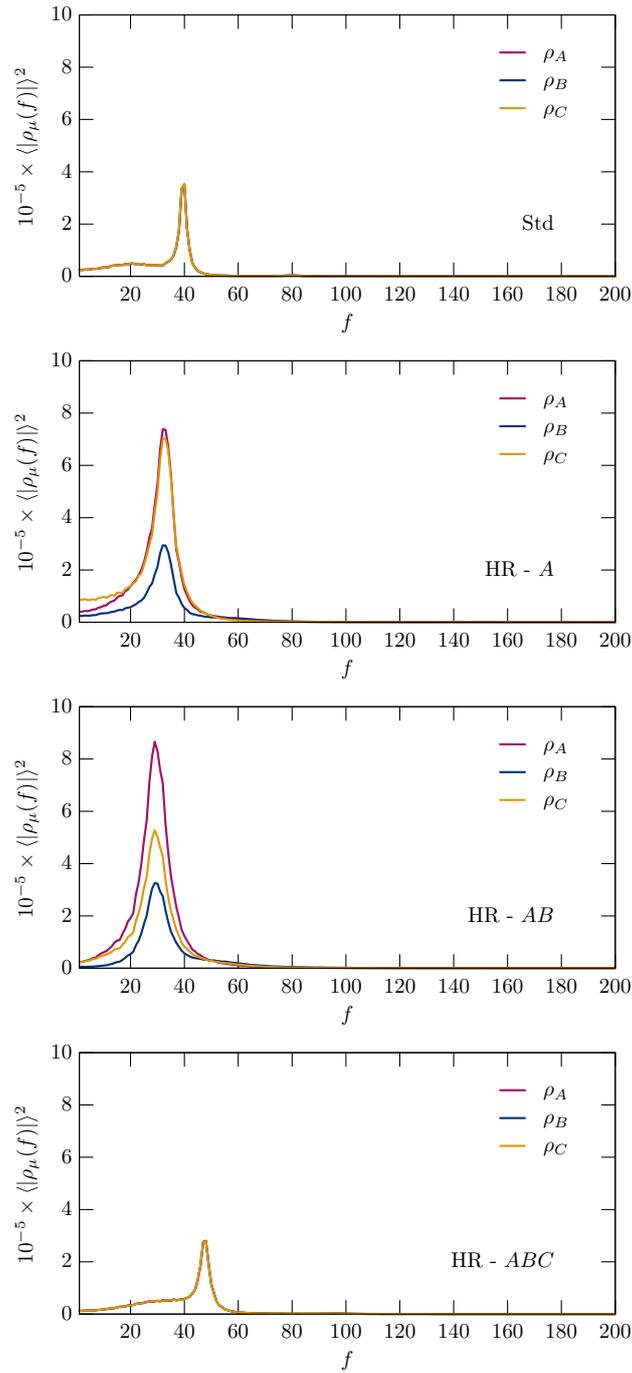


Figura 3.31: Espectro de potência dos modelos Clássico e SR, com média de 1000 simulações. Aqui definimos  $L = 500$  e  $M = 8 \times 10^{-6}$ , o que significa que  $pm = 0,5$  e  $pc = pr = 0,25$

# Capítulo 4

## Considerações finais

Nos resultados obtidos, fica evidenciado que a variação da mobilidade afeta as mudanças de fase no sistema acrescido de uma quarta espécie pestilenta. Ou seja, a diminuição da mobilidade acarreta redução da faixa de coexistência entre as espécies. Além disso, a presença da espécie pestilenta retira a característica cíclica da predação do sistema, de tal forma que as espirais formadas pelos domínios não se formam na presença da quarta espécie. Por fim, mostramos que a variação da mobilidade influencia a percolação do sistema, alterando sua concentração crítica de percolação.

Os resultados dos modelos com super-reprodutores e supercompetidores revelaram que a assimetria dos modelos é o principal causador da instabilidade da coexistência na rede. Além disso, foi demonstrado que o modelo em que todas as espécies são supercompetidoras é o mais estável estudado na tese, o que a princípio parece contraintuitivo; no entanto, essa estabilidade deve ser oriunda do aumento do espaçamento entre os domínios devido ao aumento dos sítios vazios na rede causados pela predação mais agressiva.

Por fim, mostramos que a Largura característica de percolação é eficaz para medir o tamanho médio das espirais formadas no modelo Clássico, bem como o cálculo do raio esperado, levando em consideração a comparação entre essas curvas e o comprimento característico da função de autocorrelação, geralmente utilizada na literatura para este fim. No entanto, tanto a Largura característica de percolação como o raio esperado não são prejudicados pelos vazios na rede como o comprimento característico. Em especial, a curva do raio esperado reflete melhor o comportamento do tamanho das espirais na rede. Dentre as possibilidades de ramificações do trabalho executado até aqui, há a possibilidade de calcular a variação da densidade de espirais em relação à variação da mobilidade, pois acreditamos que haja uma lei de potências que rege a interação entre essas variáveis.

# Referências Bibliográficas

- [1] P. Vorzimmer, “Darwin, malthus, and the theory of natural selection,” *Journal of the History of Ideas*, vol. 30, no. 4, pp. 527–542, 1969.
- [2] A. Lotka-Volterra, “Elements of physical biology,” *Nature*, vol. 116, 1925.
- [3] V. Volterra, “Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically,” *Nature*, vol. 118, no. 2972, pp. 558–560, 1926.
- [4] J. B. Calhoun, “Population density and social pathology,” *Scientific American*, vol. 206, no. 2, pp. 139–149, 1962.
- [5] N. Metropolis *et al.*, “The beginning of the monte carlo method,” *Los Alamos Science*, vol. 15, no. 584, pp. 125–130, 1987.
- [6] P. A. W. Lewis, A. S. Goodman, and J. M. Miller, “A pseudo-random number generator for the system/360,” *IBM Systems Journal*, vol. 8, no. 2, pp. 136–146, 1969.
- [7] D. Raeside, “Monte carlo principles and applications,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 21, no. 2, p. 181, 1976.
- [8] J. E. Satulovsky and T. Tomé, “Stochastic lattice gas model for a predator-prey system,” *Physical Review E*, vol. 49, no. 6, p. 5073, 1994.
- [9] B. Sinervo and C. M. Lively, “The rock–paper–scissors game and the evolution of alternative male strategies,” *Nature*, vol. 380, no. 6571, pp. 240–243, 1996.
- [10] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998.
- [11] B. Kerr, M. A. Riley, M. W. Feldman, and B. J. M. Bohannan, “Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors,” *Nature*, vol. 418, pp. 171–174, jul 2002.
- [12] B. C. Kirkup and M. A. Riley, “Antibiotic-mediated antagonism leads to a bacterial game of rock–paper–scissors in vivo,” *Nature*, vol. 428, pp. 412–414, Mar. 2004.
- [13] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey, “Coexistence versus extinction in the stochastic cyclic lotka-volterra model,” *Phys. Rev. E*, vol. 74, p. 051907, Nov 2006.

- [14] G. Szabó and G. Fáth, “Evolutionary games on graphs,” *Physics Reports*, vol. 446, pp. 97–216, jul 2007.
- [15] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey, “Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock-paper-scissors games,” *Nature*, vol. 448, pp. 1046–1049, aug 2007.
- [16] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey, “Noise and correlations in a spatial population model with cyclic competition,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 238105, dec 2007.
- [17] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey, “Self-organization of mobile populations in cyclic competition,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 254, pp. 368–383, sep 2008.
- [18] E. Frey, “Evolutionary game theory: Theoretical concepts and applications to microbial communities,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, pp. 4265–4298, oct 2010.
- [19] Q. He, M. Mobilia, and U. C. Täuber, “Spatial rock-paper-scissors models with inhomogeneous reaction rates,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 051909, nov 2010.
- [20] Q. He, M. Mobilia, and U. C. Täuber, “Coexistence in the two-dimensional may-leonard model with random rates,” *The European Physical Journal B*, vol. 82, pp. 97–105, jun 2011.
- [21] L.-L. Jiang, T. Zhou, M. Perc, and B.-H. Wang, “Effects of competition on pattern formation in the rock-paper-scissors game,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 021912, aug 2011.
- [22] A. Dobrinevski and E. Frey, “Extinction in neutrally stable stochastic lotka-volterra models,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 051903, May 2012.
- [23] P. P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, and J. Menezes, “von neumann’s and related scaling laws in rock-paper-scissors-type games,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, p. 031119, sep 2012.
- [24] P. P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, J. Menezes, and B. F. Oliveira, “Junctions and spiral patterns in generalized rock-paper-scissors models,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, p. 036112, sep 2012.
- [25] J. Vukov, A. Szolnoki, and G. Szabó, “Diverging fluctuations in a spatial five-species cyclic dominance game,” *Phys. Rev. E*, vol. 88, p. 022123, aug 2013.
- [26] A. Szolnoki and M. Perc, “Biodiversity in models of cyclic dominance is preserved by heterogeneity in site-specific invasion rates,” *Scientific Reports*, vol. 6, p. 38608, dec 2016.
- [27] M. Frean and E. R. Abraham, “Rock-scissors-paper and the survival of the weakest,” *Proc. R. Soc. Lond. B*, vol. 268, pp. 1323–1327, jul 2001.

- [28] M. Peltomäki and M. Alava, “Three- and four-state rock-paper-scissors games with diffusion,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 031906, sep 2008.
- [29] G. Szabó, M. A. Santos, and J. F. F. Mendes, “Vortex dynamics in a three-state model under cyclic dominance,” *Phys. Rev. E*, vol. 60, p. 3776, oct 1999.
- [30] M. C. Boerlijst and P. Hogeweg, “Attractors and spatial patterns in hypercycles with negative interactions,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 176, pp. 199–210, sep 1995.
- [31] M. Boerlijst and P. Hogeweg, “Spiral wave structure in pre-biotic evolution: Hypercycles stable against parasites,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 48, pp. 17–28, feb 1991.
- [32] P. P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, J. Menezes, B. F. de Oliveira, and M. A. Santos, “How directional mobility affects coexistence in rock-paper-scissors models,” *Phys. Rev. E*, vol. 97, p. 032415, Mar 2018.
- [33] D. Bazeia, M. Bongestab, B. de Oliveira, and A. Szolnoki, “Effects of a pestilent species on the stability of cyclically dominant species,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 151, p. 111255, 2021.
- [34] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*, vol. 618. Springer, 2011.
- [35] R. Cosse and M. Koch, “Basics of reservoir engineering,” *Pure and Applied Geophysics*, vol. 140, no. 4, pp. 739–741, 1993.
- [36] S. R. Gliessman, *Package price agroecology: the ecology of sustainable food systems*. CRC press, 2021.
- [37] M. d. G. de Andrade Oliveira, *Propagação do fogo e dinâmicas florestais*. PhD thesis, Universidade do Porto (Portugal), 2005.
- [38] G. Grimmett, *Percolation*, vol. 321. Springer Berlin, Heidelberg, 2 ed., 1999.
- [39] W. G. Wanzeller, A. Cucchieri, T. Mendes, and G. Krein, “Percolation of monte carlo clusters,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 34, pp. 247–250, 2004.
- [40] D. Stauffer and A. Aharony, “Introduction to percolation theory,” 1992.
- [41] C. Scherer, *Métodos computacionais da Física*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [42] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929.
- [43] P. C. Martin, *Measurements and correlation functions*. CRC Press, 1968.
- [44] P. P. Avelino, B. F. de Oliveira, and R. S. Trintin, “Lotka-volterra versus may-leonard formulations of the spatial stochastic rock-paper-scissors model: The missing link,” *Physical Review E*, vol. 105, Feb. 2022.

- [45] E. Butkov, *Física matemática*, vol. 1. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [46] R. M. May and W. J. Leonard, “Nonlinear aspects of competition between three species,” *SIAM journal on applied mathematics*, vol. 29, no. 2, pp. 243–253, 1975.
- [47] L.-L. Jiang, T. Zhou, M. Perc, and B.-H. Wang, “Effects of competition on pattern formation in the rock-paper-scissors game,” *Physical Review E*, vol. 84, no. 2, p. 021912, 2011.
- [48] D. Bazeia, M. Bongestab, B. de Oliveira, and A. Szolnoki, “Effects of a pestilent species on the stability of cyclically dominant species,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 151, p. 111255, 2021.
- [49] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey, “Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock–paper–scissors games,” *Nature*, vol. 448, no. 7157, pp. 1046–1049, 2007.
- [50] Bazeia, D., Menezes, J., de Oliveira, B. F., and Ramos, J. G. G. S., “Hamming distance and mobility behavior in generalized rock-paper-scissors models,” *EPL*, vol. 119, no. 5, p. 58003, 2017.