Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Revisão da Teoria dos Jogos e Estudo do modelo Jogo de Bens Públicos em um sistema sem rede

Acadêmico: Matheus Henrique dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 31 de março de 2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Santos, Matheus Henrique dos
S237r Revisão da teoria dos jogos e estudo do modelo jogo de bens públicos em um sistema sem rede / Matheus Henrique dos Santos. -- Maringá, PR, 2025.
v, 59 f. : il. color., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Teoria dos jogos. 2. Dilema social. 3. Jogos evolucionários. 4. Sistemas dinâmicos. 5. Jogos de bens públicos. I. Oliveira, Breno Ferraz de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDD 23.ed. 530

Síntique Raquel de C. Eleutério - CRB 9/1641

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Revisão da Teoria dos Jogos e Estudo do modelo Jogo de Bens Públicos em um sistema sem rede

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

Acadêmico: Matheus Henrique dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 31 de março de 2025

Sumário

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos que contribuíram para minha jornada até aqui. Agradeço imensamente aos meus pais, Josiley Aparecida de Jesus dos Santos e Anderson Barbosa dos Santos, minha irmã, Maria Clara dos Santos, e à minha namorada, Júlia Martino Caldato, por serem meu porto seguro, sempre me apoiarem e incentivarem a perseguir meus sonhos e objetivos.

Sou grato a todos os meus professores e aqueles que fizeram parte da minha formação acadêmica, enriquecendo cada vez mais meu conhecimento. Quero destacar especialmente meu orientador, Dr. Breno Ferraz de Oliveira, por todo o apoio oferecido, sua prestatividade e a oportunidade de realizar este e outros trabalhos, além de me incentivar a continuar evoluindo meu conhecimento diariamente.

Agradeço de coração a todos os meus amigos e familiares, especialmente aqueles que estiveram comigo desde o início da graduação, compartilhando os mesmos desafios, e também àqueles que conheci durante a pós-graduação, que foram fundamentais para a conclusão desta etapa.

Não posso deixar de agradecer à Universidade Estadual de Maringá, pela oportunidade de cursar a área que sempre desejei e por todas as outras oportunidades em projetos e estágios que tiveram um grande impacto em minha formação profissional. Também agradeço a todos os outros projetos fora da universidade nos quais tive a oportunidade de participar, pois muitas vezes me ajudaram a aliviar o estresse após longos períodos de estudo, além de enriquecer meu conhecimento em diferentes áreas. Por fim, meu sincero obrigado a todos que, de alguma forma, fizeram parte da minha jornada e me ajudaram a tornar esses anos incríveis.

Resumo

A cooperação é um fenômeno intrigante, pois desafia a visão convencional de que os indivíduos são movidos principalmente pelo egoísmo. A ciência tem se dedicado a investigar como a cooperação pode surgir em grupos compostos por indivíduos que, em teoria, buscariam apenas maximizar seus próprios interesses. Diversas abordagens científicas, como a Teoria dos Jogos e a Biologia Evolutiva, têm procurado desvendar os mecanismos que promovem a cooperação, considerando fatores como incentivos, reciprocidade, reputação e estrutura social. Compreender esses mecanismos pode não apenas lançar luz sobre a natureza humana, mas também ter implicações práticas para a promoção da cooperação em diferentes esferas da sociedade. Esta dissertação investiga a cooperação em jogos de bens públicos por meio de uma abordagem fundamentada na Revisão da Teoria dos Jogos e nos Jogos Evolucionários. A revisão inicial abrange conceitos teóricos, como o Dilema Social e o Dilema do Prisioneiro, além de apresentar o Jogo de Bens Públicos e o Equilíbrio de Nash. Diferentes tipos de jogos são discutidos para aprofundar a compreensão das interações estratégicas. Em seguida, são analisados modelos teóricos que buscam entender e promover a cooperação nesse contexto, considerando fatores como o tamanho do grupo, a memória, a reciprocidade de rede, o efeito espectador e diferentes tipos de jogadores. Um modelo específico de Jogo de Bens Públicos é apresentado, explorando a influência da estrutura de conexões sociais. Os resultados e discussões de uma pesquisa empírica são apresentados e relacionados aos modelos teóricos discutidos. Por fim, são apresentadas as conclusões e possíveis direções para futuras pesquisas, contribuindo para o avanço do conhecimento nessa área.

Palavras chave: Teoria dos Jogos, Jogos Evolucionários, Dilema Social, PGG, Cooperadores.

Abstract

Cooperation is an intriguing phenomenon as it challenges the conventional view that individuals are primarily driven by selfishness. Science has been dedicated to investigating how cooperation can emerge in groups composed of individuals who, in theory, would only seek to maximize their own interests. Various scientific approaches, such as Game Theory and Evolutionary Biology, have sought to unravel the mechanisms that promote cooperation, considering factors such as incentives, reciprocity, reputation, and social structure. Understanding these mechanisms can not only shed light on human nature but also have practical implications for promoting cooperation in different spheres of society. This dissertation investigates cooperation in public goods games through an approach grounded in the Review of Game Theory and Evolutionary Games. The initial review encompasses theoretical concepts such as the Social Dilemma and the Prisoner's Dilemma, in addition to presenting the Public Goods Game and the Nash Equilibrium. Different types of games are discussed to deepen the understanding of strategic interactions. Subsequently, theoretical models that aim to understand and promote cooperation in this context are analyzed, considering factors such as group size, memory, network reciprocity, bystander effect, and different types of players. A specific model of the Public Goods Game is presented, exploring the influence of social connection structures. The results and discussions of an empirical research are presented and related to the discussed theoretical models. Finally, conclusions and possible directions for future research are presented, contributing to the advancement of knowledge in this field.

Keywords: Game Theory, Evolutionary Games, Social Dilemma, Public Goods Game, Cooperators.

Introdução

As interações entre os seres vivos têm sido uma constante ao longo da história da vida na Terra. Desde os seus primórdios, as comunidades de microorganismos interagiram, permitindo que os mais adaptados prevalecessem e evoluíssem, resultando nos primeiros seres vivos. Com o tempo, esses seres vivos diversificaram-se em diferentes espécies e enfrentaram conflitos pela sobrevivência, estabelecendo sistemas de presa e predador. Muitas espécies se extinguiram ao longo das eras, enquanto outras se adaptaram e originaram novas formas de vida mais bem-sucedidas na sobrevivência.

Dentre essas formas de vida, emergiram as espécies que, eventualmente, evoluíram para os primeiros seres humanos, como o *Homo neanderthalensis*, o *Homo erectus* e o *Homo sapiens*. Durante parte da pré-história, essas espécies entraram em conflito, mas o *Homo sapiens* acabou prevalecendo. Essa supremacia deve-se à sua maior adaptação ao ambiente, ao desenvolvimento avançado do cérebro, possibilitando funções cognitivas mais complexas, e à capacidade de formar grandes grupos sociais. A "Revolução Criativa" há 45 mil anos representou um marco crucial nesse processo, impulsionando o *Homo sapiens* a aprimorar habilidades como o manuseio de objetos, fabricação de ferramentas, criação de armas, linguagem e representações culturais, contribuindo substancialmente para o desenvolvimento da espécie.

Com o decorrer do tempo, a espécie *Homo sapiens* continuou a evoluir até culminar nos seres humanos modernos, conhecidos como *Homo sapiens sapiens*. Além dos conflitos com outras espécies e entre si, como claramente evidenciado ao longo da história por meio de guerras, que frequentemente são motivadas pelo desejo de obter vantagens econômicas, os seres humanos desenvolveram interações cada vez mais complexas dentro de comunidades. Essas interações sociais se tornaram significativas, visto que as escolhas individuais de cada membro influenciavam diretamente o coletivo ao qual pertenciam [1].

Essa capacidade de agir e tomar decisões em prol do coletivo, além dos instintos de sobrevivência e competição com outras espécies, destacou-se como um traço distintivo dos seres humanos. A cooperação e a comunicação desenvolvidas dentro das comunidades humanas permitiram que estratégias mais complexas fossem concebidas e implementadas para resolver problemas e alcançar objetivos comuns.

Ao longo do tempo, a evolução cultural se tornou uma força poderosa que moldou o comportamento humano, influenciando as estruturas sociais, os sistemas econômicos e políticos, e até mesmo a própria identidade coletiva de diferentes grupos humanos. Essa evolução contínua da sociedade humana é uma constante adaptação às mudanças ambientais e às demandas do contexto histórico em que vivemos.

Assim, as interações sociais e a capacidade de cooperar, compartilhar informações e formar comunidades coesas foram elementos cruciais na trajetória evolutiva dos seres humanos, contribuindo para nossa capacidade única de lidar com os desafios do mundo em que vivemos.

Todas essas interações entre indivíduos, sejam da mesma espécie ou de espécies diferentes, podem ser compreendidas como um tipo de jogo. Nessa perspectiva, os indivíduos atuam como jogadores, suas adaptações e escolhas ao longo do tempo são associadas a estratégias e o resultado final obtido através dessas estratégias é denominado "payoff" do jogo. Por meio dessa abordagem, podemos analisar uma ampla variedade de situações, desde conflitos entre espécies de seres vivos, disputas econômicas entre países, competições no mercado empresarial e até mesmo interações sociais entre indivíduos, como um grupo de amigos organizando um churrasco [2].

Essa área de estudo é conhecida como Teoria dos Jogos e busca associar sistemas reais a jogos, considerando jogadores, estratégias e resultados, com o intuito de explicar matematicamente o comportamento desses sistemas complexos [3]. A Teoria dos Jogos e os Jogos Evolucionários são áreas de estudo que desempenham um papel crucial na compreensão das complexas interações entre indivíduos em diversos contextos. Por meio dessas abordagens, é possível analisar a forma como os indivíduos tomam decisões estratégicas em situações competitivas, cooperativas ou em cenários que envolvem dilemas sociais.

Dentre os diferentes jogos estudados, o jogo de bens públicos emerge como um modelo fundamental para a compreensão da dinâmica da cooperação em dilemas sociais. Esse jogo se baseia na ideia de que os indivíduos têm a oportunidade de contribuir ou não para um bem coletivo, que beneficiará a todos os participantes. Nesse contexto, os jogadores podem optar por cooperar, assumindo um custo individual para investir no coletivo, também chamado de *pool* comum, ou desertar, buscando benefícios individuais sem contribuir para o bem coletivo.

O jogo de bens públicos não se restringe apenas ao contexto específico desse nome. Na verdade, ele pode ser aplicado em uma variedade de cenários da vida real. Por exemplo, em questões relacionadas à gestão de recursos naturais, os indivíduos podem enfrentar o dilema de cooperar para preservar o meio ambiente ou buscar seus próprios interesses imediatos, negligenciando o bem comum a longo prazo. Da mesma forma, em tomadas de decisões políticas, a cooperação entre diferentes grupos é essencial para alcançar soluções que beneficiem a sociedade como um todo.

A compreensão dos mecanismos que influenciam a cooperação em jogos de bens públicos é de suma importância para abordar desafios coletivos e promover soluções mais eficazes e justas. Ao longo do tempo, diversas estratégias têm sido propostas para incentivar a cooperação nesses jogos. Entre elas, destacam-se a seleção de grupos, a reciprocidade, a reputação, a punição e outros mecanismos que visam superar a tentação de desertar e promover a cooperação entre os jogadores.

Por meio de modelos matemáticos e simulações computacionais, é possível analisar o impacto dessas estratégias na dinâmica do jogo e compreender melhor os resultados observados. Essas abordagens permitem explorar diferentes tipos de jogos, como o dilema do prisioneiro, o jogo da Galinha, a caça ao veado, o jogo do ultimato, o jogo do ditador, o jogo da centopeia e o jogo do *off*, ampliando a diversidade de situações que podem ser abordadas por essa teoria.

Além disso, ao buscar o aumento da cooperação em jogos de bens públicos, é possível investigar fatores como o efeito do tamanho do grupo na evolução da cooperação, o papel da memória na formação de estratégias cooperativas, a reciprocidade de rede como um mecanismo de reforço da cooperação, o efeito espectador e o impacto de diferentes tipos de jogadores, como os punidores, conformistas e expulsores de piscina, na dinâmica do jogo. A análise desses modelos e estratégias contribuirá para uma compreensão mais abrangente dos fatores que influenciam a cooperação em jogos de bens públicos.

A maioria dos modelos de jogo de bens públicos tradicionalmente são aplicados em sistemas onde os jogadores estão posicionados em uma estrutura ordenada, como uma rede quadrada, que define suas posições de forma precisa. No entanto, para aprimorar essas análises, é de extrema importância buscar modelos que se aproximem cada vez mais da realidade, minimizando as limitações impostas pelo sistema.

Nesse contexto, considerar um jogo de bens públicos aplicado a um sistema que não requer uma rede quadrada abre inúmeras possibilidades para análises mais complexas, permitindo ampliar o horizonte das pesquisas e avançar no conhecimento científico. Ao eliminar a rigidez imposta por uma estrutura pré-definida, esse modelo se torna mais próximo das interações reais entre indivíduos, possibilitando uma análise mais realista das dinâmicas sociais e de cooperação.

Essa abordagem pode fornecer *insights* valiosos sobre como a cooperação emerge e se sustenta em sistemas sociais mais complexos e flexíveis, contribuindo para uma melhor compreensão do comportamento humano e das interações coletivas. Ao transcender as limitações da rede quadrada, estaremos avançando em direção a uma representação mais fiel dos fenômenos sociais, o que é fundamental para o desenvolvimento de soluções mais eficazes para problemas da vida real.

Este trabalho tem como objetivo abordar de forma detalhada os principais fatores e conceitos relacionados à Teoria dos Jogos, com um foco especial no jogo de bens públicos. No capítulo 1 será apresentada uma introdução à teoria dos jogos, explicando seu funcionamento, os atores envolvidos (jogadores), as estratégias, a classificação dos jogos e uma análise aprofundada de dilemas sociais, o dilema do prisioneiro e o conceito de equilíbrio de Nash. Além disso, serão fornecidos exemplos ilustrativos de jogos presentes na teoria dos jogos. Em seguida, no capítulo 2, daremos ênfase ao jogo de bens públicos, que será o cerne deste trabalho. Exploraremos como essa teoria foi desenvolvida, a dinâmica que o jogo envolve e suas principais aplicações e desafios a serem superados. Também apresentaremos alguns modelos de jogos de bens públicos que visam aumentar a cooperação no sistema, enriquecendo o conhecimento sobre a tomada de decisões e a colaboração em contextos sociais. No capítulo 3 faremos uma análise detalhada do modelo clássico de um jogo de bens públicos aplicado a uma rede quadrada, que é amplamente utilizado em estudos dessa natureza. Além disso, apresentaremos o modelo inovador proposto neste trabalho, onde o jogo de bens públicos será aplicado a um sistema sem a restrição de uma rede. Abordaremos minuciosamente cada um desses modelos, discutindo suas dinâmicas específicas e como eles se diferenciam em suas abordagens. Por fim, no capítulo 4 apresentaremos os resultados obtidos através de métodos computacionais, seguindo com as Considerações finais, destacando as contribuições e perspectivas futuras.

Capítulo 1

Teoria dos Jogos

Ao longo de nossas vidas, quando examinamos as interações que estabelecemos com outras pessoas em diversos contextos, percebemos que constantemente tomamos posições e fazemos escolhas que repercutem tanto em nós mesmos quanto nos outros. Seja decidindo sobre o vestuário adequado para um evento, investindo no mercado financeiro ou até mesmo influenciando conflitos internacionais, nossas escolhas moldam nossas ações e as consequências que advêm delas [4].

Essas dinâmicas relacionais, neste estudo denominadas como "jogos", envolvem a interação de dois ou mais agentes, cada um com a capacidade de tomar decisões visando alcançar benefícios ou ganhos através dessa interação. Essa característica tem sido observada ao longo da história da humanidade e discutida em inúmeras ocasiões.

Dentre os diferentes tipos de jogos, destaca-se o Dilema Social, que se concentra nos principais problemas decorrentes das escolhas individuais. Esse conceito desempenha um papel fundamental na Teoria dos Jogos, a qual será abordada posteriormente, e retrata uma situação desafiadora na qual os indivíduos podem sofrer prejuízos coletivos devido a decisões que buscam apenas o benefício pessoal.

Os primeiros pensamentos em direção à criação da Teoria dos Jogos surgiram por volta de 1830. Um dos pioneiros a explorar esse assunto foi Antoine Augustin Cournot (1801-1877), um matemático e economista francês (Figura 1.1). Como economista, Cournot buscava analisar o mercado e suas competições, resultando na criação do modelo de Cournot [5]. Esse modelo destacava os desafios do duopólio e do oligopólio, conceitos que são amplamente utilizados atualmente em análises de mercado.

Figura 1.1: Retrato de Augustin Cournot [6].

Posteriormente, em 1913, o matemático e filósofo Ernst Zermelo (1871-1953) (Figura 1.2) desenvolveu um estudo sobre o jogo de xadrez. O Teorema de Zermelo, criado por ele [7], envolvia a análise de jogadores alternando movimentos, onde um deles deveria ter uma estratégia de vitória. Esse teorema garantia a vitória ou, pelo menos, um empate para o jogador que adotasse a estratégia de vitória primeiro.

Figura 1.2: Retrato de Ernst Zermelo [8].

Em 1928, o matemático John Von Neumann (1903-1957) (Figura 1.3) publicou um artigo de extrema importância tratando da Teoria dos Jogos. Nele, ele afirmava que todo jogo finito de soma-zero com dois participantes possuía uma solução em estratégias mistas. No entanto, sua demonstração utilizava conceitos complexos de topologia e análise funcional, o que tornou difícil a compreensão de suas ideias.

Figura 1.3: Fotografia de John von Neumann [9].

Em 1937, Neumann apresentou uma nova demonstração utilizando o teorema do ponto fixo de Brouwer [10], tornando sua análise mais clara. Von Neumann era um estudioso multidisciplinar e tinha grande interesse em estudos relacionados à economia. Em 1944, juntou-se ao economista Oskar Morgenstern (1902-1977) (Figura 1.4) e publicou o livro *"The Theory of Games and Economic Behaviour"* [11], difundindo assim o estudo da Teoria dos Jogos na matemática aplicada e economia, além de abrir possibilidades para o desenvolvimento dessa teoria em diversas outras áreas. No livro, Von Neumann e Morgenstern fizeram uma contribuição significativa para a formalização do conceito de jogo, que já existia e era debatido na sociedade, mas ainda não possuía uma definição formal.

Figura 1.4: Fotografia de Oskar Morgenstern [12].

Eles estabeleceram uma base axiomática para a teoria da utilidade, que define as recompensas que os jogadores podem receber ao participar de um jogo. Além disso, eles introduziram os jogos de soma-zero, nos quais um jogador ganha somente se o outro perde. Também introduziram uma versão de jogos chamada de jogos cooperativos, nos quais os jogadores podem colaborar para obter recompensas conjuntas [11].

Os estudos relacionados à Teoria dos Jogos continuaram a se desenvolver até 1950, quando John Forbes Nash Jr. introduziu o conceito de pontos de equilíbrio à Teoria dos Jogos. Esse conceito foi posteriormente definido como Equilíbrio de Nash. Em 1994, Nash, juntamente com John Charles Harsanyi (1920-2000) e Reinhard Selten (1930-2016), recebeu o Prêmio Nobel de Economia pela generalização do Equilíbrio de Nash ao longo do tempo, aplicando esse conceito a sistemas dinâmicos e descrevendo seu comportamento.

Atualmente, a Teoria dos Jogos continua a se desenvolver e expandir para diversas áreas do conhecimento, como Biologia, Economia, Política e Estatística. Essa teoria nos permite resolver vários problemas, ao mesmo tempo em que gera novos problemas a serem estudados.

1.1 Conceitos importantes

Para que um jogo exista, é necessário que haja um conflito ou uma situação em que os participantes estejam envolvidos. Cada participante desse jogo é chamado de jogador, e o conjunto de jogadores forma um grupo. Os jogadores têm a responsabilidade de escolher estratégias durante o jogo e estão divididos entre aqueles que se beneficiam ou são prejudicados pelos resultados do jogo.

Em um jogo, os jogadores têm um objetivo pelo qual decidem participar, algo que desejam alcançar. Esse objetivo é chamado de recompensa (*payoff*), que representa a recompensa desejada pelos jogadores ao participarem do jogo.

O jogo ocorre em um ambiente onde os jogadores se encontram e interagem entre si de diferentes maneiras. A interação é descrita como qualquer ação que um jogador realiza e que afeta de alguma forma os outros jogadores. No jogo, os jogadores estão sempre buscando obter a melhor recompensa possível. Para alcançar esse objetivo, eles devem desenvolver as melhores estratégias, considerando todos os fatores do jogo e realizando diferentes raciocínios [13].

1.1.1 Jogadores

Em qualquer jogo, a presença de participantes é essencial, pois são eles que conduzem o jogo, realizam ações e recebem recompensas. Esses participantes, conhecidos como jogadores, são os principais responsáveis por garantir que o jogo aconteça.

O termo "jogador" geralmente está associado a um indivíduo competindo com outro com o objetivo de ganhar algo. No entanto, dentro da teoria dos jogos, essa concepção de jogador é muito mais abrangente e pode se configurar de várias maneiras, dependendo da dinâmica do jogo. Por exemplo, ao aplicarmos a teoria dos jogos na economia, os jogadores podem ser diferentes empresários ou até mesmo empresas envolvidas no contexto do jogo analisado. Na política, os jogadores podem ser grupos governamentais, cidades ou países com interesses políticos divergentes. Na biologia, os jogadores podem ser indivíduos ou até mesmo populações inteiras de diferentes espécies.

Dentro da teoria dos jogos, o conceito de jogadores pode se adaptar conforme o jogo analisado, podendo representar desde um único indivíduo até um coletivo de indivíduos, desde que se mantenha o princípio fundamental. O jogador é responsável por elaborar estratégias que determinam o rumo do jogo, sendo essa uma parte essencial para o seu desenvolvimento [13].

1.1.2 Estratégias

No contexto do jogo, os jogadores executam ações que impulsionam o desenvolvimento do jogo. Em outras palavras, as ações realizadas pelos jogadores são conhecidas como estratégias e estão diretamente ligadas aos seus interesses durante o jogo.

O objetivo dos jogadores é alcançar o melhor resultado possível ao final do jogo. Para isso, eles desenvolvem diferentes estratégias que guiam suas ações e escolhas. Como resultado, as estratégias de um jogador podem entrar em conflito com as estratégias de um oponente, e aquele com a estratégia mais eficaz se destaca.

Existem dois perfis de estratégias distintos: estratégias puras e estratégias mistas. Em um jogo de estratégias puras, todas as estratégias têm a mesma probabilidade de ocorrer. Já em um jogo de estratégias mistas, diferentes probabilidades estão associadas às estratégias.

Esses conceitos se tornam mais evidentes quando observamos um jogo de RPG de mesa. Nesse tipo de jogo, usamos dados de 20 lados para determinar o sucesso das ações dos personagens. Se jogarmos com um dado comum, percebemos que a probabilidade de obter cada valor no dado é a mesma, $\frac{1}{20}$ ou 5%, para todos os jogadores. Isso caracteriza um jogo de estratégias puras. No entanto, se um dos jogadores estiver usando um dado viciado, em que os valores $18, 19e20$ têm maior probabilidade de aparecer, a probabilidade de obter esses valores específicos ou os outros dezessete valores possíveis no dado será diferente. Isso caracteriza um jogo de estratégias mistas.

Dentro de um jogo, também podemos distinguir dois tipos de estratégias: as dominantes e as dominadas. As estratégias dominantes são aquelas em que os jogadores se destacam em relação aos outros por meio de suas ações. Já as estratégias dominadas são relacionadas aos jogadores que não têm uma resposta eficaz para a estratégia dominante dos oponentes [13].

1.1.3 *Payoff*

O principal motivo que leva as pessoas a se tornarem jogadores e participarem de jogos, seja competindo ou cooperando, é o que elas vão obter no final. Os jogos sempre resultam em algo para os jogadores, chamado de recompensa ou *payoff*, que pode ser positivo ou negativo dependendo da estratégia adotada pelo jogador.

A ideia de *payoff* pode variar dependendo do jogo analisado. Por exemplo, como descrito por Yuval Noah Harari em seu livro *best-seller* “Sapiens” [1], na área da Biologia, podemos considerar uma competição entre espécies. A espécie que se adapta melhor ao ambiente tem uma vantagem em relação às outras e passa seu genoma adaptado para as próximas gerações. Nesse contexto, as diferentes espécies são os jogadores e as estratégias que cada uma delas escolhe para se adaptar ao ambiente são as formas de alcançar o *payoff* do jogo da evolução, que é o domínio e a preservação de uma espécie em relação às outras que coexistem.

Não há uma fórmula precisa para determinar os *payoffs*, eles são estabelecidos de acordo com cada jogo e cada situação, adaptando-se às diversas formas de recompensa, dependendo das necessidades do jogo [13].

1.1.4 Representação

Ao estudarmos os jogos relacionados à Teoria dos Jogos, é essencial visualizá-los de maneira que facilite sua análise e compreensão do sistema. Para esse propósito, existem duas formas de representação de um jogo: a Forma Normal e a Forma Extensiva. Essas formas de visualização são empregadas para representar diferentes tipos de jogos, dependendo das características dos jogadores, estratégias e recompensas envolvidas [13, 14].

- **Forma Normal:** é uma representação simples de um jogo através de uma tabela, onde as estratégias dos jogadores são relacionadas. Amplamente utilizada pela simplicidade e clareza, cada jogador é representado por linhas e colunas, indicando suas estratégias. Exemplo: Jogador A e Jogador B podem escolher entre X e Y. Os resultados do jogo são determinados pelas intersecções das linhas e colunas na tabela, com valores diferentes para cada combinação de estratégias dos jogadores. Por exemplo, se o Jogador A escolhe X e o Jogador B escolhe X, o *payoff* é $(1, 2)$, indicando que o Jogador A recebe 1 e o Jogador B recebe 2. Todos os possíveis resultados são analisados de forma similar, de acordo com as escolhas estratégicas de cada jogador.

Tabela 1.1: Representação do jogo na forma normal, com a relação entre as estratégias escolhidas pelos jogadores e seus respectivos *payoffs*.

Jogador A/Jogador B	X	Y
X	(1,2)	(3,4)
Y	(5,6)	(7,8)

- **Forma Extensiva:** é uma representação mais dinâmica de um jogo através de uma espécie de "árvore", que relaciona as estratégias escolhidas pelos jogadores com os *payoffs* resultantes. Nessa forma de representação, o jogo começa a partir de uma raiz e, a cada escolha de estratégia dos jogadores, a raiz se divide em diferentes ramos, onde cada ramo representa uma estratégia diferente. À medida que as estratégias vão sendo alteradas, mais ramos surgem, até que, ao final desses ramos, temos o *payoff* associado às escolhas de estratégias dos jogadores.

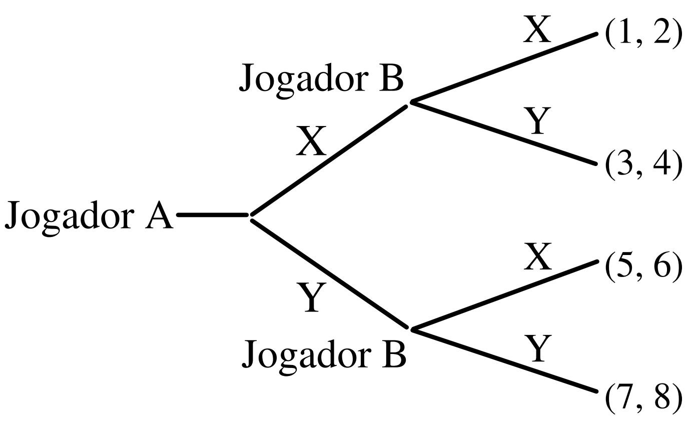

Figura 1.5: Representação do jogo na forma extensiva, com a relação entre as estratégias escolhidas pelos jogadores e seus respectivos *payoffs*.

1.1.5 Classificação dos Jogos

- **Jogos Simétricos:** são aqueles em que os resultados dos jogadores dependem apenas das estratégias escolhidas, independentemente de quem as escolheu. Se, ao trocar os jogadores, os resultados não mudarem, o jogo é considerado simétrico. Exemplos desse tipo de jogo incluem o Jogo da Galinha e o famoso Dilema do Prisioneiro, os quais discutiremos mais a frente.

- **Jogos Assimétricos:** são aqueles que apresentam diferentes tipos de estratégias para cada jogador participante. Nesses jogos, as estratégias não são intercambiáveis. Um exemplo é o Jogo Ultimato, o qual discutiremos na sequência, em que cada tipo de jogador tem estratégias específicas.

- **Jogos de Soma zero:** são aqueles em que o *payoff* final dos jogadores é igual a zero. Isso significa que, para qualquer combinação de estratégias escolhidas pelos jogadores, a soma dos *payoffs* de cada jogador será sempre zero, ou seja, o lucro de um jogador é obtido à custa do prejuízo dos outros jogadores. Um exemplo desse tipo de jogo é o Poker [15], em que o vencedor recebe exatamente a soma das perdas dos jogadores perdedores. Outros exemplos são os jogos de tabuleiro, como xadrez e damas.

- **Jogos de Soma diferente de zero:** são aqueles em que o ganho dos jogadores pode não ser igual à soma dos prejuízos dos perdedores. Alguns resultados têm *payoffs* maiores ou menores que zero. A maioria dos jogos apresentados nesse trabalho são de Soma Diferente de Zero, incluindo o Dilema do Prisioneiro e os "*Public Good Games*" (PGG), ou também chamados de Jogos de bens públicos, que serão abordados em detalhes mais adiante no trabalho.

- **Jogos Simultâneos:** são aqueles em que os jogadores tomam suas decisões sem conhecimento das estratégias adotadas pelos outros jogadores. Eles podem tomar suas decisões ao mesmo tempo ou em tempos diferentes, mas não têm informações sobre as escolhas dos adversários no momento das suas próprias decisões.

- **Jogos Sequenciais:** são aqueles em que os jogadores têm conhecimento das decisões feitas por seus antecessores, o que influencia suas próprias escolhas. Nesse tipo de jogo, podem existir subconjuntos de jogos, caracterizados pelo nível de informação dos jogadores em relação às decisões dos outros.

- **Jogos Infinitamente longos:** são aqueles em que os jogadores podem realizar um número infinito de movimentos. Esses jogos são especialmente relevantes para analisar as estratégias dos jogadores, considerando o axioma da escolha de Zermelo [7]. Através dessa perspectiva, importantes implicações podem ser obtidas para a teoria descritiva dos conjuntos.

1.2 Dilema Social

A questão da cooperação em um mundo onde a competição molda as espécies e apenas os mais adaptados prevalecem é um dos grandes desafios da ciência. De acordo com a revista Science, essa é uma das 125 grandes incógnitas do século XXI que ainda não temos uma resposta definitiva. Embora a cooperação seja benéfica para o coletivo dentro de um sistema, a traição acaba sendo mais vantajosa em um contexto de competição.

O Dilema Social é uma das bases da Teoria dos Jogos e já era discutido mesmo antes de sua formulação formal, pois está diretamente relacionado ao comportamento humano. Segundo Thomas Hobbes em sua obra clássica "Leviatã" e Yuval Noah Harari em seu best-seller "Sapiens" [1], ao longo da história, os seres humanos sempre buscaram recompensas individuais em detrimento das coletivas na maioria das situações. O Dilema Social é uma espécie de armadilha coletiva na qual todos os participantes são incentivados individualmente a agir ignorando as consequências sociais de suas ações. Os indivíduos que optam por uma escolha em busca de ganho pessoal podem acabar prejudicados e obter resultados piores do que antes da escolha.

O jogo do Dilema Social pode ser caracterizado por dois fatores importantes: a traição entre os jogadores gera uma recompensa maior para o traidor, e quando todos os indivíduos trapaceiam, o *payoff* para todos os jogadores é menor do que se eles cooperassem.

Analisando um jogo de Dilema Social, quando há cooperação entre os jogadores, o coletivo prospera e todos recebem recompensas satisfatórias. No entanto, quando um dos jogadores decide trair e não cooperar, ele acaba se beneficiando da cooperação dos outros jogadores sem arcar com os custos de ajudá-los.

O maior problema surge quando todos os indivíduos percebem que trair o comportamento cooperativo gera uma recompensa maior. Nesse momento, todos os jogadores passam a trair uns aos outros, levando à "Tragédia dos comuns". Quando todos os jogadores se tornam traidores, a cooperação desaparece, levando ao colapso do grupo e às piores recompensas para os jogadores restantes.

Podemos encontrar diversos exemplos claros desse fenômeno, como nas discussões políticas atuais entre países em relação à implementação de ideias para o uso sustentável dos recursos naturais. Nesse caso, um país que aceita implementar essas ideias e cooperar com os demais estará abrindo mão da emissão de poluentes das indústrias em prol do bem coletivo. No entanto, isso pode impactar negativamente sua atividade econômica, pois terá que arcar com os custos dessa redução.

Por outro lado, os países que optam por não implementar medidas sustentáveis se beneficiarão das ações dos outros países sem sofrer os mesmos prejuízos econômicos, podendo até mesmo obter vantagens devido à redução da atividade econômica dos demais. Com o tempo, outros países perceberão que não respeitar as políticas sustentáveis gera maior lucro individual e também trairão o coletivo, aumentando suas atividades econômicas. Eventualmente, todos os países abandonarão completamente as ideias sustentáveis, levando ao colapso do grupo e a problemas ambientais ainda mais graves do que antes.

Quando um dos jogadores decide trair os demais e não cooperar, há um ganho individual maior, mas o ganho coletivo do grupo diminui, levando eventualmente ao colapso do jogo. Esse dilema é amplamente estudado em diversos exemplos, desde situações cotidianas, como decidir se jogar um salgadinho na lixeira ou no chão, até exemplos mais complexos, como uma potência mundial decidir entre atacar ou não uma nação vizinha.

A literatura utiliza várias metáforas para descrever dilemas sociais, sendo as principais a análise de jogos com múltiplos jogadores, como a Tragédia dos comuns, e jogos que tratam do dilema entre dois jogadores, como o Dilema do Prisioneiro.

1.3 Dilema do prisioneiro

O jogo do Dilema do Prisioneiro é uma implementação teórica e prática da Teoria dos Jogos, aplicada em diferentes áreas, como política, guerras, economia e conflitos econômicos. Foi formulado com a colaboração de três estudiosos: os matemáticos americanos Merril M. Flood (1908-1991) e Melvin Dresher (1911-1992) (Figura 1.6), e o matemático canadense Albert Tucker (1905-1995) (Figura 1.7).

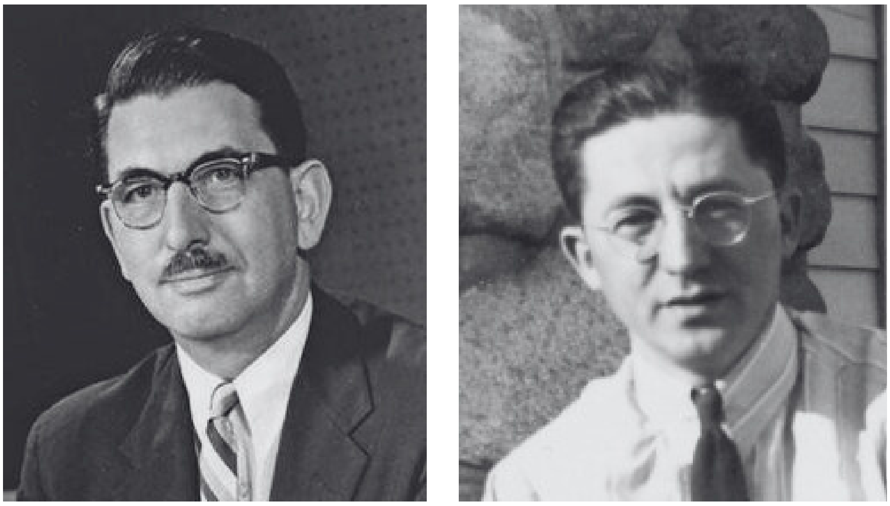

Figura 1.6: Fotografias de Merril M. Flood e Melvin Dresher, respectivamente [16] [17].

Figura 1.7: Fotografia de Albert Tucker [18].

Merril e Dresher trabalhavam na Rand Corporation, uma empresa sem fins lucrativos que fornecia informações estratégicas ao governo dos Estados Unidos, principalmente para o Departamento de Defesa. Eles já estavam envolvidos em pesquisas relacionadas à Teoria dos Jogos, principalmente no contexto econômico e militar. O refinamento de alguns conceitos por eles elaborados foi crucial para o avanço desse estudo e facilitou a análise de diversos outros estudos baseados nessa teoria [3].

O modelo do Dilema do Prisioneiro se baseia na aplicação da Teoria dos Jogos e refere-se aos jogos de soma não nula. Existem diferentes tipos de jogos do Dilema, mas a formulação clássica e mais simples foi criada por Albert Tucker, com o tema da pena de prisão, o que gerou o nome Dilema do Prisioneiro.

A Teoria dos Jogos é uma análise estratégica de como os jogadores envolvidos em um determinado jogo avaliam uns aos outros, buscando alcançar um resultado específico. Cada jogador busca maximizar seu próprio resultado, sem se preocupar com os resultados dos outros jogadores. Esse comportamento leva ao surgimento de jogos de soma não nula, nos quais o ganho de um jogador não necessariamente corresponde à perda dos outros. Essa característica é fundamental no modelo clássico do Dilema do Prisioneiro [3].

No Dilema do Prisioneiro, dois indivíduos são presos em flagrante por um crime e também são suspeitos de terem cometido outro crime. A polícia ainda não tem evidências suficientes para provar a culpa pelo segundo crime, mas pode condená-los a até 2 anos de prisão pelo crime em flagrante. Os suspeitos são mantidos em celas separadas e serão interrogados separadamente. Durante os interrogatórios, a polícia propõe a cada suspeito as seguintes opções:

- Se o suspeito confessar e seu parceiro não confessar, o confessor fica livre e seu parceiro recebe uma sentença de 10 anos de prisão.
- Se ambos confessarem, ambos recebem uma sentença de 5 anos de prisão cada.
- Se nenhum dos suspeitos confessar, ambos recebem uma sentença de 2 anos de prisão pelo crime em flagrante.

Com base nas respostas dos indivíduos nos interrogatórios, é possível criar uma matriz de pagamentos 1.2, que atribui a cada jogador um resultado com base em suas respostas. Os elementos dessa matriz representam os pagamentos dos jogadores de acordo com suas estratégias.

Tabela 1.2: Tabela com a relação entre a pontuação e o *payoff* dos jogadores.

Pontuação	*payoff*
0 pontos	10 anos de prisão
2 pontos	5 anos de prisão
3 pontos	2 anos de prisão
4 pontos	Liberdade

Dentro desse tipo de jogo, a estratégia de cada jogador é buscar o melhor resultado possível, escolhendo a opção que proporcionará o maior pagamento ao final do jogo. Com base nisso, é possível criar uma matriz de pagamento para os suspeitos interrogados, chamados de Jogador 1 e Jogador 2. Os elementos dessa matriz indicam os pagamentos dos jogadores de acordo com suas escolhas estratégicas.

Ambos os jogadores chegam à conclusão de que, pensando individualmente, é mais vantajoso confessar do que não confessar. No entanto, esse resultado está alinhado com a estratégia seguida pelos jogadores, que priorizam a maximização do ganho individual em detrimento do ganho coletivo. Estratégias que visam a maximização do ganho individual em relação ao coletivo geralmente levam a resultados piores, pois eliminam qualquer tipo de acordo ou benefício mútuo que possa existir no jogo. O resultado deste jogo pode ser descrito pela matriz representada na Figura 1.8.

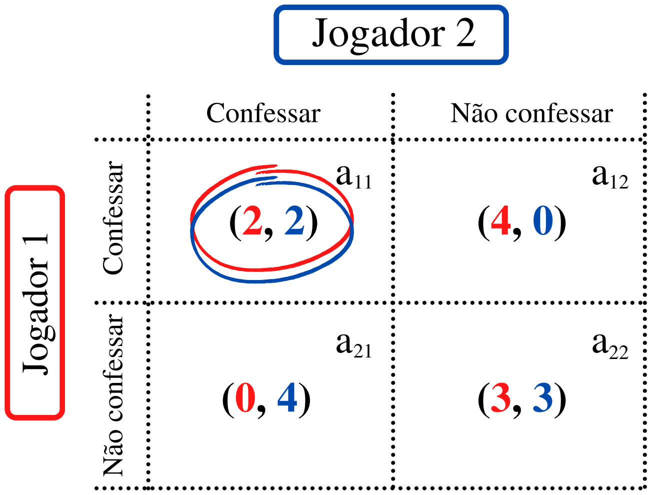

Figura 1.8: Matriz de pagamento do jogo do Dilema do Prisioneiro [19].

Para que um grupo alcance um melhor resultado de equilíbrio, é necessário que os indivíduos não busquem apenas uma pontuação individual melhor, mas sim uma pontuação coletiva melhor. Se houver cooperação entre os indivíduos, o resultado final do jogo será melhor para todo o grupo. Esse conceito de bem-estar coletivo é descrito pelo chamado Equilíbrio de Nash, um estado em que nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia, dado o comportamento dos outros jogadores.

O Dilema do Prisioneiro é um exemplo prático da aplicação da Teoria dos Jogos, no qual os jogadores enfrentam um conflito entre buscar seu próprio benefício individual ou cooperar para alcançar um benefício coletivo. Essa dinâmica é relevante em diversos contextos, permitindo a análise e compreensão de decisões estratégicas em áreas como política, guerras, economia e conflitos econômicos.

1.4 Equilíbrio de Nash

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática que busca maximizar os resultados com ganhos e perdas. No entanto, ao analisar jogos como o Dilema do Prisioneiro, percebe-se que quando os jogadores cooperam entre si, o ganho coletivo é muito maior do que o individual, garantindo assim o bem-estar do grupo.

Uma corrente filosófica conhecida como Utilitarismo, fundada por Jeremy Bentham e John Stuart Mill (Figura 1.9), defende que a cooperação entre os indivíduos em uma sociedade gera benefícios coletivos que superam os benefícios individuais. O Utilitarismo é uma doutrina moral que enfatiza a produção do maior bem-estar possível como objetivo principal. Ações são consideradas boas quando tendem a promover a felicidade e más quando tendem a promover o oposto da felicidade [20, 21].

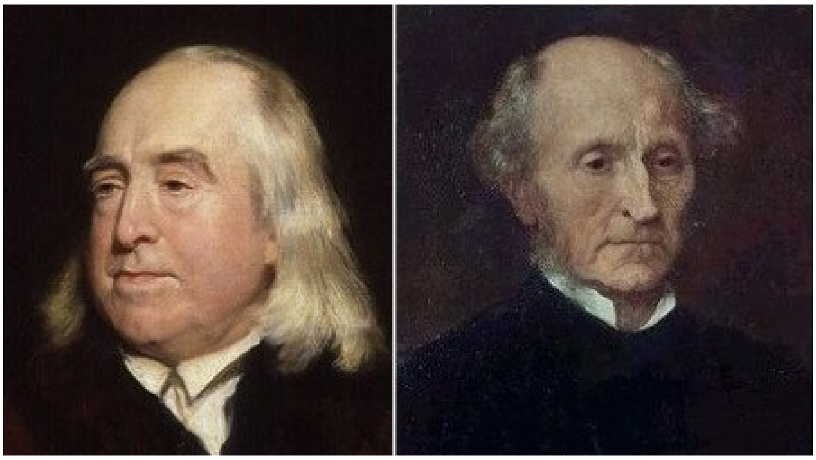

Figura 1.9: Retratos de Jeremy Bentham (à esquerda) e John Stuart Mill (à direita) [22].

No entanto, essa abordagem moral depende muito das circunstâncias de cada situação. Nem sempre a cooperação leva à melhor opção, dependendo do caso. Por exemplo, em um cenário em que um professor está dando aula para uma turma que não está interessada em prestar atenção, cooperar com a vontade dos alunos de ficar conversando e dar uma aula ruim não seria adequado. Nesse caso, é necessário analisar o que o grupo deseja ganhar e sob quais circunstâncias o grupo busca a solução do jogo.

Quando se trata de um sistema econômico, a solução de um jogo é frequentemente associada ao chamado ponto de equilíbrio, onde o sistema se encontra estável. Esse conceito de equilíbrio também pode ser aplicado a sistemas físicos, onde todas as forças internas se equilibram e mantêm o sistema em equilíbrio estático e dinâmico, até que uma força externa o perturbe. O ponto de equilíbrio é uma ferramenta de análise e não uma previsão do que será observado [3].

No Dilema do Prisioneiro, a deserção mútua $(2, 2)$ foi considerada a "solução" do jogo. Essa solução é analisada pelo chamado Equilíbrio de Nash, conceito desenvolvido por John Forbes Nash Jr. (Figura 1.10), um renomado matemático que contribuiu significativamente para a Teoria dos Jogos. Nash estudou principalmente o jogo do Dilema do Prisioneiro e analisou estratégias de dominância do jogo, em que os jogadores buscam maximizar seus ganhos.

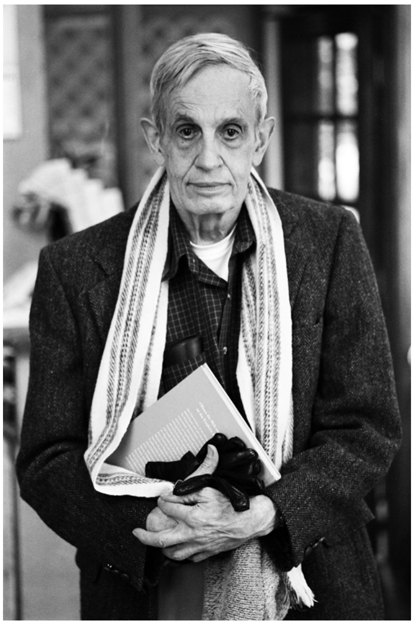

Figura 1.10: Fotografia de John Forbes Nash Jr. [23].

No entanto, Nash observou que quando ambos os jogadores decidem não confessar, eles podem chegar a um ponto de equilíbrio com payoffs intermediários melhores. Para alcançar esse equilíbrio, é necessário alterar a racionalidade dos jogadores, ou seja, a forma como eles escolhem suas estratégias. Nash também observou que a cooperação pode levar a um ponto de equilíbrio mais favorável, em que nenhum jogador recebe o máximo ou o mínimo payoff, mas sim um valor intermediário.

O Equilíbrio de Nash define que a melhor escolha para os indivíduos é feita de forma racional, proporcionando o melhor resultado para todos de maneira estável e sem grandes riscos de perda. No entanto, é importante notar que o Equilíbrio de Nash nem sempre corresponde ao melhor resultado possível, como ilustrado pelo exemplo do jogo da velha, onde o empate é considerado o ponto de equilíbrio, embora existam outras opções de resultado [24].

A Teoria dos Jogos, juntamente com os conceitos de Utilitarismo e Equilíbrio de Nash, fornece ferramentas para entender e analisar decisões estratégicas em diferentes contextos, incluindo política, economia e conflitos sociais. Ao considerar a cooperação e o bem-estar coletivo, é possível buscar soluções mais vantajosas para todos os envolvidos.

1.5 Diferentes tipos de jogos

A teoria dos jogos é uma área de estudo que analisa as interações estratégicas entre diferentes agentes em situações de tomada de decisão. Uma das principais contribuições dessa teoria é a classificação e análise dos diferentes tipos de jogos, que fornecem *insights* sobre os possíveis resultados e comportamentos dos jogadores.

Existem vários tipos de jogos estudados na teoria dos jogos, cada um com características e dinâmicas específicas, gerando uma rica variedade de comportamentos observados nos jogadores. A compreensão desses diferentes jogos e suas dinâmicas é essencial para analisar e prever os resultados das interações, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias mais eficazes e para a tomada de decisões em diversos contextos.

1.5.1 Jogo da galinha

O jogo da galinha, também conhecido como *"chicken game"* em inglês, é um jogo clássico na Teoria dos Jogos que envolve a tomada de decisões e a análise estratégica dos jogadores. É um exemplo de jogo de conflito em que os participantes enfrentam uma situação de escolha entre dois extremos arriscados.

O jogo da galinha geralmente é ilustrado por um cenário em que dois motoristas estão dirigindo em direção um ao outro em alta velocidade. Eles têm duas opções: continuar em linha reta (não desviar) ou desviar para evitar a colisão. Aquele que desviar primeiro é considerado "covarde" ou "perdedor", enquanto o jogador que se mantém em linha reta é considerado "corajoso" ou "vencedor".

A dinâmica do jogo está relacionada ao conflito entre o desejo de evitar o risco de uma colisão e a pressão social ou o medo de ser considerado covarde. Ambos os jogadores estão cientes de que, se ambos desviarem, a colisão será evitada e nenhum deles será considerado covarde. No entanto, se nenhum jogador desviar, ocorrerá uma colisão catastrófica para ambos.

Na análise do jogo da galinha, são utilizadas matrizes de pagamento para representar as recompensas ou consequências para cada combinação de escolhas dos jogadores. Uma matriz típica para é dada pela Figura 1.11.

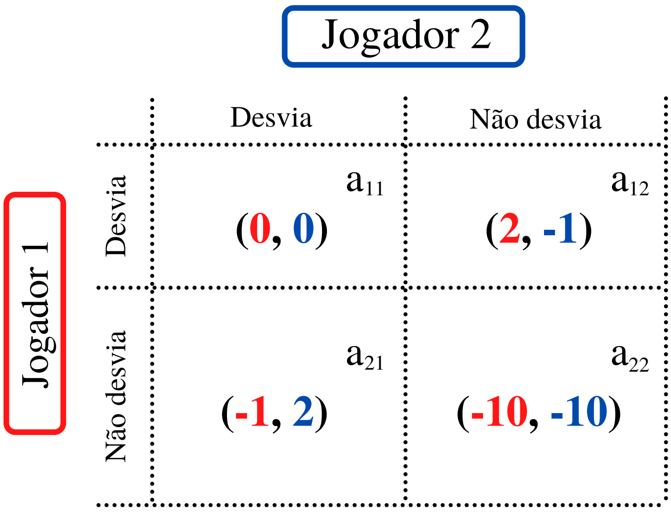

Figura 1.11: Matriz de pagamento do jogo da galinha [19].

Na matriz 1.11, os números entre parênteses representam os *payoffs* (recompensas) para o Jogador 1 e Jogador 2, respectivamente. Por exemplo, se ambos desviarem, ambos receberão 0 de *payoff*. Se um jogador desviar e o outro não, o jogador que desviou receberá 2 de *payoff*, enquanto o outro receberá -1. Se nenhum jogador desviar, ambos receberão -10.

A estratégia dominante no jogo da galinha é desviar, pois isso garante um *payoff* maior independentemente da escolha do oponente. No entanto, a situação de maior conflito ocorre quando ambos os jogadores optam por não desviar, criando uma tensão em que nenhum dos jogadores quer ser considerado covarde, mas ambos enfrentam o risco de uma colisão.

O jogo da galinha é um exemplo interessante de como as pressões sociais, a reputação e a coragem podem influenciar as decisões dos jogadores. Ele ilustra a importância da análise estratégica na Teoria dos Jogos, em que cada jogador busca maximizar seu próprio *payoff* enquanto considera as escolhas e a racionalidade do oponente.

Esse jogo também pode ser aplicado a situações além do contexto de condução, como disputas políticas, competições econômicas ou até mesmo relacionamentos pessoais. A compreensão dos conceitos e das estratégias envolvidas no jogo da galinha ajuda a elucidar os comportamentos e as dinâmicas de tomada de decisão em situações de conflito [25].

1.5.2 Jogo caça ao veado

O jogo "caça ao veado", também conhecido como *"stag hunt"* em inglês, é um jogo clássico na Teoria dos Jogos que explora a dinâmica entre cooperação e competição. Esse jogo envolve a tomada de decisões estratégicas por parte dos jogadores, que devem escolher entre duas opções: caçar um veado em grupo ou caçar uma lebre individualmente.

O jogo recebe esse nome por meio de uma analogia em que os jogadores representam caçadores em busca de uma presa. A ideia central é que, para caçar um veado com sucesso, é necessário que todos os caçadores cooperem e trabalhem juntos. No entanto, também existe a tentação de caçar uma lebre individualmente, o que garante um menor *payoff*, mas sem depender da cooperação dos outros.

A matriz de pagamento para o jogo "caça ao veado" geralmente é representada Figura 1.12.

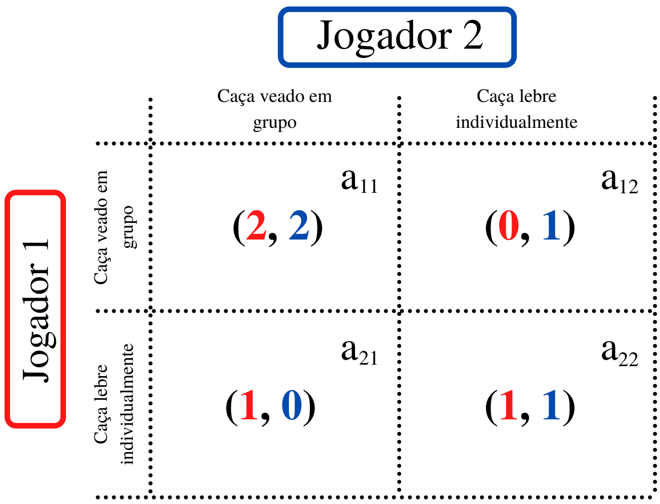

Figura 1.12: Matriz de pagamento do jogo caça ao veado [19].

Na matriz 1.12, os números entre parênteses representam os *payoffs* (recompensas) para o Jogador 1 e Jogador 2, respectivamente. Por exemplo, se ambos os jogadores escolherem caçar o veado em grupo, cada um receberá um *payoff* de 2. Se um jogador optar por caçar o veado em grupo e o outro escolher caçar uma lebre individualmente, o primeiro jogador receberá 0 de *payoff*, enquanto o segundo jogador receberá 1. Se ambos os jogadores caçarem uma lebre individualmente, cada um receberá um *payoff* de 1.

No jogo "caça ao veado", a estratégia de maior cooperação e benefício mútuo é caçar o veado em grupo. Nessa situação, os jogadores podem obter o *payoff* máximo de 2, mas isso requer a confiança e a colaboração mútua. No entanto, existe um dilema, pois cada jogador tem a tentação de maximizar seu próprio *payoff* caçando uma lebre individualmente, independentemente da escolha do outro jogador.

Esse jogo ilustra a importância da confiança e da cooperação em situações de interação social. Ambos os jogadores têm o interesse em caçar o veado em grupo para maximizar o *payoff* coletivo, mas também enfrentam o risco de que o outro jogador opte por caçar uma lebre individualmente, o que resultaria em um *payoff* menor para o jogador que optou pela cooperação.

O jogo "caça ao veado" tem aplicações em diversos contextos, como negociações, acordos coletivos, alianças estratégicas e até mesmo em situações de resolução de problemas em grupo. Ele destaca a importância da comunicação, da confiança e do comprometimento mútuo para alcançar resultados benéficos para todos os envolvidos.

Em resumo, o jogo "caça ao veado" na Teoria dos Jogos aborda o equilíbrio entre a cooperação e a competição, onde os jogadores devem decidir entre buscar um benefício coletivo ao caçar o veado em grupo ou maximizar seu próprio benefício ao caçar uma lebre individualmente. A escolha estratégica de cada jogador afeta diretamente os *payoffs* e, assim, evidencia a importância da confiança e da colaboração para alcançar um resultado ótimo para todos [26].

1.5.3 Jogo do ultimato

O jogo do ultimato é um dos jogos mais estudados na Teoria dos Jogos e explora a dinâmica da negociação e das decisões estratégicas. Ele envolve dois jogadores, um proponente e um receptor, que devem dividir uma quantia em dinheiro.

A dinâmica do jogo é a seguinte: o proponente recebe uma quantia fixa de dinheiro e deve propor uma divisão para o receptor. O receptor, por sua vez, pode aceitar ou rejeitar a proposta. Se o receptor aceitar, o dinheiro é dividido de acordo com a proposta. No entanto, se o receptor rejeitar, ambos os jogadores ficam sem nada.

O jogo do ultimato é frequentemente representado por uma matriz de pagamento simplificada, onde o proponente faz uma proposta (x, y), indicando a quantidade de dinheiro que ele oferece para si mesmo (x) e para o receptor (y). Se o receptor aceitar, ambos recebem os valores propostos. Caso o receptor rejeite, nenhum jogador recebe nada, como na Figura 1.13,

Proponente/Receptor	Aceitar	Recusar
Proposta (x, y)	a_{11} (x, y)	a_{12} (0, 0)
	a_{21} (x, y)	a_{22} (0, 0)

Figura 1.13: Matriz de pagamento do jogo do Ultimato [19].

Esse jogo coloca em evidência a tensão entre a racionalidade econômica e a reciprocidade social. Sob a perspectiva da racionalidade econômica, o receptor deveria aceitar qualquer oferta positiva, já que algo é melhor do que nada. No entanto, a reciprocidade social pode levar o receptor a rejeitar ofertas consideradas injustas ou desiguais.

O resultado clássico nesse jogo é que, em condições ideais de racionalidade econômica, o proponente deve fazer uma oferta mínima possível, e o receptor, por sua vez, deve aceitá-la, pois qualquer quantia é melhor do que nenhuma. No entanto, na prática, observa-se que o receptor frequentemente rejeita ofertas consideradas injustas, mesmo que isso signifique ficar sem nenhum benefício.

A análise do jogo do ultimato revela que fatores como equidade, justiça e reciprocidade social desempenham um papel significativo nas decisões dos jogadores. Os indivíduos estão dispostos a abrir mão de ganhos materiais para evitar uma percepção de injustiça ou desequilíbrio.

Esse jogo tem implicações em várias áreas, como economia, psicologia e ciências sociais. Ele fornece *insights* sobre como as pessoas tomam decisões em contextos de negociação e como fatores sociais e emocionais influenciam suas escolhas. Além disso, o jogo do ultimato também levanta questões sobre a natureza humana e a importância de considerações além do simples cálculo econômico [26].

1.5.4 Jogo do ditador

O jogo do ditador é um jogo clássico estudado na Teoria dos Jogos que busca analisar a tomada de decisão e a distribuição de recursos em situações de poder unilateral. Ele envolve dois jogadores, o ditador e o receptor, sendo que apenas o ditador possui o poder de decidir sobre a distribuição de uma determinada quantidade de recursos.

A dinâmica do jogo é a seguinte: o ditador recebe uma quantidade fixa de recursos e deve decidir como distribuí-los entre si mesmo e o receptor. Não há qualquer tipo de negociação ou possibilidade de resposta do receptor. O ditador possui total liberdade para fazer a distribuição dos recursos de acordo com sua vontade, sem sofrer consequências ou pressões externas.

Esse jogo é frequentemente representado por uma matriz de pagamento simplificada, onde o ditador escolhe uma divisão (x, y), indicando a quantidade de recursos que ele retém para si mesmo (x) e a quantidade que é destinada ao receptor (y). O receptor não tem influência sobre essa decisão e não há repercussões diretas para o ditador, conforme na Figura 1.14.

	Ditador	Receptor
Proposta (x, y)	a_{11} (x)	a_{12} (y)

Figura 1.14: Matriz de pagamento do jogo do ditador [19].

O jogo do ditador é usado como um modelo para entender como as pessoas tomam decisões quando têm poder unilateral sobre a distribuição de recursos. Ele levanta questões sobre justiça, equidade, altruísmo e egoísmo. A análise desse jogo permite explorar o comportamento humano em situações de desigualdade de poder.

Em termos teóricos, espera-se que o ditador escolha uma divisão que maximize seu próprio benefício, pois não há incentivos ou restrições para considerar o bem-estar do receptor. Assim, em condições de racionalidade econômica pura, o ditador tenderá a reter a maior parte dos recursos para si mesmo, negligenciando a equidade ou a justiça na distribuição.

No entanto, na prática, estudos experimentais mostraram que muitos ditadores fazem divisões mais igualitárias ou altruístas do que o esperado. Isso indica que fatores como empatia, normas sociais e preocupações com a reputação podem influenciar as decisões do ditador. Alguns ditadores podem optar por compartilhar parte dos recursos de forma a evitar a percepção de injustiça ou para construir uma imagem positiva perante os outros.

O jogo do ditador tem implicações importantes nas áreas de economia, psicologia e ciências sociais. Ele ajuda a compreender como as pessoas tomam decisões em situações de desigualdade de poder e como fatores sociais e psicológicos afetam essas escolhas. Além disso, o jogo do ditador permite refletir sobre questões éticas e morais relacionadas à distribuição de recursos em sociedade.

Em resumo, o jogo do ditador na Teoria dos Jogos é um jogo que explora a tomada de decisão em situações de poder unilateral, em que o ditador tem total controle sobre a distribuição de recursos. Ele fornece *insights* sobre como as pessoas se comportam em situações de desigualdade de poder e como fatores como empatia, normas sociais e reputação podem influenciar suas decisões [26].

1.5.5 Jogo da Centopéia

O Jogo da Centopéia, também conhecido como Jogo *Centipede*, é um jogo clássico na Teoria dos Jogos que ilustra o dilema entre a cooperação de longo prazo e o interesse próprio imediato. Ele é uma representação de um jogo sequencial de informações perfeitas, ou seja, os jogadores conhecem todas as ações tomadas anteriormente.

No Jogo da Centopéia, existem dois jogadores, que alternam as ações em cada etapa. O jogador 1 tem o papel de iniciar o jogo, e a cada etapa, ele tem duas opções: "Continuar" ou "Parar". Se o jogador 1 escolher "Continuar", o jogo prossegue para a próxima etapa, e o jogador 2, por sua vez, também terá a opção de "Continuar" ou "Parar". Esse processo continua alternando entre os jogadores até que um dos jogadores escolha "Parar".

A dinâmica do jogo é baseada nos seguintes princípios: a cada etapa, um valor fixo de recompensa é adicionado ao prêmio acumulado. No entanto, se um dos jogadores escolher "Parar", o jogo termina, e o jogador que parou recebe a recompensa acumulada até aquele ponto. Por outro lado, se ambos os jogadores escolherem "Continuar" em todas as etapas, o jogo continua, e o valor da recompensa continua a aumentar.

O dilema do Jogo da Centopéia surge da decisão de quando parar. Na teoria, seria racional para o jogador 1 parar logo na primeira etapa, pois assim ele garantiria pelo menos algum ganho. No entanto, na prática, se ambos os jogadores escolherem "Continuar" em todas as etapas, o prêmio acumulado cresce significativamente, tornando essa uma escolha tentadora.

O Jogo da Centopéia ilustra o conflito entre o interesse próprio de curto prazo e a maximização do ganho coletivo a longo prazo. Ambos os jogadores têm a oportunidade de obter um resultado melhor se continuarem cooperando e escolherem "Continuar" em todas as etapas. No entanto, a incerteza sobre a decisão do outro jogador, bem como a tentação de garantir um ganho mínimo imediato, pode levar à quebra da cooperação e ao resultado ótimo para ambos.

A análise desse jogo revela questões importantes sobre confiança, estratégia e tomada de decisão em situações de interação repetida. O Jogo da Centopéia é frequentemente usado para explorar os conceitos de equilíbrio, em que as estratégias escolhidas em cada etapa são consistentes com as estratégias adotadas em etapas anteriores.

Em suma, o Jogo da Centopéia na Teoria dos Jogos é um jogo sequencial que coloca os jogadores diante do dilema entre continuar a cooperação de longo prazo ou buscar o interesse próprio de curto prazo. Ele ilustra a importância da confiança e da estratégia em situações de interação repetida, onde a maximização do ganho coletivo requer a superação do desejo imediato de garantir um ganho mínimo. A análise desse jogo contribui para a compreensão das dinâmicas de cooperação e competição na tomada de decisão [27].

1.5.6 Jogo do *Off*

O Jogo do *Off* é um modelo matemático da teoria dos jogos que simula uma situação de conflito entre dois jogadores, denominados A e B. Nesse jogo, ambos os jogadores devem fazer uma escolha simultânea entre duas ações possíveis: *"on"* (ligado) ou *"off"* (desligado).

As regras do jogo são as seguintes: se ambos os jogadores escolherem *"on"*, eles sofrem um prejuízo y. Se ambos escolherem *"off"*, eles recebem um prêmio x. No entanto, se apenas um jogador escolher *"on"* e o outro escolher *"off"*, o jogador que escolheu *"on"* sofre um prejuízo y enquanto o outro jogador recebe um prêmio x, como na Figura 1.15.

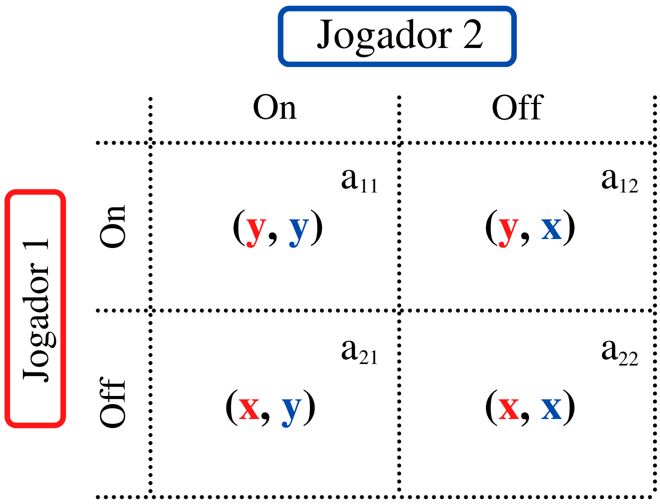

Figura 1.15: Matriz de pagamento do jogo do *Off* [19].

O Jogo do *Off* é um exemplo de jogo não-cooperativo, pois não há nenhuma maneira de os jogadores se colaborarem para maximizar suas recompensas. Cada jogador deve tomar sua decisão de forma independente, visando maximizar seus próprios ganhos, sem considerar as escolhas dos outros jogadores.

Na teoria dos jogos, o equilíbrio de Nash, como já citado anteriormente, é uma estratégia em que cada jogador escolhe a estratégia que é a melhor para ele, levando em consideração as estratégias escolhidas pelos outros jogadores. No caso do Jogo do *"Off"*, o equilíbrio de Nash é a estratégia *"on"* para ambos os jogadores. Isso significa que, independentemente da escolha do outro jogador, cada jogador escolherá *"on"*. No entanto, essa estratégia resulta em prejuízo para ambos os jogadores.

O Jogo do *Off* é uma ferramenta útil para compreender como as escolhas individuais afetam o resultado coletivo em situações de conflito. Ele permite explorar questões relacionadas à tomada de decisão em situações de incerteza e ao comportamento humano em situações de negociação. Além disso, o jogo pode ser adaptado e utilizado em diferentes contextos, como estudos de economia, ciências sociais e até mesmo em estratégias de negociação e resolução de conflitos na vida real [28].

Capítulo 2

Jogo de bens públicos

A teoria dos jogos de bens públicos foi desenvolvida ao longo do tempo por um grupo diversificado de economistas e matemáticos, não podendo ser atribuída a um único criador. Diferentes pesquisadores contribuíram significativamente para o seu desenvolvimento histórico.

John von Neumann e Oskar Morgenstern lançaram as bases da teoria dos jogos em geral com o livro *"Theory of Games and Economic Behavior"*, publicado em 1944. Eles estabeleceram os fundamentos matemáticos dessa teoria e suas aplicações em situações estratégicas, como já mencionado anteriormente no capítulo 1.

No contexto específico dos bens públicos, economistas como Paul Samuelson (1915-2009) e Kenneth Arrow (1924-2017) (Figura 2.1) foram pioneiros na abordagem de questões relacionadas à provisão e ao uso eficiente desses bens em suas pesquisas nas décadas de 1950 e 1960. Arrow, por exemplo, desenvolveu o "Teorema da Impossibilidade", que discute as dificuldades de tomar decisões coletivas em cenários de preferências individuais divergentes [29].

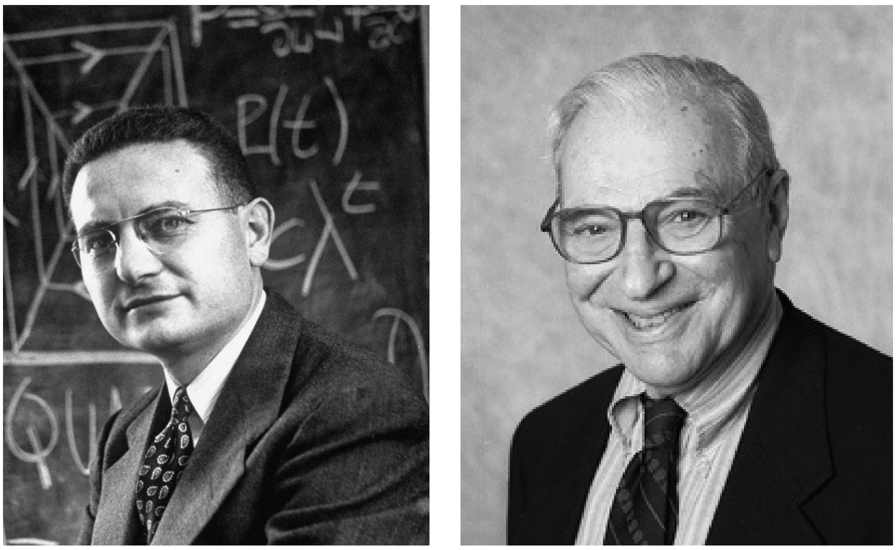

Figura 2.1: Fotografias de Paul Samuelson e Kenneth Arrow, respectivamente [30] [31].

Assim, a teoria dos jogos de bens públicos é o resultado de uma colaboração entre diversos pesquisadores, e sua compreensão continua a evoluir com as contribuições de muitos acadêmicos em diferentes campos, como economia, matemática, ciência política e teoria da decisão.

Os jogos de bens públicos são um campo de estudo na teoria dos jogos que analisa as interações entre indivíduos em situações onde eles enfrentam um dilema entre o interesse próprio e o benefício coletivo. Nesse contexto, os jogadores devem decidir se contribuem para a provisão de um bem público compartilhado ou se optam por não contribuir.

Um bem público é caracterizado por ser não excludente e não rival. Isso significa que sua utilização não pode ser negada a nenhum indivíduo e o consumo de um indivíduo não reduz a disponibilidade para os outros. Exemplos comuns de bens públicos incluem a proteção ambiental, a pesquisa científica e a infraestrutura pública [27].

Nos jogos de bens públicos, os jogadores têm uma quantia inicial, que representa seus recursos disponíveis. Eles devem decidir quanto dessa quantia desejam contribuir para o bem público. As contribuições de todos os jogadores são somadas para formar o tamanho total do bem público. Após as contribuições serem feitas, o benefício coletivo é calculado e distribuído igualmente entre todos os jogadores, independentemente de sua contribuição individual. Isso significa que todos os jogadores compartilham igualmente os benefícios do bem público, independentemente de quanto contribuíram.

O desafio nos jogos de bens públicos é que, do ponto de vista individual, é racional optar por não contribuir. Isso ocorre porque, ao não contribuir, o jogador evita o custo da contribuição, mas ainda pode se beneficiar das contribuições feitas pelos outros jogadores. No entanto, se todos os jogadores adotarem essa estratégia, o bem público não será fornecido.

Em vista disso, o principal objetivo dos jogos de bens públicos é encontrar soluções para incentivar a cooperação e motivar os jogadores a contribuírem para o bem público, mesmo quando isso pode não ser a escolha mais racional em termos individuais. Esses jogos são amplamente estudados para entender os fatores que influenciam a cooperação e desenvolver estratégias que promovam o benefício coletivo [29].

2.1 Estrutura

Um jogo de bens públicos possui uma estrutura específica que envolve o número de jogadores, suas interações e as contribuições para o bem público. O jogo pode envolver dois ou mais jogadores, sendo que quanto maior o número de jogadores, mais complexas se tornam as interações.

Cada jogador tem a capacidade de interagir com outros jogadores no jogo, o que significa que suas decisões podem influenciar as escolhas e resultados dos demais participantes. Cada jogador recebe uma quantia inicial, que representa a quantidade de recursos disponíveis para eles no início do jogo.

Os jogadores devem decidir quanto dessa quantia desejam contribuir para o bem público, o que é uma escolha estratégica que afeta tanto o jogador individualmente quanto o resultado coletivo do jogo. As contribuições de todos os jogadores são somadas para formar o tamanho total do bem público, e quanto mais contribuições forem feitas, maior será o benefício coletivo gerado.

Após as contribuições dos jogadores, o benefício coletivo é calculado levando em consideração o tamanho total do bem público, que é determinado pelas contribuições individuais. Esse benefício é então distribuído igualmente entre todos os jogadores, promovendo a equidade e a justiça, e incentivando a cooperação entre os jogadores.

O objetivo dos jogadores nos jogos de bens públicos é maximizar sua utilidade pessoal, que é afetada pela quantidade que contribuem para o bem público e pela parte do benefício coletivo que recebem. Cada jogador enfrenta um dilema entre o interesse próprio e o benefício coletivo, pois individualmente há o incentivo para não contribuir e se beneficiar das contribuições dos outros jogadores. No entanto, a cooperação e a contribuição para o bem público podem resultar em um benefício coletivo maior para todos os jogadores.

A compreensão dessa estrutura é fundamental para analisar as escolhas e estratégias dos jogadores, bem como para explorar formas de incentivar a cooperação e a contribuição para o bem público. Ao considerar o número de jogadores, suas interações, a quantia inicial, as contribuições e a distribuição do benefício coletivo, é possível investigar as dinâmicas e resultados desse tipo de jogo, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias que promovam a cooperação e o benefício mútuo em diversas áreas de aplicação [27].

2.2 Estratégias

No contexto dos jogos de bens públicos, as estratégias adotadas pelos jogadores são essenciais para determinar os resultados e as dinâmicas do jogo.

Os jogadores têm a opção de contribuir para o bem público ou optar por não contribuir, aproveitando as contribuições dos outros jogadores. A estratégia de contribuição envolve investir parte da quantia no bem público, visando promover a cooperação e maximizar o benefício coletivo. Por outro lado, a estratégia de deserção implica não fazer nenhuma contribuição e aproveitar os benefícios gerados pelas contribuições dos outros jogadores, sem incorrer no custo da própria contribuição.

O dilema do prisioneiro e o Equilíbrio de Nash são conceitos amplamente usado para ilustrar o conflito entre o interesse próprio e o benefício coletivo nos jogos de bens públicos. De acordo com estes conceitos, todos os jogadores escolhem não contribuir, visando na maximização do seu próprio ganho pessoal, independentemente das escolhas dos outros jogadores. Assim, o resultado será um cenário em que nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia individualmente, dada a estratégia dos demais jogadores.

A mudança de estratégias é baseada em um conceito que discutiremos mais a frente chamado de Regra Evolucionária, o qual atribui o fator que determina a mudança de estratégia, ou seja, determina a dinâmica do sistema. Dinâmicas como *"tit-for-tat"* e reciprocidade, são baseadas nas ações dos outros jogadores e envolvem ajustar o comportamento de acordo com as escolhas dos demais. A Dinâmica *"tit-for-tat"* começa cooperando e replica a escolha do oponente nas rodadas subsequentes. Se o oponente cooperar, ela continuará cooperando, se o oponente optar por não cooperar, ela também deixará de cooperar. A reciprocidade é um fator importante nos jogos de bens públicos, permitindo que os jogadores retribuam a cooperação com cooperação e a não cooperação com não cooperação [27].

Diversas estratégias e dinâmicas podem ser implementadas nos jogos de bens públicos com o intuito de fomentar a cooperação e otimizar o benefício coletivo. Nesse contexto, a reputação emerge como um fator importante, uma vez que os jogadores levam em consideração as ações pregressas dos demais ao tomar suas próprias decisões. Quando um jogador ganha reconhecimento por sua cooperação, é mais provável que os outros sigam o exemplo e cooperem em resposta.

As normas sociais também podem ter um impacto significativo na cooperação nos jogos de bens públicos. Se houver uma norma estabelecida de cooperação e contribuição para o bem público, os jogadores podem sentir uma pressão social para agir de acordo com essas expectativas. As pressões sociais podem incluir incentivos para a cooperação, como elogios ou recompensas sociais, ou penalidades sociais para o não cumprimento das normas estabelecidas.

A introdução de mecanismos de punição e recompensa pode influenciar a cooperação nos jogos de bens públicos. Os jogadores podem ter a capacidade de punir aqueles que não contribuem adequadamente para o bem público, reduzindo seus ganhos ou impondo algum tipo de custo. Da mesma forma, os jogadores podem ser recompensados por suas contribuições, incentivando-os a cooperar e a escolher a opção de contribuir.

Nem todos os jogadores adotam estratégias estritamente racionais nos jogos de bens públicos. Fatores psicológicos, como aversão à desigualdade, senso de justiça e emoções, podem influenciar as escolhas e a cooperação. Além disso, a incerteza, a confiança e a percepção de risco também podem afetar as decisões dos jogadores em relação à contribuição para o bem público.

A compreensão desses fatores é crucial para desenvolver estratégias e abordagens que promovam a cooperação nos jogos de bens públicos. Ao levar em consideração a reciprocidade, a reputação, as normas sociais, as pressões sociais, os mecanismos de punição e recompensa, bem como os aspectos psicológicos dos jogadores, é possível projetar intervenções e políticas mais eficazes para incentivar a contribuição para o bem público [29].

2.3 Regra Evolucionária

A regra evolucionária associada a um sistema de indivíduos é o que determina como essa população de jogadores poderá mudar seu perfil estratégico no decorrer do jogo. Existem diversos modelos de regras evolucionários, cada uma delas de acordo a dinâmica envolvida no jogo a ser analisado, dentre as mais estudadas temos a chamada Regra do Replicador ou Equação do Replicador, a qual se assemelha um pouco com as dinâmicas .

Essa regra estabelece que, em um sistema de indivíduos, o crescimento de um tipo específico de indivíduo está diretamente ligado à diferença de *payoff* que esse tipo de indivíduo obtém em relação à média de *payoff* de todo o sistema. Em outras palavras, a expansão da presença de jogadores que adotam uma estratégia particular é influenciada pela diferença entre o *payoff* que eles recebem e a média dos *payoffs* de todos os jogadores. Essa abordagem nos permite descrever a regra evolutiva como

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = p_i(U_i - \bar{U}). \tag{2.1}$$

em que $p_i(t)$ representa a densidade de jogadores que jogam utilizando a estratégia i, U_i representa o *payoff* associado à estratégia i e $\bar{U}$ representa a média do *payoff* total de todos os jogadores.

Assim, a Regra do Replicador nos diz que jogadores tendem a mudar de estratégia quando uma estratégia se mostra mais bem sucedida que a sua, ou seja, quando um jogador X nota que um jogador Y, com estratégia diferente da dele, recebe um *payoff* maior que o dele, o jogador X tende a replicar a estratégia do jogador Y. Este conceito é de grande importância para a análise do jogo de bens públicos [32].

2.4 Topologia

As estruturas geométricas desempenham um papel crucial e multifacetado na análise e modelagem de jogos de bens públicos, uma vez que fornecem a base para a representação de cenários complexos onde os participantes enfrentam desafios na tomada de decisões estratégicas relacionadas ao uso de recursos compartilhados. Cada uma destas estruturas geométricas apresenta características intrínsecas, que moldam de forma distinta a dinâmica envolvida nos jogos. Geralmente, estas estruturas são chamadas de redes regulares.

2.4.1 Rede Hexagonal

A rede hexagonal é composta por hexágonos regulares conectados uns aos outros. Cada hexágono tem seis vizinhos diretos, como representado na figura 2.2. Este tipo de estrutura é relevante em cenários onde a competição ocorre em direções adjacentes, como a exploração de recursos naturais ou a expansão territorial. Sua simetria e conectividade direta entre hexágonos próximos a tornam ideal para modelar interações estratégicas em tais contextos.

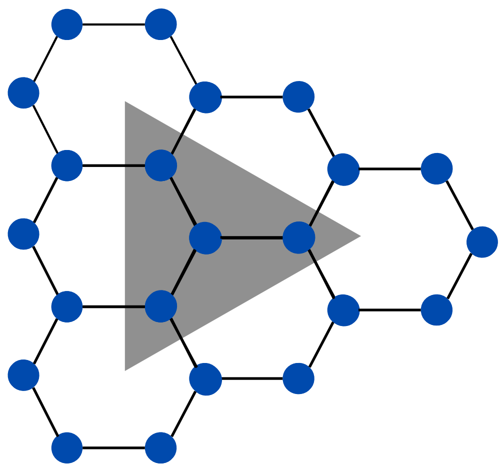

Figura 2.2: Estrutura de uma rede hexagonal, em que cada ponto azul representa um jogador, as linhas representam as interações e a região cinza representa o grupo do jogador analisado e seus primeiros vizinhos.

2.4.2 Rede Quadrada com Vizinhança de von Neumann

A rede quadrada com vizinhança de von Neumann consiste em quadrados regulares, alinhados de forma que cada quadrado tem quatro quadrados vizinhos imediatos, um em cada direção cardeal (norte, sul, leste e oeste), como representado na figura 2.3. Esta estrutura é comumente utilizada para simular jogos em que os participantes devem tomar decisões em direções cardeais. É uma escolha típica para representar jogos de bens públicos, facilitando a ilustração de princípios de dinâmica de sistemas e simulações.

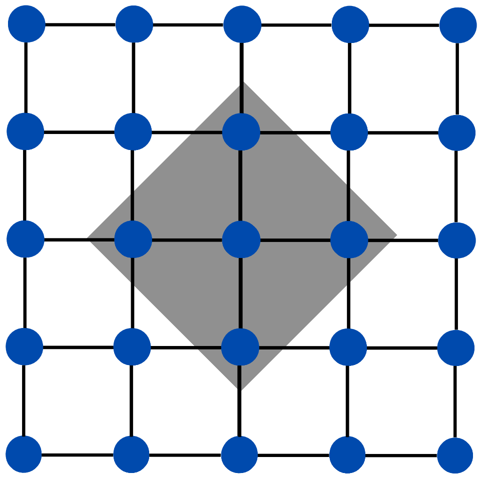

Figura 2.3: Estrutura da rede quadrada com vizinhança de von Neumann, em que cada ponto azul representa um jogador, as linhas representam as interações e a região cinza representa o grupo do jogador analisado e seus primeiros vizinhos.

2.4.3 Rede Quadrada com Vizinhança de Moore

A rede quadrada com vizinhança de Moore é semelhante à rede quadrada convencional, mas cada nó tem oito vizinhos, incluindo as diagonais, como representado na figura 2.4. Essa estrutura é relevante em jogos e simulações que envolvem movimentos em várias direções, como jogos de estratégia que exigem deslocamentos diagonais. A conectividade diagonal é importante em muitos cenários de jogos de bens públicos.

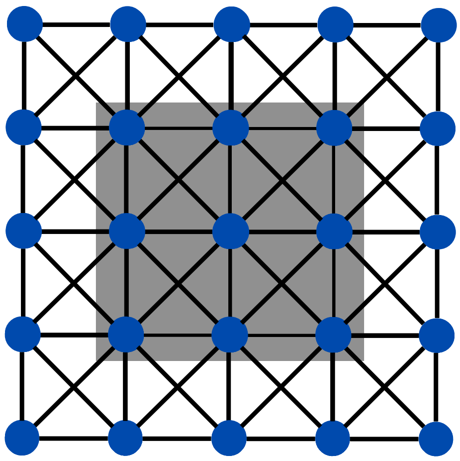

Figura 2.4: Estrutura da rede quadrada com vizinhança de Moore, em que cada ponto azul representa um jogador, as linhas representam as interações e a região cinza representa o grupo do jogador analisado e seus primeiros vizinhos.

2.4.4 Rede Kagomé

A rede Kagomé é uma malha geométrica formada por triângulos entrelaçados, que se combinam para criar uma malha hexagonal, como representado na figura 2.5. Cada nó tem quatro vizinhos, de forma que se assemelha a rede quadrada de von Neumann, entretanto, se diferencia no fato de que dentro da rede Kagomé, um jogador pode ter até dois vizinhos em comum com seus vizinhos, enquanto na rede quadrada de von Neumann só haverá um vizinho em comum. A rede Kagomé é menos comum, mas pode ser usada para modelar cenários mais complexos de jogos de bens públicos, onde a conectividade não segue um padrão regular. Sua topologia única pode ser aplicada em jogos que envolvem estratégias não convencionais.

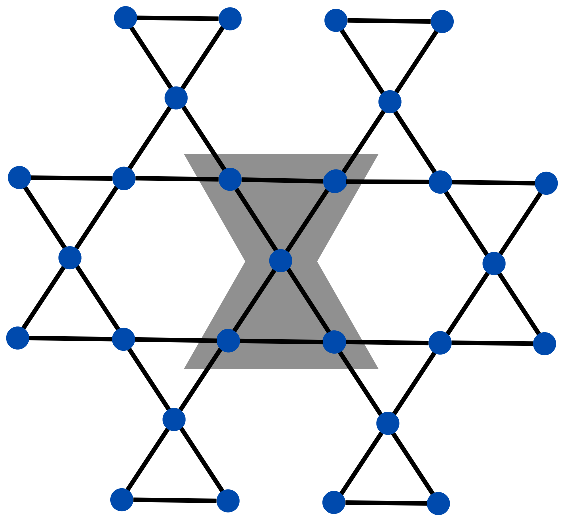

Figura 2.5: Estrutura da rede Kagomé, em que cada ponto azul representa um jogador, as linhas representam as interações e a região cinza representa o grupo do jogador analisado e seus primeiros vizinhos.

2.4.5 Rede Triangular

A rede triangular é composta por triângulos regulares conectados uns aos outros, formando uma malha triangular, de forma que cada nó possui seis vizinhos, como representado na figura 2.6. A rede triangular encontra aplicação em jogos onde a competição ocorre em múltiplas direções. Ela pode ser usada para modelar situações onde a alocação eficiente de recursos em diversas direções é essencial.

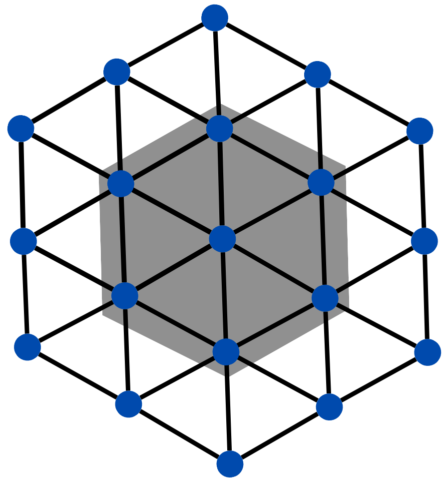

Figura 2.6: Estrutura da rede triangular, em que cada ponto azul representa um jogador, as linhas representam as interações e a região cinza representa o grupo do jogador analisado e seus primeiros vizinhos.

2.5 Aplicações

Os jogos de bens públicos são uma ferramenta versátil e adaptável, que pode ser estendida de várias maneiras para capturar nuances adicionais e refletir diferentes contextos. Áreas, como economia, psicologia, sociologia e tomada de decisões coletivas possuem diversos cenários que podem ser explorados com o uso de jogos de bens públicos. Eles são usados nos estudos econômicos para analisar como a interação entre agentes econômicos afeta a alocação de recursos e o bem estar geral da sociedade. Esses jogos ajudam a entender como os indivíduos tomam decisões em situações onde há um conflito entre seus interesses individuais e o benefício coletivo. Além disso, são utilizados para examinar as estratégias adotadas pelos jogadores e como essas estratégias afetam os resultados do jogo.

Também podem ser aplicados na análise de situações em que decisões coletivas precisam ser tomadas, como políticas públicas, gestão de recursos comuns e negociações em grupos. Eles fornecem *insights* valiosos sobre como as decisões individuais dos participantes afetam o resultado coletivo e a importância da cooperação para alcançar resultados socialmente benéficos. No desenvolvimento de políticas públicas, os jogos de bens públicos são utilizados para lidar com questões como a preservação ambiental, compartilhamento de recursos e distribuição equitativa de benefícios sociais. Através da análise desses jogos, é possível identificar incentivos, estratégias e mecanismos que promovam a cooperação e a contribuição para o bem público, auxiliando na formulação de políticas que incentivem ações coletivas e maximizem o benefício geral da sociedade.

Além das áreas mencionadas acima, os jogos de bens públicos também são amplamente utilizados em pesquisas sobre comportamento social, cooperação em ambientes de trabalho, gestão de recursos naturais, desenvolvimento de estratégias de marketing social, entre outros. A análise desses jogos ajuda a compreender como as interações sociais e os incentivos individuais afetam as escolhas e o comportamento humano em diversos contextos.

Em economia e políticas públicas, os jogos de bens públicos são aplicados na formulação de políticas que promovam a cooperação e maximizem o benefício coletivo. Esses jogos fornecem *insights* sobre como projetar incentivos e mecanismos de governança que incentivem a contribuição para o bem público.

Na área de economia comportamental e finanças, os jogos de bens públicos ajudam a entender as escolhas dos indivíduos em situações de cooperação. Eles exploram os fatores psicológicos, emocionais e sociais que influenciam o comportamento humano em relação à contribuição para o bem público.

Essas aplicações práticas dos jogos de bens públicos abrangem diversos setores e disciplinas, desempenhando um papel fundamental na gestão de recursos naturais, na formulação de políticas, na economia comportamental, nas finanças e na educação. Ao utilizar esses jogos, é possível tomar decisões mais informadas e projetar estratégias eficazes que promovam a cooperação, o uso sustentável dos recursos e o benefício coletivo. Os jogos de bens públicos fornecem *insights* valiosos sobre as dinâmicas da cooperação, as estratégias eficazes e a importância da tomada de decisões coletivas para enfrentar os desafios sociais e econômicos que enfrentamos hoje.

2.6 Desafios

Embora os jogos de bens públicos sejam amplamente aplicáveis, eles também enfrentam desafios. O dilema do prisioneiro, que representa o conflito entre o interesse próprio e o benefício coletivo, é um desafio nos jogos de bens públicos. Os jogadores podem ser incentivados a optar pela deserção, não contribuindo para o bem público em busca de benefícios pessoais sem os custos da contribuição. O desafio é superar esse dilema e incentivar a cooperação em vez da deserção.

A heterogeneidade dos jogadores em termos de preferências, motivações e capacidades é outra limitação. Essa diversidade pode levar a diferentes estratégias e comportamentos, dificultando a previsão e compreensão do resultado coletivo. A inclusão de jogadores com habilidades e motivações distintas pode afetar a dinâmica da cooperação e exigir estratégias adaptativas mais complexas.

O contexto e a estrutura social em que os jogos de bens públicos ocorrem também desempenham um papel importante em seus resultados. Normas sociais, pressões sociais, relações de poder e outros fatores contextuais podem influenciar as escolhas e comportamentos dos jogadores. Esses fatores dificultam a generalização dos resultados dos jogos de bens públicos para diferentes contextos sociais e culturais.

Os jogos de bens públicos pressupõem que os jogadores sejam, em sua maior parte, racionais e tenham acesso a informações completas sobre o jogo e o comportamento dos outros jogadores. No entanto, na prática, os jogadores podem ter limitações cognitivas, emoções, aversões e informações imperfeitas, o que afeta suas decisões e estratégias. Essas limitações tornam a previsão e análise dos resultados dos jogos de bens públicos mais desafiadoras.

Ao enfrentar esses desafios, é possível desenvolver estratégias mais eficazes para promover a cooperação e a contribuição para o bem público. Essa conscientização permite o desenvolvimento de intervenções adaptadas aos contextos específicos, considerando a diversidade de jogadores e incorporando fatores sociais, psicológicos e institucionais relevantes para o jogo [11].

2.7 Modelos que visam o aumento da cooperação

A falta de cooperação é um desafio comum nos jogos de bens públicos. Muitas vezes, os indivíduos são incentivados a agir de forma egoísta, buscando aproveitar os benefícios do bem público sem contribuir para sua provisão. Isso leva ao já mencionado "dilema do prisioneiro", em que a racionalidade individual gera um resultado ruim para o grupo como um todo.

Diante desse cenário, surgiram modelos e abordagens que buscam incentivar a cooperação em jogos de bens públicos. Esses modelos visam encontrar estratégias e mecanismos que encorajem os indivíduos a contribuir de maneira mais consistente para o bem público, visando aumentar o benefício coletivo.

Esses modelos que visam buscar o aumento da cooperação em jogos de bens públicos são de extrema relevância, tanto para o entendimento teórico dos comportamentos sociais como para a aplicação prática em diversos contextos. Eles fornecem *insights* valiosos sobre como estratégias e incentivos podem influenciar o comportamento humano e auxiliar na criação de políticas públicas, na resolução de problemas coletivos e na promoção de uma sociedade mais cooperativa.

2.7.1 Efeitos do tamanho do grupo

O artigo intitulado "Efeitos do tamanho do grupo na evolução da cooperação no jogo espacial de bens públicos" [33], dos pesquisadores Attila Szolnoki e Matjaž Perc, aborda a questão da cooperação em jogos de bens públicos, com foco nos efeitos do tamanho do grupo nesse contexto. Os pesquisadores realizaram simulações computacionais para investigar como o tamanho do grupo influencia a evolução da cooperação e descobriram resultados interessantes.

Neste estudo, os pesquisadores descobriram que ao aumentar o tamanho do grupo, a cooperação pode ser promovida por meio de reciprocidade espacial em grupos muito grandes. Isso significa que a promoção da cooperação não depende apenas das conexões entre jogadores, mas também do fato de que os indivíduos têm a oportunidade de coletar recompensas separadamente de seus oponentes diretos.

Isso significa que jogadores distantes podem influenciar indiretamente as estratégias uns dos outros, mesmo que não compartilhem diretamente a mesma interação. Essa capacidade de interagir com jogadores distantes aumenta a eficácia dos grandes grupos na promoção da cooperação, especialmente em condições desfavoráveis.

As descobertas do estudo foram apoiadas por simulações computacionais e análises estatísticas.

2.7.2 Jogadores Punidores

O jogo de bens públicos é uma estratégia amplamente utilizada para modelar a interação entre jogadores, em que alguns indivíduos escolhem arcar com um custo individual para investir em um bem coletivo, enquanto outros optam por não contribuir. Essa dinâmica do jogo cria uma forte tentação de desertar, mas diversos mecanismos foram propostos para explicar como a cooperação pode emergir em sistemas competitivos.

Nesse contexto, o artigo intitulado "Comportamento simbiótico no jogo de bens públicos com punição altruísta" [34], tem como objetivo analisar o efeito dos punidores altruístas no jogo de bens públicos em uma estrutura reticulada, com o intuito de promover a cooperação. Os pesquisadores Lucas S. Flores, Heitor C.M. Fernandes, Marco

A. Amaral e Mendeli H. Vainstein realizaram simulações computacionais e discutiram as implicações desses resultados para a teoria da evolução.

O jogo de bens públicos foi modelado em uma rede quadrada, na qual três estratégias estavam presentes, sendo elas cooperação, deserção e punição. Os jogadores interagiam com seus vizinhos mais próximos, e as estratégias eram inicialmente distribuídas aleatoriamente. Enquanto os cooperadores e punidores contribuíam para um fundo comum, os desertores optavam por não contribuir. Além disso, os punidores contribuíam com uma taxa adicional utilizada para punir os desertores próximos.

O montante acumulado no fundo comum era multiplicado por um fator de sinergia e dividido igualmente entre todos os jogadores, independentemente de sua estratégia. Os punidores pagavam uma taxa por cada infrator em seu grupo, enquanto os infratores recebiam uma multa por cada punidor em seu grupo. A dinâmica do sistema era simulada usando uma regra do replicador.

Os resultados do estudo indicaram que a presença de punidores, que pagavam uma taxa por cada indivíduo que trapaceava em seu grupo, incentivava mais jogadores a adotarem a estratégia de cooperador, contribuindo igualmente para o fundo comum. Sem a punição, a cooperação só sobreviveria com um incentivo significativo para evitar a invasão, mas com a presença dos punidores, as estratégias altruístas tinham uma maior chance de sobreviver em uma ampla gama de parâmetros. A formação de aglomerados de punidores foi essencial para compartilhar custos e promover a reciprocidade espacial. Além disso, a simbiose entre cooperadores e punidores permitiu que ambas as estratégias sobrevivessem mesmo em situações de alto custo de punição.

Esses resultados têm aplicações significativas em diferentes contextos, desde modelos de evolução animal até a dinâmica de grupos humanos e redes sociais. A simbiose emergente entre cooperadores e punidores pode ser vista como uma forma de cooperação forte e mutuamente benéfica em muitos sistemas complexos, fornecendo *insights* valiosos para o estudo e a compreensão da cooperação em diversas áreas.

2.7.3 Jogadores Conformistas

A teoria evolucionária dos jogos oferece um quadro teórico poderoso para estudar o surgimento e a manutenção da cooperação. Diversos jogos, como o Dilema do Prisioneiro, o Jogo da Caça ao Veado e o Jogo do Ultimato, os quais foram mencionadas no capítulo 1, têm sido amplamente utilizados como paradigmas para descrever as interações entre indivíduos. Pesquisas experimentais recentes também sugerem que pessoas influenciadas por informações sociais tendem a se conformar com comportamentos positivos em ambientes altruístas. Nos jogos evolutivos, os conformistas aprendem com a maioria de seus vizinhos com alta probabilidade, em vez de fazer comparações individuais de *payoff*.

A fim de investigar os efeitos do limite de conformidade na cooperação em jogos evolutivos espaciais, os pesquisadores Luo-Luo Jianga, Jian Gao, Zhi Chenc, Wen-Jing Li e Jürgen Kurths introduziram um parâmetro ajustável para caracterizar o limite de conformidade dos indivíduos orientados pela conformidade, no artigo intitulado “Reduzindo o efeito espectador por meio da diminuição do tamanho do grupo para resolver o dilema social do risco coletivo” [35]. Foi descoberto que sempre existe um valor ideal deste parâmetro que leva a um nível mais elevado de cooperação na população.

Esse resultado sugere que é importante estabelecer um limite de conformidade apropriado na população, em vez de adotar um limite estereotipado baseado na maioria, como tomar metade do número como referência, ao buscar promover a cooperação aproveitando as características de conformidade dos indivíduos.

É importante ressaltar que, neste estudo, foi assumido que o limite de conformidade é homogêneo para toda a população. No entanto, na sociedade real, os indivíduos podem ter diferentes limites de conformidade. Sendo assim, existe a possibilidade de investigar como a heterogeneidade nos limites de conformidade pode afetar a cooperação na população, explorando a coevolução de estratégias e limites de conformidade, considerando a possibilidade de os indivíduos alterarem não apenas suas estratégias, mas também a forma como aprendem ao longo da evolução.

Este estudo contribui para uma compreensão mais aprofundada dos efeitos da conformidade na cooperação em jogos evolutivos espaciais. Foi descoberto que a conformidade pode ter um impacto significativo na cooperação e que existe um valor ideal de limite de conformidade que leva a um maior nível de cooperação na população. Esses resultados fornecem *insights* valiosos para promover a cooperação em diferentes contextos sociais e ajudam a avançar nosso entendimento sobre o surgimento e a manutenção da cooperação entre indivíduos egoístas.

2.7.4 Jogadores Expulsores

Na maioria dos sistemas analisados, a cooperação geralmente vem acompanhada de algumas concessões ou do pagamento de um custo. A presença de jogadores com este comportamento contradiz a teoria darwiniana, que sugere que indivíduos egoístas tendem a maximizar seus próprios lucros, sem considerar os benefícios dos outros ou do grupo.

No entanto, nas situações do mundo real, maximizar os lucros não é o único objetivo quando os indivíduos atualizam suas estratégias. No sistema estudado no artigo intitulado “Expulsão de piscina e cooperação no jogo espacial de bens públicos” [36] foi introduzida a estratégia de expulsão da piscina pelos pesquisadores Xiaofeng Wang, Maja Duh e Matjaž Perc. Nessa estratégia, os expulsores de piscina desempenham não apenas o papel de cooperadores, contribuindo para a piscina comum, que representa o espaço onde as interações ocorrem, mas também estão dispostos a alocar recursos para expulsar os desertores,ou seja, os jogadores que não contribuem com nenhuma das taxas são expulsos de suas posições atuais e realocados em outros locais vagos.

Portanto, os expulsores de piscina enfrentam duplos dilemas sociais:

- O problema da deserção de primeira ordem: jogadores cooperativos, que contribuem para a piscina comum, parecem se sair pior do que aqueles que não colaboram.
- O problema da deserção de segunda ordem: a expulsão da piscina parece ser um ato altruísta, uma vez que os jogadores que cooperam, mas não contribuem para a expulsão da piscina, estão em uma situação melhor do que os expulsores.

O jogo foi simulado colocando indivíduos aleatoriamente em um mesmo sistema, com uma vizinhança de von Neumann e condições de contorno periódicas. Cada espaço do sistema pode estar vazio ou ocupado por um indivíduo, designado aleatoriamente como cooperador, desertor ou expulsor, com igual probabilidade inicialmente. A dinâmica de imitação ignora a função de inovação, ou seja, a exploração de novas estratégias diferentes das disponíveis entre os jogadores que participam da piscina. Por esse motivo, foi introduzida a dinâmica de exploração, com uma probabilidade ajustável, a qual possibilita que um indivíduo explore aleatoriamente quaisquer outras estratégias disponíveis.

Inicialmente, expulsores sobrevivem no sistema expulsando seus vizinhos defeituosos, bem como formando aglomerados espaciais de tamanhos pequenos, enquanto os cooperadores apenas se mantêm na vizinhança de agrupamentos de expulsores, por não contribuírem para a expulsão.

Com a evolução do sistema, os expulsores afastam os desertores dos aglomerados, formando assim uma camada de espaço vazio ao redor desses aglomerados. Essa camada protege os expulsores e os cooperadores de invasões por parte dos desertores. Dessa forma, os expulsores e cooperadores dominam o sistema por um certo tempo. No entanto, eventualmente, por meio de exploração ou irracionalidade, surge uma estratégia de deserção dentro do aglomerado. Essa estratégia se alastra, levando à volta da deserção como dominante no sistema, em um ciclo de transição de fase.

Os resultados mostram que os cooperadores e expulsores são capazes de sobreviver e até mesmo prevalecer em toda a região de parâmetros, mesmo que os efeitos sinérgicos da cooperação sejam baixos, a ponto de a reciprocidade espacial sozinha não conseguir sustentá-la.

Este modelo oferece oportunidades para futuras investigações sobre as fascinantes conexões entre a física e a sociedade, destacando especialmente como os métodos e abordagens característicos da física podem contribuir para uma compreensão mais aprofundada das sociedades humanas.

Capítulo 3

Modelo do Jogo de Bens Públicos

O jogo de bens públicos analisa situações em que indivíduos enfrentam um dilema entre maximizar seus ganhos pessoais e contribuir para o benefício coletivo. Duas variações comuns desse jogo são o jogo de bens públicos focal (FPGG) e o jogo de bens públicos clássico. A principal diferença entre esses dois está na estrutura dos grupos e na forma como as contribuições são tratadas.

3.1 Clássico

Em um jogo clássico de bens públicos, os participantes se dividem em duas categorias, cooperadores e desertores, cada um adotando uma estratégia específica. Os cooperadores contribuem para o bem comum com uma taxa que é multiplicada pelo fator de sinergia, gerando benefícios para todo o grupo. Em contrapartida, os desertores não contribuem com nenhuma taxa e simplesmente se aproveitam das contribuições dos cooperadores.

Esses jogos de bens públicos nos permitem analisar diversas situações e examinar o comportamento humano em cenários distintos. Um exemplo prático desse tipo de jogo é o cenário em que uma população tem o objetivo de construir uma ponte. Nesse caso, uma parte da população se empenha incansavelmente para finalizar a construção no menor tempo possível, enquanto outra parcela não faz esforço algum e apenas aguarda a conclusão [29].

Dentro desse contexto, podemos identificar três cenários possíveis. No primeiro, toda a população coopera na construção da ponte, resultando em um benefício rápido para todos. No segundo, apenas uma parte da população contribui para a construção, atrasando o benefício para o grupo como um todo. Já no terceiro cenário, ninguém contribui, o que significa que não há benefício algum.

É relevante destacar que, nesse contexto, aqueles que contribuíram para a construção da ponte são chamados de “cooperadores”, enquanto os que não contribuíram são chamados de “desertores”. Os desertores, também chamados de caronas, são jogadores que participam do jogo apenas para se beneficiarem, sem arcar com nenhum custo ou taxa de contribuição.

Portanto, os jogos de bens públicos fornecem uma maneira valiosa de analisar como a cooperação e a não cooperação afetam o resultado e o benefício para os indivíduos envolvidos em um projeto comum, como a construção de uma ponte. Entender essas dinâmicas pode nos ajudar a desenvolver estratégias mais eficazes para incentivar a colaboração e a obtenção de resultados positivos para toda a comunidade.

3.2 Focal

No jogo de bens públicos focal, há um jogador central denominado “jogador focal”, que se une a um grupo composto por seus vizinhos mais próximos. Esse grupo tem um tamanho definido. Cada jogador decide cooperar ou desertar, e suas contribuições ou ausência delas são somadas junto com as dos demais integrantes do grupo. O total é multiplicado pelo fator de sinergia e distribuído igualmente entre todos do grupo, inclusive para os que optaram por desertar.

Portanto, a principal distinção entre o jogo de bens públicos focal e o clássico reside na estrutura do grupo. Enquanto no jogo clássico os grupos são formados aleatoriamente e as contribuições são somadas de maneira global, no jogo focal há um jogador central e seus vizinhos próximos que formam um grupo específico, e as contribuições são somadas e distribuídas apenas entre os integrantes deste grupo. Essas nuances na estrutura dos grupos e no tratamento das contribuições fornecem diferentes perspectivas para analisar o comportamento cooperativo e estratégico dos jogadores em situações de dilema social, além de facilitar a análise do sistema, pois o mesmo evolui mais rapidamente [37].

3.3 Jogo de bens públicos aplicado a uma rede quadrada

No cenário de um jogo de bens públicos com uma rede, os jogadores estão organizados em uma malha quadrada, conforme ilustrado na figura 3.1, a qual representa um espaço dividido em vários quadrados iguais, com mesmo tamanho, que comportam os jogadores. O jogador em foco está rodeado por vizinhos, que também são participantes do jogo, e cada um deles tem a opção de cooperar (C) ou desertar (D). Para conduzir a análise, escolhemos aleatoriamente um jogador que interagirá com os vizinhos ao seu redor. O ganho ou *payoff* obtido por cada jogador é determinado com base nas estratégias adotadas por ele e seus vizinhos durante as rodadas de interação [29].

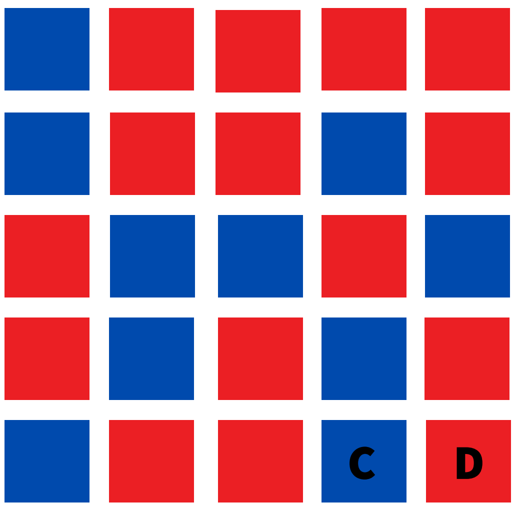

Figura 3.1: Representação de uma rede quadrada, em que C representa os cooperadores e D os desertores.

O número de rodadas de interação pode variar conforme o tamanho do grupo de jogadores. Por exemplo, quando nomeamos o grupo como $G = 2$, isso indica que, em cada rodada, dois jogadores interagem: o jogador analisado e um de seus vizinhos. Para uma rede quadrada, o jogador em análise estará cercado por quatro vizinhos, permitindo-lhe interagir com um deles em cada rodada, como ilustrado na figura 3.2. Isso resulta em um total de 4 rodadas de interação, uma para cada possibilidade de interação entre o jogador analisado e seus vizinhos. Essa abordagem possibilita explorar diversas configurações de interações dentro do grupo, oferecendo uma visão mais completa sobre o comportamento dos jogadores e suas estratégias no contexto do jogo de bens públicos.

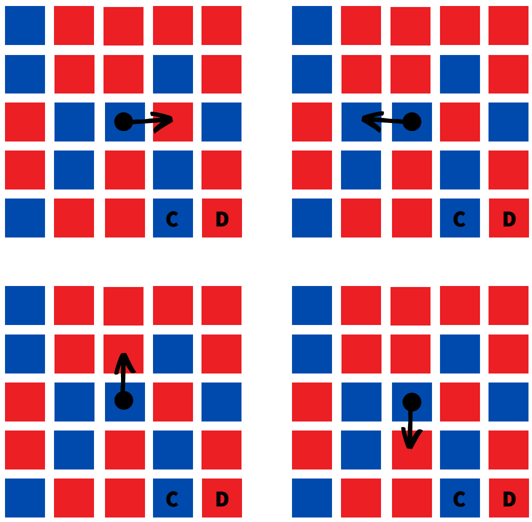

Figura 3.2: Representação das rodadas de interação para um grupo $G = 2$, em que o jogador analisado está marcado com um círculo.

Seguindo a mesma lógica para um grupo $G = 3$, ilustrada na figura 3.3, o jogador em análise irá interagir com dois de seus vizinhos em cada rodada, o que resultará em um total de 18 rodadas para que todas as possibilidades de interação sejam atendidas.

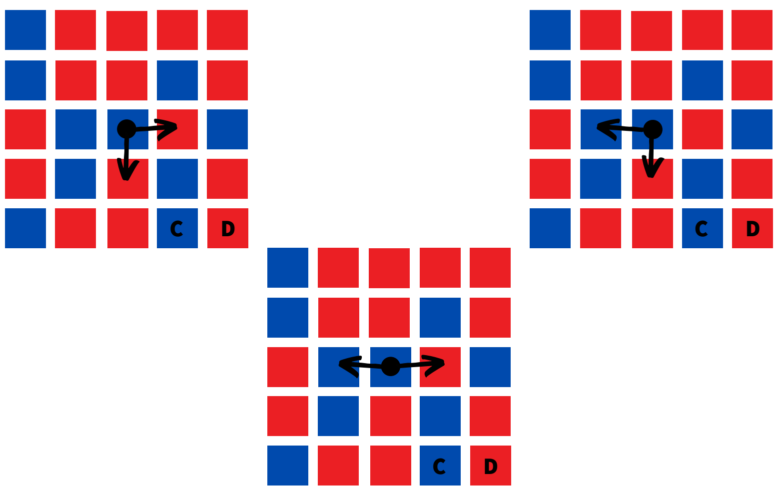

Figura 3.3: Representação de 3 das 18 rodadas de interação para um grupo $G = 3$, em que o jogador analisado está marcado com um círculo.

Para grupos maiores, como $G = 4$ e $G = 5$, figuras 3.4 e 3.5, teremos 16 e 5 rodadas de interação, respectivamente.

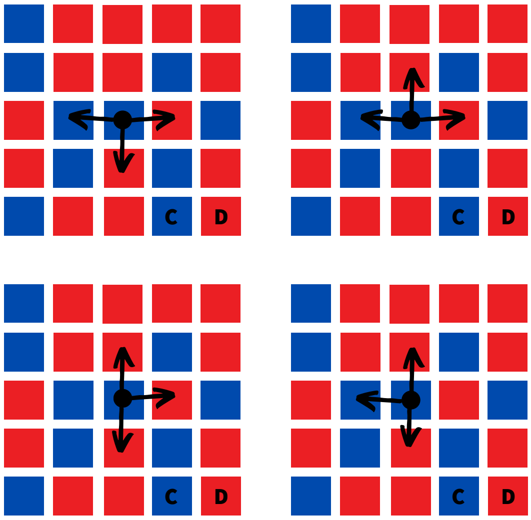

Figura 3.4: Representação de 4 das 16 rodadas de interação para um grupo $G = 4$, em que o jogador analisado está marcado com um círculo.

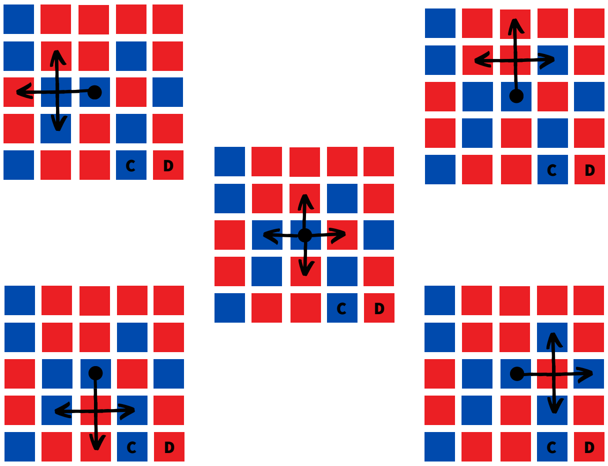

Figura 3.5: Representação das rodadas de interação para um grupo $G = 5$, em que o jogador analisado está marcado com um círculo.

Após as rodadas de interação, obtemos os ganhos ou *payoffs* do jogador para cada rodada, sendo o *payoff* total a soma dos *payoffs* adquiridos em todas as rodadas. Em seguida, realizamos a mesma análise com um dos vizinhos do jogador analisado, o qual também terá o mesmo número de rodadas de interação com seus respectivos vizinhos, de acordo com cada caso.

Essa abordagem de múltiplas rodadas de interação permite uma visão mais abrangente das estratégias e comportamentos dos jogadores ao longo do tempo. A análise detalhada das interações entre os jogadores e seus vizinhos revela informações importantes sobre como as estratégias se desenvolvem e se propagam na rede, contribuindo para uma compreensão mais profunda do jogo de bens públicos e suas implicações.

O cálculo do *payoff* varia de acordo com o tipo de jogador analisado. Se o jogador for um cooperador, seu *payoff* será calculado como a soma das contribuições dos cooperadores presentes em seu grupo, multiplicada pelo fator de sinergia, dividida pelo número de jogadores presentes no grupo e subtraído do valor que o próprio jogador contribuiu, conforme a seguinte equação (3.1),

$$u_c = \frac{r(p_c + p_n)}{G} - p_c, \tag{3.1}$$

sendo u_c o *payoff* do jogador analisado em cada rodada, r o fator de sinergia, p_c é a contribuição do próprio jogador ao grupo, p_n é a contribuição de seus vizinhos ao grupo e G é o número de jogadores presentes no grupo.

Assim, o *payoff* total do jogador analisado, definido como U_c, será dado pela soma dos *payoffs* u_c de cada rodada, conforme a seguinte equação (3.2),

$$U_c = \sum u_c. \tag{3.2}$$

Por outro lado, se o jogador analisado for um desertor, seu *payoff* será a mesma soma das contribuições dos cooperadores presentes no grupo, multiplicada pelo fator de sinergia e dividida pelo número de jogadores presentes no grupo, conforme a equação (3.3). Note que neste caso não há a necessidade de subtrair o valor de contribuição, pois os desertores não contribuem para o grupo.

$$u_d = \frac{r(p_d + p_n)}{G} - p_d, \tag{3.3}$$

sendo u_d o *payoff* do jogador analisado em cada rodada, r o fator de sinergia, p_d é a contribuição do próprio jogador ao grupo, que no caso será nula, p_n é a contribuição de seus vizinhos ao grupo e G é o número de jogadores presentes no grupo.

Logo, o *payoff* total do jogador analisado, definido como U_d, será dado pela soma dos *payoffs* u_d de cada rodada, conforme a seguinte equação (3.4),

$$U_d = \sum u_d. \tag{3.4}$$

Vale ressaltar que os desertores se beneficiam quando há pelo menos um cooperador no grupo, enquanto os cooperadores são prejudicados pela presença de desertores.

Essa abordagem de *payoff* considera o impacto das ações de cada jogador em relação aos demais do grupo. Para os cooperadores, o *payoff* é proporcional ao esforço conjunto dos demais cooperadores, incentivando a cooperação mútua. Já para os desertores, o *payoff* é influenciado pelas contribuições dos cooperadores, o que lhes permite se beneficiar sem participar ativamente.

Essa equação de *payoff* possibilita analisar como as diferentes estratégias de jogo afetam o resultado geral e como a presença de cooperadores e desertores no grupo pode influenciar o comportamento de cada jogador. Compreender essas dinâmicas é essencial para desenvolver estratégias eficientes para incentivar a cooperação e obter benefícios para toda a comunidade envolvida no jogo de bens públicos.

Após as rodadas de interação, entra em cena a rodada de atualização de estratégias, na qual o jogador analisado compara seu ganho com o ganho de seu vizinho [29]. Caso o ganho do vizinho seja superior ao seu, ele pode optar por mudar de estratégia, seguindo a Regra do Replicador. Em outras palavras, o jogador compara seus próprios ganhos com os ganhos do vizinho e, se o vizinho tiver um ganho maior, o jogador terá uma probabilidade de mudar para a estratégia do vizinho seguindo a função de Fermi, definida como:

$$W = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-(U_{c/d} - U_n)}{k}\right]}, \tag{3.5}$$

sendo $U_{c/d}$ o *payoff* do jogador analisado, seja ele cooperador (c) ou desertor (d), U_n o *payoff* de um de seus vizinhos e o parâmetro k denominado como fator de irracionalidade. É importante ressaltar que essa atualização de estratégias não é totalmente determinística, pois também considera o fator de irracionalidade. Esse fator permite que um jogador mude de estratégia, mesmo que a estratégia do vizinho para a qual ele está mudando não seja benéfica para ele em termos imediatos. Ou seja, esse parâmetro introduz uma pequena probabilidade de mudança de estratégia por parte dos jogadores, sem seguir um raciocínio lógico. Por exemplo, um jogador c ou d, ou seja, cooperador ou desertor, tem uma pequena chance de adotar a estratégia de um jogador n, mesmo quando o seu *payoff* ($U_{c/d}$) é maior que o *payoff* de seu vizinho (U_n), ou manter sua estratégia mesmo quando $U_{c/d} < U_n$. Quanto maior o valor do parâmetro k, mais irracional será o sistema, resultando em um maior número de mudanças de estratégia durante as interações. Isso pode ser observado na Figura 3.6, em que a probabilidade de mudança de estratégia (W) é plotada em função da diferença de pagamento entre os jogadores (x).

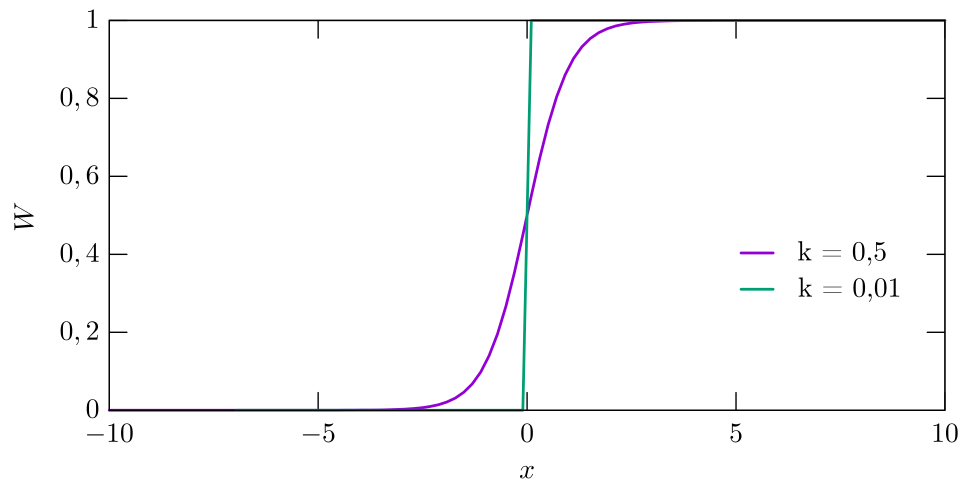

Figura 3.6: Gráfico da probabilidade de mudança de estratégia (W) em função da diferença de *payoff* dos jogadores (x), para diferentes valores de k.

Essa abordagem de atualização de estratégias tem como objetivo refletir a natureza adaptativa e exploratória dos jogadores, que buscam maximizar seus ganhos ao longo do tempo. A possibilidade de mudar de estratégia, mesmo que inicialmente desvantajosa, pode ser benéfica a longo prazo, especialmente quando o ambiente e a configuração das estratégias dos outros jogadores mudam ao longo das rodadas de interação.

A combinação de Regra do Replicador e fator de irracionalidade adiciona uma camada de complexidade à dinâmica do jogo de bens públicos, permitindo a exploração de diferentes estratégias e comportamentos em busca de uma melhor adaptação ao ambiente competitivo e cooperativo. Essa adaptação dinâmica é fundamental para entender como as estratégias evoluem e se propagam na rede, influenciando o equilíbrio entre cooperadores e desertores e a distribuição de ganhos no grupo.

Inicialmente, a probabilidade de os jogadores serem cooperadores ou desertores é igual, resultando em uma distribuição equitativa de ambos no grupo. Contudo, à medida que as rodadas avançam, observa-se um aumento na proporção de desertores no sistema, levando a uma diminuição drástica na densidade de cooperadores. Esse comportamento pode ser explicado pela disparidade nos ganhos entre esses dois tipos de jogadores. Quando há cooperadores e desertores no grupo, os desertores recebem uma recompensa maior do que os cooperadores.

Em consequência, os cooperadores tendem a replicar a estratégia dos desertores, aumentando a prevalência de desertores no sistema. Como resultado, os cooperadores passam a sobreviver em pequenos grupos cercados por um grande número de desertores. O fator de sinergia, que é multiplicado pelas contribuições para determinar os ganhos do grupo de jogadores, desempenha um papel crucial nesse comportamento.

Essa dinâmica pode levar a um cenário em que a cooperação é gradualmente suprimida em favor do comportamento oportunista dos desertores. O aumento nos ganhos dos desertores, aliado à probabilidade maior de os cooperadores adotarem a estratégia desses jogadores, contribui para a proliferação do comportamento de deserção no sistema. Esse desequilíbrio entre cooperadores e desertores pode resultar em desafios para o sucesso de projetos comuns, como a construção da ponte mencionada anteriormente.

Compreender essas interações é crucial para identificar formas de incentivar a cooperação em jogos de bens públicos, buscando estratégias que promovam a coexistência sustentável de cooperadores e reduzam os efeitos negativos dos desertores no grupo. Estratégias de incentivo, monitoramento e punição podem ser consideradas para criar um ambiente mais propício à cooperação mútua e ao benefício coletivo no jogo de bens públicos.

3.4 Jogo de bens públicos aplicado a um sistema sem rede

A dinâmica de um Jogo do bens públicos sem rede é semelhante à dinâmica de um Jogo do bens públicos com rede. No entanto, a principal diferença reside no espaço em que as interações são analisadas, pois no Jogo do bens públicos sem rede não há uma estrutura de interconexão bem definida entre os jogadores. Para conduzir as análises nesse contexto, adotamos uma abordagem específica.

Inicialmente, selecionamos aleatoriamente um jogador e estabelecemos um raio de interação ao seu redor. Esse raio delimita quais jogadores serão considerados seus vizinhos nas interações. Dessa maneira, analisamos as interações entre o jogador escolhido e os jogadores que se encontram dentro desse raio de proximidade, conforme ilustra a figura 3.7.

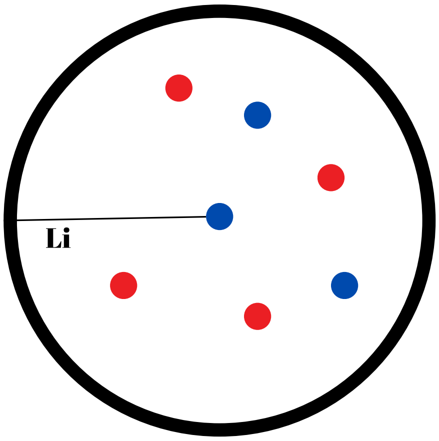

Figura 3.7: Representação de um Jogo de bens públicos aplicado a um sistema sem rede.

Essa abordagem é necessária para adaptar o conceito de vizinhança em um ambiente não estruturado, em que os jogadores não estão dispostos em uma rede interconectada. Ao delinear o raio de interação, podemos examinar as interações locais entre o jogador focal e seus vizinhos, o que permite avaliar a dinâmica de cooperação e não cooperação em um contexto mais limitado e localizado.

Essa definição de vizinhança baseada no raio de interação proporciona *insights* valiosos sobre como as estratégias se desenvolvem em um ambiente mais disperso e heterogêneo, onde as conexões não seguem uma estrutura fixa. Essa abordagem pode ser útil para compreender como a cooperação e a competição emergem em ambientes menos organizados, e como as interações locais podem influenciar as estratégias e comportamentos dos jogadores em um jogo de bens públicos sem rede.

No contexto de um sistema sem rede, também levamos em conta a diferenciação por grupos. Por exemplo, quando temos um grupo $G = 2$, o jogador em análise interagirá com um de seus vizinhos por rodada. Isso implica em uma rodada de interação para cada vizinho dentro do raio de interação, o que significa que o número de rodadas necessárias para abranger todas as possibilidades de interação não possui um valor pré-definido nesse caso.

Essa abordagem de diferenciação por grupos é necessária em sistemas sem rede, pois não há uma estrutura de conexão preestabelecida entre os jogadores. Através do agrupamento por G, podemos considerar as interações locais entre os jogadores e seus respectivos vizinhos dentro do raio especificado. Dessa forma, obtemos uma visão mais detalhada sobre como as estratégias e comportamentos se desenvolvem em um ambiente mais disperso e heterogêneo.

Essa flexibilidade no número de rodadas necessárias para abranger todas as interações é uma característica importante dos sistemas sem rede, permitindo-nos analisar como as dinâmicas de cooperação e competição emergem em diferentes configurações. O agrupamento por G possibilita uma análise mais adaptativa e sensível às variações nas interações locais, enriquecendo nossa compreensão sobre o jogo de bens públicos em um contexto sem uma estrutura de rede definida.

No cenário sem rede, as rodadas de interação são realizadas da seguinte forma: inicialmente, selecionamos aleatoriamente um jogador e definimos seu raio de interação L_i. Em seguida, delimitamos o número de vizinhos desse jogador com base na distância entre ele e outros jogadores escolhidos aleatoriamente. Caso a distância entre o jogador analisado e outro jogador seja menor que o raio de interação, esse jogador é considerado um vizinho potencial. Caso contrário, ele está fora do raio de interação e não é considerado um vizinho.

Após identificar os vizinhos do jogador em análise, avançamos para as rodadas de interação. Para um grupo $G = 2$, o jogador analisado interage com cada um de seus vizinhos em cada rodada, como na figura 3.8.

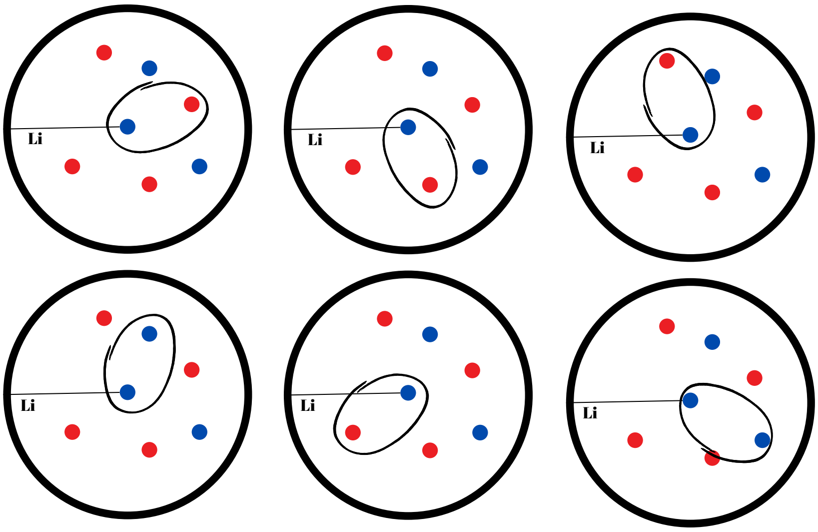

Figura 3.8: Representação das rodadas de interação para um grupo $G = 2$ sem rede.

Depois disso, um dos vizinhos com quem o jogador inicial interagiu torna-se o novo jogador analisado. Delimitamos um novo raio de interação para esse vizinho, garantindo que o jogador inicial esteja dentro desse raio para ser considerado um vizinho também, conforme ilustra a figura 3.9.

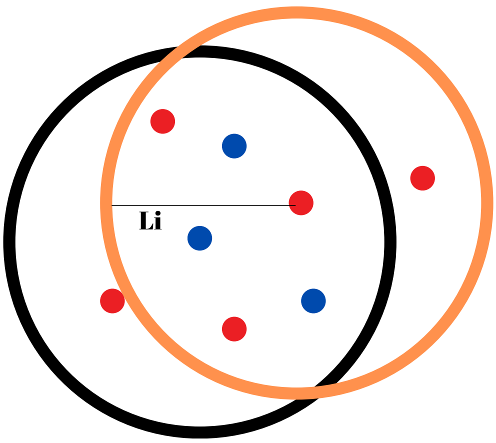

Figura 3.9: Raio de interação do vizinho em laranja.

Repetimos então as rodadas de interação, mas agora com o vizinho do jogador inicial sendo o foco dessas interações conforme ilustra a figura 3.10.

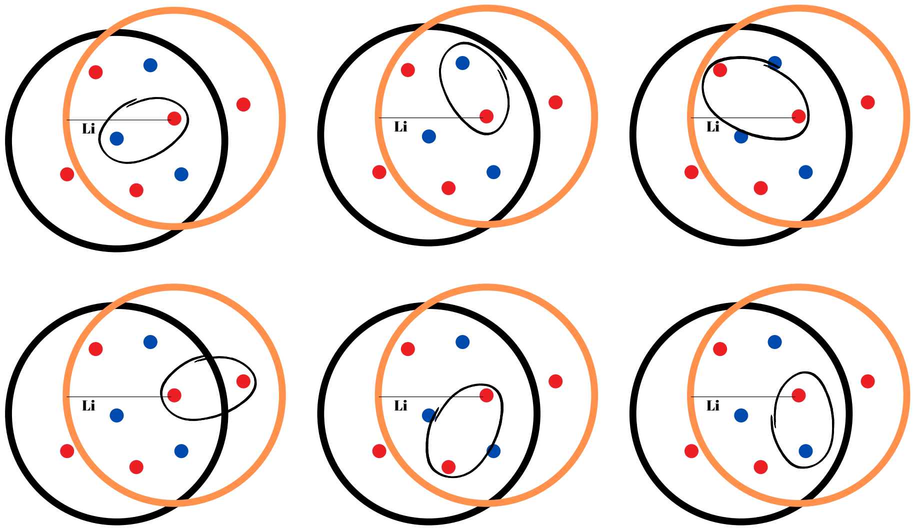

Figura 3.10: Representação das rodadas de interação do vizinho para um grupo $G = 2$ sem rede.

Ou seja, inicialmente, o jogador analisado interage com todos os seus vizinhos. Em seguida, um de seus vizinhos passa a ser o jogador analisado, e esse novo jogador interage com todos os seus vizinhos. Esse processo é repetido para cada novo jogador analisado, formando uma série de interações locais.

Essa abordagem de interações locais permite analisar o comportamento dos jogadores em um ambiente sem uma estrutura de rede definida. Através desse método adaptativo de definição de vizinhança, podemos examinar como as estratégias e comportamentos evoluem em um cenário mais disperso e heterogêneo, enriquecendo nossa compreensão sobre os jogos de bens públicos sem rede.

Após as rodadas de interação, avançamos para a rodada de atualização, na qual o jogador inicialmente analisado compara seu ganho ou *payoff* com o *payoff* do vizinho que foi analisado na sequência. Vale lembrar que os *payoffs* são calculados da mesma forma que em um sistema com rede, ou seja, o *payoff* de um jogador cooperador será a soma das contribuições dos outros cooperadores do grupo, multiplicada pelo fator de sinergia e dividida pelo número de jogadores presentes no grupo, e subtraído do valor que o próprio jogador contribuiu, conforme a equação (3.1). Da mesma forma, o *payoff* de um jogador desertor também será a soma das contribuições dos cooperadores do grupo, multiplicada pelo fator de sinergia e dividida pelo número de jogadores no grupo, conforme a equação (3.3).

Na rodada de atualização, o jogador analisado compara seu próprio *payoff* com o *payoff* do seu vizinho. Se o *payoff* do vizinho for superior ao dele, o jogador irá replicar a estratégia do vizinho, seguindo a probabilidade dada pela equação (3.5).

Essa abordagem de atualização de estratégias permite que os jogadores façam escolhas adaptativas com base em seus próprios resultados em comparação com os de seus vizinhos. A probabilidade de replicar a estratégia do vizinho é modelada pela função de Fermi (3.5), o que adiciona uma dimensão probabilística ao processo de atualização.

Essa dinâmica de atualização de estratégias é fundamental para compreender como as estratégias evoluem e se propagam no sistema ao longo do tempo. Através da comparação de payoffs e da replicação de estratégias, podemos observar como a cooperação e a competição emergem no jogo de bens públicos, contribuindo para uma análise mais completa do comportamento dos jogadores e suas interações no contexto sem uma rede definida.

Além disso, também foi introduzida uma dinâmica de mobilidade durante as rodadas de atualização. Caso um jogador opte por mudar de estratégia, ou seja, caso ele replique a estratégia de seu vizinho, ele também irá se movimentar dentro do grupo de acordo com as seguintes funções:

$$S_x = l_B \cos\theta, \tag{3.6}$$

$$S_y = l_B \sin\theta, \tag{3.7}$$

sendo l_B a variável de mobilidade, θ o ângulo da direção em que o jogador irá se movimentar e S_x e S_y a posição do jogador nos eixos x e y.

Portanto, após as rodadas de interação, os jogadores têm a possibilidade de mudar de estratégia e realizar movimentações dentro do sistema, ou então permanecer no mesmo lugar, mantendo suas estratégias. Essa dinâmica de mobilidade acrescenta uma dimensão adicional ao processo de atualização de estratégias, permitindo que os jogadores ajustem suas posições espaciais no grupo conforme suas decisões estratégicas.

Essa mobilidade pode desempenhar um papel relevante na evolução do jogo de bens públicos, pois pode levar à formação de agrupamentos de jogadores com estratégias semelhantes ou criar condições para que cooperadores e desertores se agrupem de maneira específica no espaço. Além disso, a mobilidade pode influenciar a dispersão ou concentração de estratégias ao longo do tempo, afetando a coexistência e competição entre os jogadores no sistema.

A combinação da dinâmica de atualização de estratégias com a mobilidade dos jogadores enriquece a complexidade do jogo de bens públicos, possibilitando a investigação de como as escolhas estratégicas e os movimentos espaciais interagem e se influenciam mutuamente. Essa abordagem mais abrangente é essencial para uma compreensão aprofundada dos padrões emergentes no comportamento dos jogadores em um ambiente dinâmico e adaptativo.

Capítulo 4

Resultados e discussão

Conforme apresentado anteriormente, a dinâmica de um Jogo de bens públicos está intimamente ligada ao contexto espacial em que as interações ocorrem e ao tamanho do grupo de indivíduos. Por esse motivo, dividimos nossa análise em duas etapas distintas.

Na primeira etapa, concentramos nossos esforços em compreender como um jogo de bens públicos se comporta quando aplicado a uma rede quadrada, explorando diferentes tamanhos de grupos. Para isso, consideramos os valores de $G = 2$, $G = 3$, $G = 4$ e $G = 5$, representando os tamanhos dos grupos de jogadores.

Na segunda etapa, nossa atenção se voltou para um jogo de bens públicos aplicado a um sistema sem rede, o que demanda uma análise mais complexa. Neste caso, escolhemos focar em um tamanho de grupo específico, $G = 2$, de modo a facilitar a investigação nesse tipo de configuração sem rede.

Durante a primeira etapa da análise, utilizamos uma rede quadrada de dimensões 50x50, preenchida por indivíduos distribuídos de forma aleatória. Fixamos os valores de $c = 1$ (representando a contribuição dos cooperadores) e $k = 0,1$ (representando o fator de irracionalidade do sistema). Para avaliar o comportamento do sistema, realizamos 10.000 passos de Monte Carlo, variando gradualmente o fator de sinergia r.

Observamos diferentes comportamentos do sistema quando o fator de sinergia se aproxima de um valor alto. Nesses casos, os cooperadores presentes nos grupos começam a ser beneficiados durante as rodadas de interações, resultando em ganhos maiores para eles em comparação aos desertores ao seu redor. Durante a rodada de atualização, os desertores comparam seus ganhos com os ganhos desses cooperadores e percebem que a estratégia de cooperação se torna mais benéfica, como ilustrado na figura 4.1.

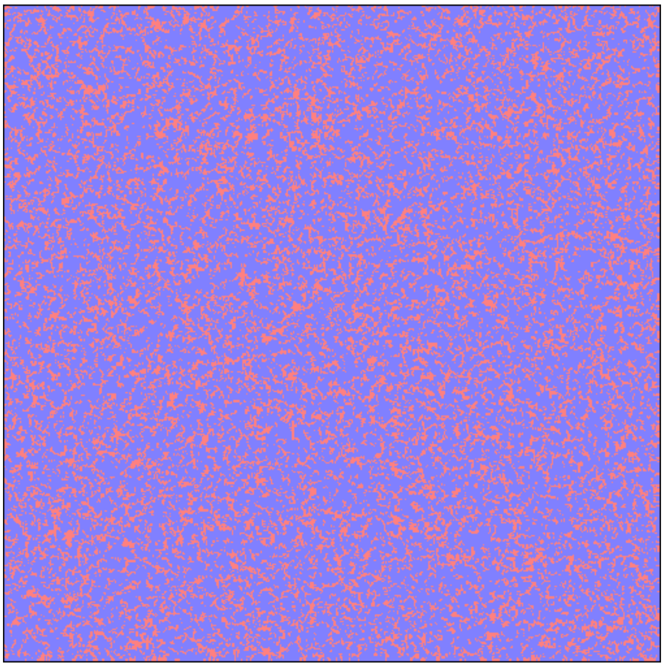

Figura 4.1: Configuração de cooperadores (pontos azuis) e desertores (pontos vermelhos) após 5000 MCS para $G = 2$ em um sistema com rede quadrada. Os parâmetros foram definidos como $K = 0,1$, $N = 5000$ e $c = 1$.

Como resultado, os desertores passam a replicar a estratégia de cooperação. Isso leva a uma dominância dos cooperadores no sistema, como ilustra a figura 4.2, com uma densidade muito maior de cooperadores em comparação aos desertores, à medida que aumentamos o fator de sinergia.

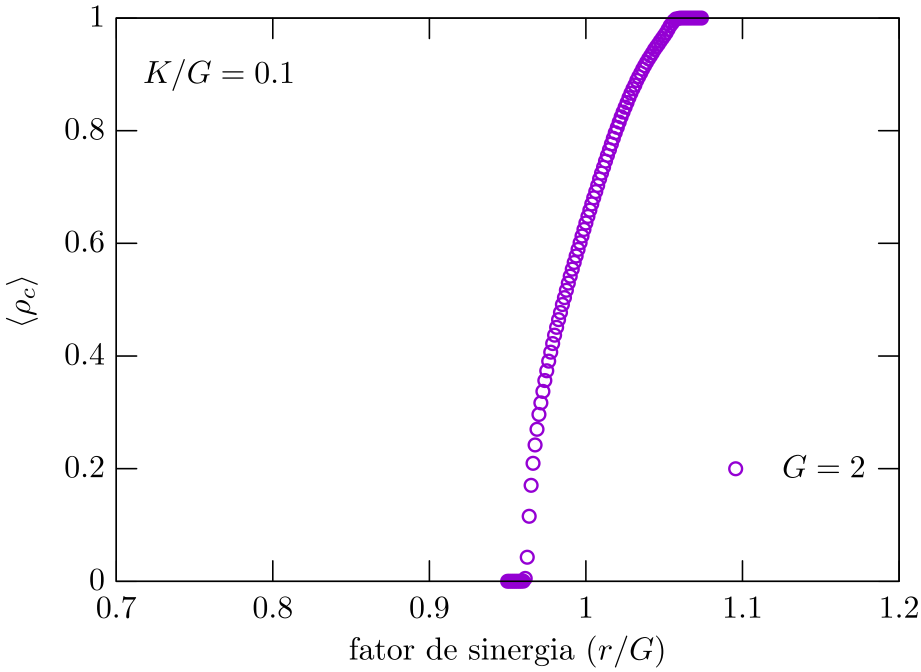

Figura 4.2: Densidade de cooperadores em função do fator de sinergia para um grupo $G = 2$ em um sistema com rede quadrada. Os resultados foram calculados a partir de 1000 condições iniciais após 50000 MCS.

Repetimos esta mesma análise para grupos diferentes sendo eles $G = 3$, $G = 4$ e $G = 5$, como ilustrado na figura 4.3. Observamos que quanto maior o tamanho do grupo, mais suave se torna a transição entre as estratégias. Além disso, também podemos observar que, para grupos maiores, a transição entre as estratégias ocorre mais cedo, ou seja, a cooperação consegue se sobressair perante a deserção com um fator de sinergia menor. Podemos observar tais comportamentos no seguinte gráfico.

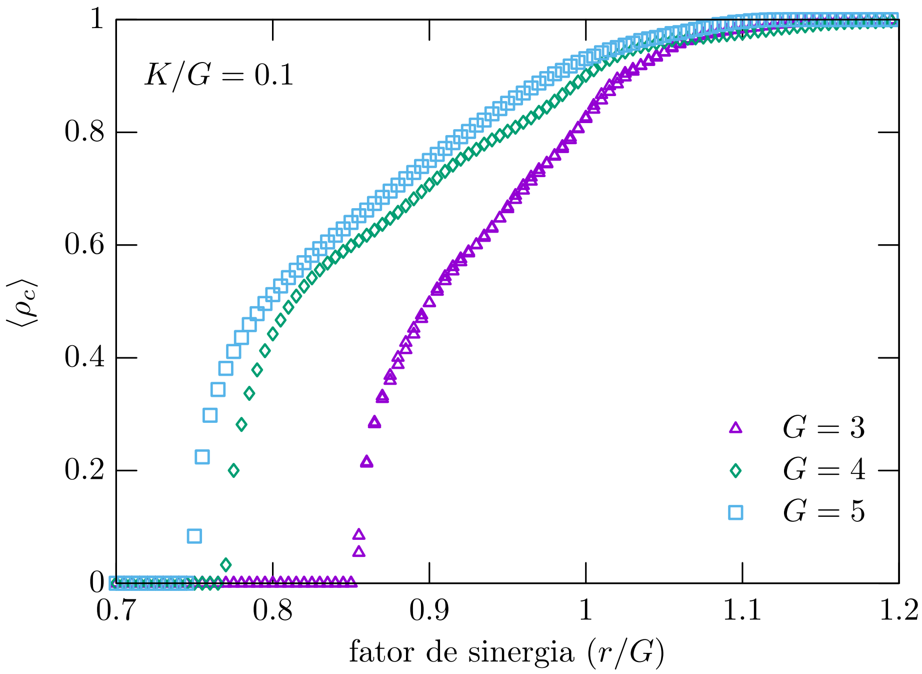

Figura 4.3: Densidade de cooperadores em função do fator de sinergia para os grupos $G = 3$, $G = 4$ e $G = 5$ em um sistema com rede quadrada. Os resultados foram calculados a partir de 1000 condições iniciais após 50000 MCS.

Na segunda etapa, realizamos uma simulação de um jogo de bens públicos em um sistema sem rede para um grupo $G = 2$. Os valores fixos utilizados foram $l_i = 0,02$ (representando o raio de interação), $l_B = 0,002$ (representando a taxa de mobilidade), $k = 0,1$ (indicando o fator de irracionalidade) e $N = 5000$ (representando o tamanho da população).

Além disso, foi fixado o fator de sinergia $r = 1,82$, considerado alto. O fator de sinergia desempenha um papel crucial na dinâmica do jogo, uma vez que afeta a propensão dos indivíduos a cooperarem. Com um fator de sinergia elevado, a cooperação se torna mais benéfica, levando os indivíduos cooperadores a formarem aglomerados principalmente no centro do sistema após 10000 passos de Monte Carlo, conforme indica a figura 4.4.

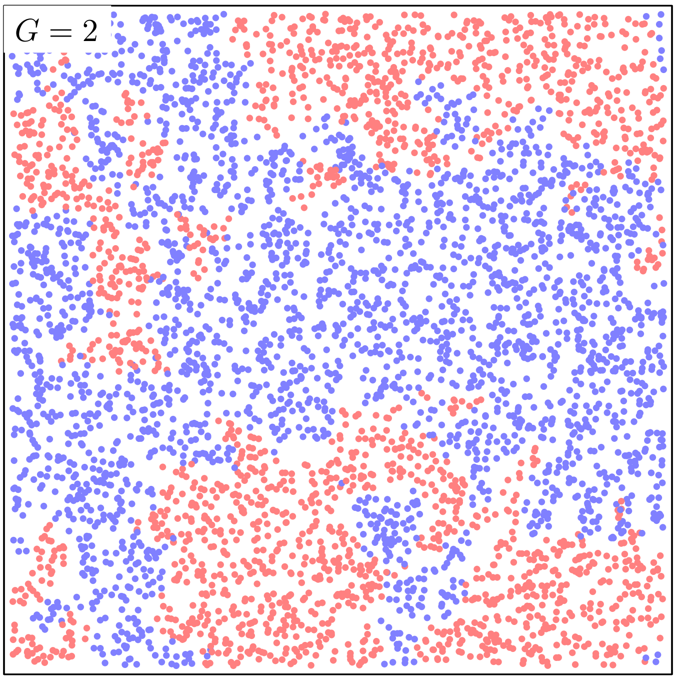

Figura 4.4: Configuração de cooperadores (pontos azuis) e desertores (pontos vermelhos) após 10000 MCS para $G = 2$. Os parâmetros são definidos como $l_i = 0,02$, $l_B = 0,002$, $k = 0,1$, $N = 5000$ e $r = 1,82$.

Esse comportamento observado na simulação está de acordo com resultados obtidos em jogos de bens públicos com rede, onde também se nota a formação de *clusters* de cooperadores quando o fator de sinergia é alto. A presença desses aglomerados de cooperadores demonstra que, em sistemas com fatores de sinergia elevados, a cooperação prevalece sobre a deserção.

Assim, nossa simulação indica que é possível analisar problemas diversos usando a dinâmica do jogo de bens públicos sem a necessidade de considerar uma estrutura de rede quadrada. Esse tipo de análise se aproxima mais da realidade no mundo real, onde as interações entre os indivíduos não ocorrem necessariamente de forma simétrica e ordenada, como ocorreria em um sistema com uma rede definida.

Essa abordagem de analisar sistemas sem a limitação de uma rede quadrada abre um leque de inúmeras possibilidades, permitindo estudos mais flexíveis e aplicáveis a diferentes contextos e situações reais.

Utilizando os mesmos valores mencionados anteriormente, conduzimos uma análise dos resultados em relação ao número de vizinhos de cada jogador em um jogo de bens públicos (PGG) aplicado a um sistema sem rede. Na configuração com rede, cada indivíduo analisado sempre possuía exatamente quatro vizinhos, devido à estrutura ordenada da rede quadrada.

No entanto, ao considerar um PGG sem rede, a situação muda significativamente. Nessa abordagem, um jogador pode ter inúmeros vizinhos, uma vez que a definição de vizinhança baseia-se na presença dos outros jogadores dentro do raio de interação. Portanto, qualquer jogador pode ser considerado vizinho, desde que sua distância em relação ao jogador analisado seja menor que o raio de interação.

Após executar 10000 passos de Monte Carlo (MCS), obtivemos o histograma representado na figura 4.5, que nos forneceu informações valiosas. Notavelmente, quando aplicamos o valor de $G = 2$ a um PGG sem rede, a maioria dos jogadores teve no máximo 6 vizinhos. Isso significa que, na dinâmica de interações, a maior parte dos jogadores teve no máximo 6 rodadas de interação, uma para cada possibilidade de interação com cada vizinho.

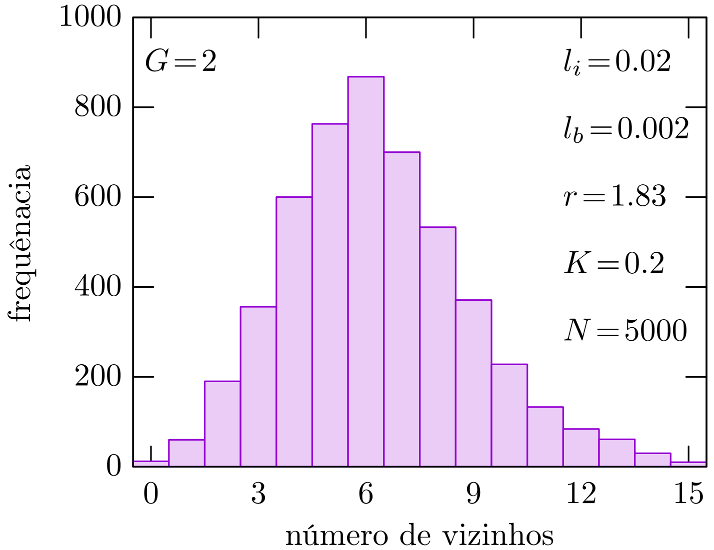

Figura 4.5: Histograma com o número de vizinhos a cada instante (t = 10000 MCS) Este histograma corresponde à distribuição de vizinho da Figura 4.4.

Comparando esses resultados com o PGG com rede, podemos notar uma pequena, mas significativa diferença. Agora, no PGG sem rede, teremos duas rodadas de interação a mais, o que pode afetar a dinâmica do jogo e levar a resultados distintos em termos de cooperação e formação de *clusters* de cooperadores. Essa mudança nas interações destaca como a ausência de uma estrutura de rede fixa amplia as possibilidades de interação entre os jogadores, proporcionando novas nuances e complexidades ao estudo do jogo de bens públicos.

Finalmente, realizamos uma simulação do jogo de bens públicos (PGG) sem rede, mantendo os valores fixos como $l_i = 0,02$, $l_B = 0,002$, $k = 0,1$ e $N = 5000$, para um grupo $G = 2$. Após executar 50000 passos de Monte Carlo, obtivemos um gráfico que mostra a densidade de cooperadores (p_c) em relação ao fator de sinergia, que neste caso foi dividido pelo tamanho do grupo (r/G). Para a geração deste gráfico, as simulações feitas foram significativamente mais demoradas em comparação com o modelo com rede, portanto, utilizamos um número menor de simulações para a análise. Esta mudança implicou em uma curva um pouco mais abrupta na evolução dos cooperadores, entretanto, este fator não interferiu no resultado e tampouco na análise do comportamento.

Em nossa análise do PGG com rede, observamos que ao aumentar o fator de sinergia, a densidade de cooperadores também aumentava. Esse comportamento se devia ao fato de que *clusters* de cooperadores se beneficiavam de um fator de sinergia mais alto, o que favorecia a cooperação em detrimento da deserção. Em outras palavras, quanto maior o fator de sinergia, maior a probabilidade dos jogadores se tornarem cooperadores no sistema. Essa mesma tendência é igualmente observada no PGG sem rede, onde, ao aumentarmos o fator de sinergia, a densidade de cooperadores também aumenta conforme indica a figura 4.6.

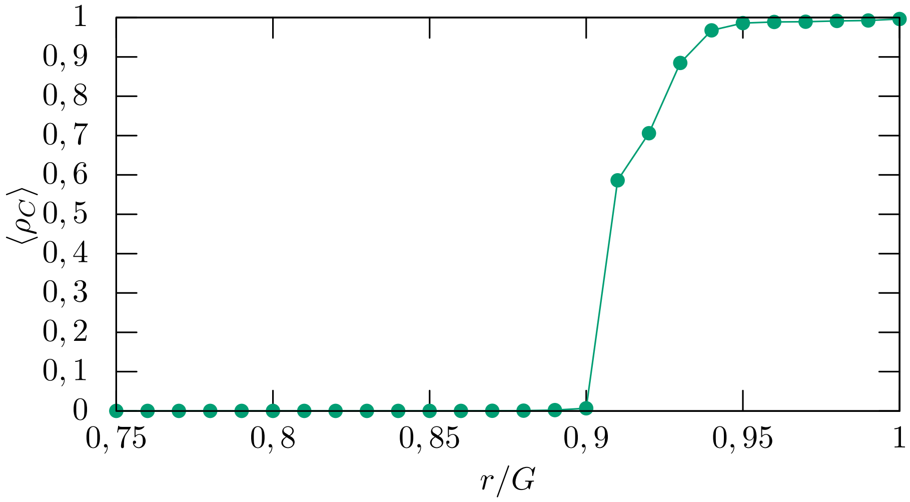

Figura 4.6: Densidade de cooperadores em função do fator sinérgico sobre o tamanho do grupo para G = 2. Os resultados foram calculados a partir de 100 condições iniciais após 50000 MCS.

Vale destacar que, para valores de r inferiores a $0,9$, os desertores dominavam o sistema, prevalecendo sobre os cooperadores. Entretanto, ao aumentarmos o valor de r, uma fase de coexistência emerge, na qual os cooperadores reaparecem e começam a aumentar em número, enquanto os desertores diminuem. À medida que aumentamos ainda mais o valor de r, os cooperadores passam a dominar todo o sistema em relação aos desertores. Esse resultado é notavelmente similar ao que se observa em um PGG com rede, o que demonstra a capacidade dos dois modelos de análise para lidar com situações similares.

No entanto, é importante ressaltar que o modelo sem rede está mais próximo da realidade, uma vez que não se restringe a uma estrutura de rede predefinida e permite uma maior flexibilidade nas interações entre os jogadores. Dessa forma, o PGG sem rede oferece uma abordagem mais realista para analisar fenômenos sociais complexos onde as interações entre os indivíduos não ocorrem de maneira ordenada e simétrica, refletindo melhor a dinâmica das situações do mundo real.

Concluímos nossa investigação ao examinar detalhadamente o impacto do parâmetro de mobilidade na dinâmica do sistema. Nossas análises revelaram uma descoberta intrigante: à medida que ampliamos o valor do parâmetro l_B, verificamos uma notável desvantagem para os agentes cooperativos, como apresentado na figura 4.7.

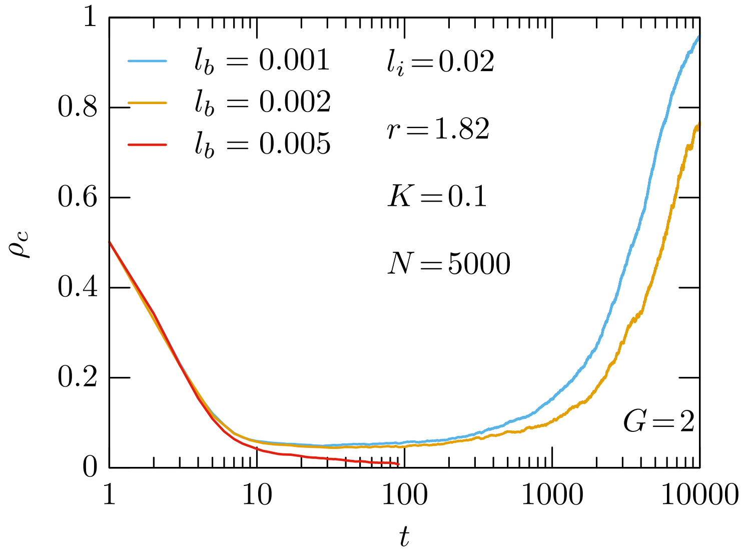

Figura 4.7: Evolução dos cooperadores em função do tempo para G = 2 para diferentes valores de l_B.

Essa tendência pode ser esclarecida pelo fato de que um aumento substancial na mobilidade, advindo do parâmetro ampliado, incita os jogadores a se deslocarem com maior abrangência dentro do sistema. Esse aumento de movimentação, por sua vez, lança obstáculos na efetiva formação de agrupamentos coesos, conhecidos como *clusters*. Como resultado direto, a capacidade dos cooperadores de estabelecer e sustentar esses *clusters* é adversamente afetada. Portanto, o aumento do parâmetro de mobilidade não apenas impõe desafios à criação de agrupamentos cooperativos sólidos, mas também compromete significativamente a sobrevivência dos próprios agentes cooperativos, cuja existência depende intrinsecamente da existência desses *clusters* cooperativos.

Considerações finais

Neste trabalho, foram abordados os principais conceitos relacionados à teoria dos jogos, mergulhando na história por trás da criação dessa teoria e explorando os principais tipos de jogos existentes. Dentre eles, foram destacados o jogo da galinha, o jogo da caça ao veado, o jogo do ditador, o jogo do ultimato, o jogo da centopeia e o jogo do *off*.

Em seguida, foi conduzida uma análise detalhada do jogo de bens públicos, explorando sua dinâmica, os tipos de jogadores envolvidos, o funcionamento das estratégias, o *payoff* e suas principais aplicações. Também foram discutidas as limitações e desafios associados a esse tipo de jogo.

Além disso, foi abordado um dos principais problemas ainda sem solução na ciência: entender o surgimento da cooperação em grupos de indivíduos egoístas. Para abordar essa questão, foram examinados diversos modelos teóricos de jogos de bens públicos, que oferecem dinâmicas distintas aplicadas a esse tipo de jogo. Essas dinâmicas incluíram a variação do tamanho do grupo e a introdução de diferentes estratégias como jogadores punidores, jogadores expulsores de piscina e jogadores conformistas.

Em seguida, foi abordado como funciona a dinâmica de um jogo de bens públicos clássico aplicado a uma rede quadrada. Paralelamente, foi introduzida a aplicação desse tipo de jogo em um sistema sem rede, sendo a análise desse modelo o foco principal do trabalho.

Foram detalhados ambos os modelos e foram realizadas simulações de Monte Carlo para reproduzi-los. Finalmente, foram apresentados os resultados dessas simulações, os quais revelaram que os resultados encontrados no jogo de bens públicos sem rede estão em concordância com os resultados encontrados no jogo de bens públicos com rede quadrada. Esses resultados sugerem que é possível utilizar o modelo sem rede para analisar situações de forma mais realista, em comparação com o modelo com rede. Essa mudança de abordagem trará inúmeros benefícios nas análises, permitindo uma melhor compreensão e representação de fenômenos sociais complexos e reais.

Entre as perspectivas de trabalhos futuros, é pretendido prosseguir com o estudo do modelo sem rede, mas desta vez, aplicando novas dinâmicas semelhantes às apresentadas nos modelos mencionados durante o trabalho. Um dos focos de pesquisa será analisar como o modelo sem rede se comporta em grupos maiores, como $G = 5$. Para facilitar esta análise, uma das medidas tomadas será a implementação do jogo de bens públicos focal, afim de acelerar as simulações, as quais são significativamente mais demoradas no modelo sem rede, por possuírem dinâmicas mais complexas. Essa análise exigirá maior complexidade e tempo para sua realização, mas trará inúmeros benefícios às investigações.

Ao incorporar essas novas abordagens ao modelo sem rede, é pretendido obter uma melhor compreensão e representação de fenômenos sociais complexos e reais. A intenção é aprimorar a capacidade do modelo em capturar interações entre indivíduos em diferentes contextos e cenários, permitindo explorar como a dinâmica do jogo de bens públicos se comporta em grupos maiores e em situações mais desafiadoras.

Essas investigações têm o potencial de fornecer *insights* valiosos sobre como a ausência de uma rede fixa pode influenciar a cooperação e a formação de *clusters* de cooperadores em grupos maiores. É esperado também compreender como fatores como reciprocidade, diversidade social e estratégias de jogadores afetam a dinâmica do jogo de bens públicos sem rede.

Com esse enfoque mais abrangente e detalhado, é pretendido contribuir para o avanço do conhecimento nessa área e para o desenvolvimento de modelos mais realistas e aplicáveis, que possam ser utilizados para analisar e abordar questões relevantes em ciências sociais, economia, comportamento humano e outras áreas relacionadas.

Referências Bibliográficas

[1] Y. N. Harari, *Sapiens: Uma breve história da humanidade*. Edição de bolso, 2018.

[2] T. C. Schelling, *The strategy of conflict*. The President and Fellows of Harvard College, 1960.

[3] D. Ross, "Game theory," 2008. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/game-theory/> Acesso em 24 jul. 2023.

[4] A. B. Carlos, *Teoria dos Jogos Evolucionários*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2018.

[5] Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Antoine-Augustin-Cournot> Acesso em 24 jul. 2023.

[6] Disponível em: <https://www.hetwebsite.net/het/profiles/cournot.htm> Acesso em 24 jul. 2023.

[7] M. C. N. Santos, "Principais axiomas da matemática," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2014.

[8] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Zermelo> Acesso em 24 jul. 2023.

[9] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann> Acesso em 24 jul. 2023.

[10] O. M. Xavier, "A origem da teoria dos jogos e a existência de equilíbrio em nash," Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2013.

[11] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Golden Keys Success, 2020.

[12] Disponível em: <https://bit.ly/3s8FbU2> Acesso em 24 jul. 2023.

[13] K. Dutta, *Strategies and Games – Theory and Practice*. The MIT Press, 1999.

[14] B. A. Sartini, *Notas de Aula da segunda Bienal da SBM*. Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf.

[15] Disponível em: <https://academiaconhcmnt.blogs.sapo.pt/649.html> Acesso em 24 jul. 2023.

[16] Disponível em: <https://pt.findagrave.com/memorial/168646592/merrill-meeks-flood> Acesso em 24 jul. 2023.

[17] Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Melvin_Dresher> Acesso em 24 jul. 2023.

[18] Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker> Acesso em 24 jul. 2023.

[19] Disponível em: <https://www.canva.com/> Acesso em 24 jul. 2023.

[20] J. Bentham and S. Mill, *Uma Introdução Aos Princípios Da Moral E Da Legislação*. Hunter Books, 1974.

[21] J. S. Mill, *Utilitarismo*. Hunter Books, 2017.

[22] Disponível em: <https://1000wordphilosophy.com/2014/05/15/introduction-to-consequentialism/> Acesso em 24 jul. 2023.

[23] Disponível em: <https://bit.ly/3uEQiFW> Acesso em 24 jul. 2023.

[24] Disponível em: <http://www.anpec.org.br/encontro2008/artigos/200807020859020-.pdf> Acesso em 24 jul. 2023.

[25] Disponível em: <https://iepecdg.com.br/artigos/o-jogo-da-galinha/> Acesso em 24 jul. 2023.

[26] Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10606/2/AvaliacaoEstrategiasMarcovianas.pdf> Acesso em 24 jul. 2023.

[27] T. Fudenberg, *Game Theory*. MIT Press, 1991.

[28] E. Rasmusen, *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. MIT Press, 2013.

[29] R. Osborne, *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.

[30] Disponível em: <https://www.nytimes.com/2009/12/14/business/economy/14samuelson.html> Acesso em 24 jul. 2023.

[31] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow> Acesso em 24 jul. 2023.

[32] M. A. Amaral, *Teoria dos jogos evolucionários e o surgimento da cooperação: dinâmicas inovativas e jogos mistos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo horizonte - MG, 2017.

[33] M. P. Attila Szolnoki, "Group-size effects on the evolution of cooperation in the spatial public goods game," 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1112.3025.

[34] M. A. A. M. H. V. Lucas S. Flores, Heitor C.M. Fernandes, "Symbiotic behaviour in the public goods game with altruistic punishment," 2021. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022519321001594.

[35] Q. D. J. Y. Xinshuai Liu, Changwei Huang, "The effects of the conformity threshold on cooperation in spatial prisoner's dilemma games," 2019. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/128/18001.

[36] M. P. Xiaofeng Wang, Maja Duh, "Pool expulsion and cooperation in the spatial public goods game," 2020. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0375960120302176.

[37] M. V. H. F. Lucas Flores, Marco Amaral, "Cooperation in regular lattices," *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 164, p. 112744, 2022.