
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MATEUS MOREIRA TARZO

EXPLORANDO PADRÕES ORDINAIS NA
ANÁLISE DE PINTURAS E
HISTÓRIA DA ARTE

Maringá, 22 de julho de 2024.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MATEUS MOREIRA TAROZO

EXPLORANDO PADRÕES ORDINAIS NA
ANÁLISE DE PINTURAS E
HISTÓRIA DA ARTE

*Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Física da Universidade
Estadual de Maringá.*

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro

Maringá, 22 de julho de 2024.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

T191e

Tarozo, Mateus Moeira

Explorando padrões ordinais na análise de pinturas e história da arte / Mateus Moeira
Tarozo. -- Maringá, PR, 2024.
69 f. : il. color., figs.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências
Exatas, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, 2024.

1. Entropia. 2. Padrões espaciais. 3. Estatística - Complexidade. 4. Imagens. 5. História
da arte - Pintura. I. Ribeiro, Haroldo Valentin, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.
Centro de Ciências Exatas. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

CDD 23.ed. 536.73

Elaine Cristina Soares Lira - CRB-9/1202

MATEUS MOREIRA TAROZO

EXPLORANDO PADRÕES ORDINAIS NA ANÁLISE DE PINTURAS E HISTÓRIA DA ARTE

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Aprovado em: Maringá, 22 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Osvaldo Anibal Rosso
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Agradecimentos

Gostaria de expressar, com sincero sentimento, meus agradecimentos primeiramente à minha namorada e futura esposa Gisele, que esteve ao meu lado nos momentos de agruras e felicidades, ensinando-me outra forma de observar as nossas ações e sempre me fortalecendo para enfrentar os desafios que nos defrontamos diariamente nas veredas da vida.

Com emoção, agradeço à minha família, em especial à minha mãe Rosa Maria, que sempre me ensinou que a dedicação aos estudos é uma virtude, e ao meu pai José Carlos, que me ensinou que devemos nos esforçar sempre em nossos ofícios.

Agradeço também aos novos amigos que a pós-graduação me proporcionou: Arthur, Andre, Leonardo Voltarelli, Alvaro, Leonardo Cunha, Diego, Vítor Hugo, e aos demais integrantes do grupo de pesquisa Complex Lab, que, de várias formas, foram importantes para minhas realizações.

Com admiração, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro, que me ajudou a desenvolver esta dissertação e me ensinou um novo caminho a ser trilhado.

Por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro, que foi essencial à realização deste trabalho.

Resumo

A análise quantitativa de artes visuais expandiu-se recentemente para abranger conjuntos mais extensos de obras de arte devido à disponibilidade de grandes coleções de arte digitalizadas. Estudos anteriores têm predominantemente negligenciado a estrutura espacial das pinturas, um elemento crítico para a apreciação estética e um foco comum nas análises formais, porém qualitativas, de historiadores da arte. Nesta dissertação, abordamos essa lacuna examinando padrões de ordenação nas intensidades de pixels dentro de partições dois por dois em imagens de quase 140 000 pinturas que abrangem quase um milênio da história da arte. Esses padrões, categorizados em onze tipos com base em argumentos de continuidade e simetria, são aplicáveis universalmente e detalhados o suficiente para correlacionar com diversas características visuais das pinturas. Descobrimos uma distribuição universal desses padrões, com prevalência consistente dentro dos grupos, porém modulada entre os grupos por uma interação não trivial entre a suavidade do padrão e a probabilidade de encontrar intensidades idênticas para os pixels. Este resultado fornece uma métrica padronizada para comparar pinturas e estilos, estabelecendo também uma escala para quantificar desvios da prevalência média. Nossa pesquisa também mostra que esses padrões simples contêm informações significativas para prever estilos artísticos de pinturas e revela uma tendência geral na qual obras de arte divergem cada vez mais da incidência média com o passar do tempo.

Palavras-chave: Complexidade. Entropia. Padrões Espaciais. Imagens. Obras de Arte. Sistemas Complexos. Ciência de Dados. Aprendizado de Máquina.

Abstract

Quantitative analysis of visual arts has recently expanded to encompass a more extensive array of artworks due to the availability of large-scale digitized art collections. Previous studies have predominantly overlooked the spatial structure of paintings, a critical element for aesthetic appreciation and a common focus in art historians' formal, yet qualitative, art analyses. In this dissertation, we address this gap by examining ordering patterns in pixel intensities within two-by-two partitions of images from nearly 140,000 paintings, spanning almost a millennium of art history. These patterns, categorized into eleven types based on arguments of continuity and symmetry, are both universally applicable and detailed enough to correlate with diverse visual features of paintings. We uncover a universal distribution of these patterns, with consistent prevalence within groups, yet modulated across groups by a nontrivial interplay between pattern smoothness and the likelihood of identical pixel intensities. This finding provides a standardized metric for comparing paintings and styles, further establishing a scale to measure deviations from the average prevalence. Our research also shows that these simple patterns contain significant information for predicting painting styles, and it reveals a general trend of artworks increasingly diverging from the average incidence.

Keywords: Complexity. Entropy. Spatial Patterns. Images. Artworks. Complex Systems. Data Science. Machine Learning.

Introdução	9
1 Métodos ordinais para análises de séries temporais e imagens	13
1.1 A entropia de permutação	13
1.2 Complexidade estatística	19
1.3 Plano complexidade-entropia	23
1.4 Plano Fisher-Shannon	24
1.5 Padrões ordinais em imagens	28
1.6 Classificação de padrões ordinais dois por dois	32
2 Padrões ordinais dois por dois em pinturas artísticas	38
2.1 A base de dados WikiArt	38
2.2 Representação matricial das pinturas	41
2.3 Igualdades em padrões ordinais dois por dois	42
2.4 Classificação generalizada de padrões ordinais dois por dois	43
2.5 Relação entre características visuais e padrões ordinais	46
2.6 Prevalência universal de padrões dois por dois em pinturas	49
2.7 Prevalência padronizada de padrões ordinais	51
2.8 Determinando o estilo de pinturas via padrões ordinais dois por dois	56
2.9 Mudanças na incidência de padrões ordinais ao longo da história da arte	60
Conclusão	63
Referências bibliográficas	70

Introdução

A pesquisa em sistemas complexos emerge como um campo interdisciplinar dedicado à compreensão da organização coletiva de elementos simples em diversos sistemas, enriquecendo-os com características distintivas. Essa abordagem transcende campos de estudos que vão desde colônias de insetos até sistemas imunológicos, neurociência e economia [1, 2], incluindo o objeto de estudo dessa dissertação: pinturas artísticas.

A história da humanidade documenta as diversas formas e meios que nossa espécie utilizou para se perpetuar ao longo dos séculos e milênios. Uma das características mais marcantes da nossa espécie é a engenhosidade para construir e idealizar ferramentas e costumes. Essa habilidade possibilitou o surgimento de grandes revoluções. Entretanto, existe uma certa produção humana que não é claramente compreendida como útil ou de aplicação prática. Trata-se da arte, uma atividade que a humanidade desenvolveu para expressar seu íntimo ao mundo, comunicando suas aflições existenciais, assim como os momentos históricos e políticos em que viviam [3].

Desde tempos remotos, as obras artísticas sempre foram objetos de grande valor, exercendo um papel de extrema importância na sociedade. Essa relevância intrínseca faz com que a sociedade, ao longo dos séculos, se volte para as obras de arte, buscando observar e entender os meandros e as sutilezas que compõem essas representações da mente humana. A partir do século XVIII, a arte passou a ser estudada de maneira mais formal como uma disciplina crítica. Esse campo de estudo foi se desenvolvendo e se ramificando em diversos níveis, abrangendo análises literárias, historiográficas, filosóficas, entre outros aspectos das humanidades. Esse desenvolvimento permitiu um enriquecimento na compreensão e apreciação das obras artísticas em seus múltiplos contextos e significados. Entretanto, os estudos ligados à arte sempre foram, e ainda são, majoritariamente abordados de maneira qualitativa [4, 5].

Ao mesmo tempo, a ideia de quantificar atributos estéticos ou o conceito de beleza é bastante antiga no discurso científico e tem origens que remontam à Grécia antiga e a filósofos

medievais [6]. Por exemplo, tanto Platão quanto Aristóteles consideravam a beleza como uma questão objetiva [7,8], com Aristóteles abordando esse tema de maneira mais enfática e empírica. Em seu tratado Metafísica [9], Aristóteles respondeu a filósofos que afirmavam que as ciências matemáticas não podiam quantificar a beleza dizendo, *“estão errados aqueles que afirmam que as ciências matemáticas não nos dizem nada sobre a beleza”*, enfatizando ainda que *“as principais espécies de beleza são arranjo ordenado, proporção e definição”*. Filósofos medievais como Agostinho e Tomás de Aquino ecoaram esse discurso [6]. Agostinho, por exemplo, acreditava que *“tudo é belo quando está em devida ordem”* e Tomás de Aquino postulava que *“a beleza consiste em devida proporção.”* Avançando consideravelmente no tempo, podemos verificar que o trabalho do matemático Birkhoff [10], frequentemente visto como uma das primeiras tentativas contemporâneas de definir princípios matemáticos universais para avaliar a estética artística, não é sem precedentes. De fato, sua ideia de formular uma medida estética baseada na razão entre ordem e complexidade ressoa significativamente com percepções filosóficas anteriores sobre a natureza da beleza.

Apesar deste longo caminho histórico, a caracterização empírica de obras de arte utilizando abordagens das ciências físicas é relativamente recente. O trabalho de Taylor *et al.* [11] no final dos anos 1990 sobre a natureza fractal das pinturas de gotejamento de Pollock foi crucial neste sentido e estimulou uma multitude de estudos posteriores [12–18, 18–21], que por sua vez contribuíram para o surgimento do campo de estudo quantitativo das artes visuais [22–24]. No entanto, foi apenas nos últimos anos que esses esforços quantitativos alcançaram uma escala maior e se expandiram para além de um número limitado de obras de artistas específicos ou estilos artísticos. Essa expansão foi principalmente impulsionada pela recente disponibilidade de extensas coleções de arte digitalizadas, que não apenas facilitaram aplicações práticas como a classificação de estilos de pintura [25–28], mas também contribuíram para aprofundar nosso entendimento sobre aspectos culturais e sociais da arte e como eles possivelmente evoluíram ao longo dos séculos [29].

Pesquisas de Manovich e coautores [30–32] foram pioneiras na análise de grandes conjuntos de dados de pinturas e outras formas de arte visual para quantificar a evolução artística por meio de métricas como brilho médio e saturação. Mudanças no uso de cor e contraste ao longo da história da arte também foram investigadas por Kim *et al.* [33] e Lee *et al.* [34], que identificaram diferenças significativas entre períodos históricos e estilos artísticos. A história da arte também foi explorada usando uma abordagem inspirada em física baseada na entropia de permutação e complexidade estatística por Sigaki *et al.* [35], revelando uma evolução temporal marcada por transições alinhadas com grandes períodos históricos da arte. Essa mesma metodologia foi posteriormente aplicada por Valensise *et al.* [36] para avaliar a complexidade visual de memes em plataformas de mídia social. Além disso, Lee e coautores [37] dissecaram a estrutura compositiva de pinturas de paisagens, descobrindo que de 1600 a 1850, essas obras de arte geralmente apresentavam uma partição horizontal

primária com uma divisão vertical secundária, um estilo que gradualmente caiu em desuso, dando lugar a uma preferência por partições horizontais duplas em pinturas do Século XX. Mais recentemente, Karjus *et al.* [38] introduziram um espaço de representação chamado *ensembles* de compressão, baseado no cálculo do tamanho de compressão normalizado de várias transformações aplicadas às imagens originais, um método que se mostrou eficaz em quantificar a complexidade de uma ampla gama de artes visuais. Em outro estudo recente, Lee e coautores [39] usaram um grande conjunto de dados de pinturas contemporâneas vendidas em leilões para demonstrar que as características visuais desempenham apenas um papel marginal na previsão dos preços das obras de arte.

Assim, as pesquisas anteriores demonstram que, embora a arte seja tradicionalmente considerada qualitativa ou metafísica, análises quantitativas em larga escala — frequentemente inspiradas pela física — não só são viáveis, mas já forneceram conhecimento significativo sobre a natureza e a evolução da arte. No entanto, à parte dos estudos citados nas referências [35, 37], grande parte da literatura científica existente ignora a estrutura espacial de pinturas e outras artes visuais. Trata-se de uma lacuna importante, uma vez que padrões espaciais são essenciais para a apreciação estética [40, 41] e são frequentemente usados para descrever qualitativamente e distinguir as características-chave de movimentos artísticos. Por exemplo, Wölfflin, um dos historiadores de arte mais influentes no desenvolvimento da análise formal da arte [42], introduziu em 1915 cinco pares de conceitos contrastantes para distinguir entre a arte renascentista e barroca [43]. Esses pares celebrados — linear versus pictórico, plano versus profundidade, forma fechada versus forma aberta, pluralidade versus unicidade, e clareza versus obscuridade — abordam principalmente padrões espaciais e estruturas formais em pinturas, ao invés de aspectos de cor [44]. Uma ênfase semelhante em padrões espaciais também aparece em trabalhos mais recentes de historiadores da arte como Sypher [45] e Davis [46].

A escassez de estudos quantitativos em larga escala sobre padrões espaciais surge principalmente dos desafios em definir elementos individuais como unidades dentro das obras de arte. Essas unidades devem ser simples o suficiente para aplicação universal, mas também suficientemente detalhadas para encapsular a essência das pinturas e seus estilos artísticos. Nesta dissertação, inspirados pelo trabalho de Bandt e Wittfeld [47], enfrentamos esse desafio por meio da análise de padrões de ordenação entre intensidades de pixels em partições de tamanho dois por dois pixels em imagens de pinturas. Aplicamos nosso método a uma grande base de dados que compreende quase 140 mil obras de arte e abrange quase um milênio de história da arte. Nosso estudo verifica a existência de 75 padrões ordinais únicos, os grupos são classificados em 11 categorias, fundamentadas em critérios de continuidade e simetria. Esses padrões são facilmente interpretáveis e sua prevalência correlaciona-se com várias características visuais das pinturas, que vão desde a presença de regiões bem definidas e estruturas verticais ou horizontais, até aspectos mais sutis como a textura da

pincelada e preferências direcionais. Observamos um padrão universal na distribuição de padrões ordinais dois por dois nas pinturas. Esse padrão é caracterizado por uma prevalência aproximadamente constante dentro de cada grupo, porém modulada entre grupos por uma interação não trivial entre a suavidade do padrão e a probabilidade de encontrar intensidades idênticas para os pixels. A existência de uma prevalência universal na incidência de padrões ordinais nos permite definir uma medida padronizada que não só é útil para comparar pinturas e estilos, mas também estabelece uma métrica que informa o quão distante uma pintura ou um estilo artístico está da prevalência média. Nossos resultados mostram que a prevalência de padrões ordinais carrega informações úteis para identificar o estilo artístico das pinturas, superando classificadores de referência e outras medidas ordinais conhecidas como a entropia de permutação [48], a complexidade estatística [49] e a medida de informação de Fisher [50]. Além disso, em extensão ao trabalho de Bandt e Wittfeld [47], destacamos o papel crítico de investigar explicitamente padrões associados a valores idênticos dentro das partições dois por dois. Por fim, quantificamos a evolução temporal das pinturas artísticas examinando mudanças na prevalência de padrões ordinais, revelando uma tendência geral na qual as obras de arte divergem cada vez mais da incidência média com o passar do tempo.

O restante desta dissertação se organiza em dois capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os métodos utilizados ao longo de nossos estudos. Esses métodos incluem medidas entrópicas e a abordagem de padrões ordinais para imagens. No segundo capítulo, detalhamos a base de dados utilizada, nosso procedimento para definir padrões ordinais em pinturas e expomos nossas análises e resultados. Por fim, encerramos este trabalho com nossas discussões e conclusões.

Métodos ordinais para análises de séries temporais e imagens

Neste capítulo, apresentaremos uma revisão dos métodos ordinais inaugurados com o trabalho pioneiro de Bandt e Pompe [48], o qual definiu a entropia de permutação para análise de séries temporais. Além dessa medida, discutiremos os principais quantificadores relacionados à distribuição ordinal, como a complexidade estatística [51] e a medida de informação de Fisher [50]. Apresentaremos também uma generalização dos métodos ordinais para análise de imagens [52] e a classificação de padrões ordinais proposta por Bandt e Wittfeld [47], a qual foi a principal inspiração para o nosso trabalho com imagens de pinturas. Para leitores familiarizados com esses conceitos ou que estejam interessados nos resultados originais dessa dissertação, sugerimos a leitura a partir do próximo capítulo.

1.1 A entropia de permutação

Com o avançar da ciência, várias técnicas notáveis surgiram. Entre os diversos métodos desenvolvidos pela comunidade científica, a abordagem de Bandt e Pompe [48] para análise de séries temporais destacou-se por sua simplicidade e eficiência computacional. A literatura apresenta diversas medidas de complexidade para análise e comparação de séries temporais, no entanto, frequentemente deparamo-nos com desafios que tornam as análises custosas, tais como problemas computacionais, dificuldades de reprodutibilidade e restrições relacionadas ao tipo de dado que a técnica se destina.

Visando contornar essas dificuldades, a entropia de permutação foi concebida para ser aplicada em séries temporais arbitrárias, abrangendo tipos variados, sejam elas regulares, caóticas, ruidosas ou empíricas. Sua simplicidade intrínseca nos cálculos e a capacidade de contornar problemas encontrados em abordagens anteriores a tornam uma escolha vantajosa

e, conseqüentemente, muito popular. Prova desse fato são as quase cinco mil citações que o artigo seminal de Bandt e Pompe [48] acumulou ao longo das últimas duas décadas.

O método proposto por Bandt e Pompe particiona uma determinada série temporal $\{x_t\}_{t=1,\dots,N}$ de tamanho N e rotula cada partição com base no ordenamento de seus elementos. Usando esses rótulos, encontramos uma distribuição de probabilidades relacionada à ocorrência de cada padrão de ordenamento que é conhecida como distribuição ordinal. A entropia de Shannon [53] dessa distribuição define o que denominamos entropia de permutação [48].

Portanto, a essência do método é definir os chamados padrões ordinais, os quais são obtidos por meio do processo de particionar a série temporal e rotular as partições. O único parâmetro da abordagem original é denominado *embedding dimension* d , o qual é responsável por determinar o tamanho das partições e também o número máximo de padrões que a distribuição ordinal pode apresentar ($d!$).

Para denotar as partições, podemos associar um vetor $\vec{s}$ a cada uma. Intuitivamente, podemos imaginar que estamos percorrendo a série temporal usando uma janela deslizando de tamanho d que move por meio de passos unitários, sendo que a cada passo, um vetor $\vec{s}$ é construído. De posse desses vetores, vamos associar os elementos de cada um a índices correspondentes aos números $(0, 1, 2, \dots, d-1)$. Em seguida, ordenamos os elementos do vetor-partição em ordem crescente e aplicamos a mesma permutação aos índices. Assim, cada vetor terá associado a si uma das $d!$ possíveis permutações de $(0, 1, 2, \dots, d-1)$. Contando as ocorrências de cada uma delas, podemos definir a distribuição ordinal e a entropia de permutação.

Para ilustrar esse procedimento, vamos considerar um exemplo com uma série temporal de $N = 6$ elementos,

$$x_t = \{2, 6, 1, 4, 5, 3\},$$

e usar a *embedding dimension* $d = 2$. Ao realizar as partições, obtemos os seguintes vetores $\vec{s}$:

$$\begin{aligned}(\vec{2}) &= (2, 6), \\(\vec{3}) &= (6, 1), \\(\vec{4}) &= (1, 4), \\(\vec{5}) &= (4, 5), \\(\vec{6}) &= (5, 3).\end{aligned}$$

Em seguida, ordenamos os elementos desses vetores e observamos cada uma das duas permutações π dos índices $(0, 1)$, conforme ilustra a tabela a seguir.

$\vec{s}$	$\vec{s}$ ordenado	$\pi \rightarrow (0, 1)$
(2, 6)	(2, 6)	(0, 1)
(6, 1)	(1, 6)	(1, 0)
(1, 4)	(1, 4)	(0, 1)
(4, 5)	(4, 5)	(0, 1)
(5, 3)	(3, 5)	(1, 0)

Calculando a frequência relativa das duas permutações (0, 1) e (1, 0), podemos escrever a distribuição ordinal dessa série temporal para $d = 2$ como

$$\begin{aligned} p((0, 1)) &= 3/5, \\ p((1, 0)) &= 2/5. \end{aligned}$$

A entropia de permutação é a entropia de Shannon [53] dessas probabilidades que acabamos de calcular. Assim, lembrando que a entropia de Shannon¹ de uma distribuição de probabilidade $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é dada por

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad (1.1)$$

temos que a série temporal de nosso exemplo com $d = 2$ tem entropia de permutação

$$S = -(3/5) \log(3/5) - (2/5) \log(2/5) \approx 0.970.$$

Para ganhar ainda mais intuição, vamos realizar o procedimento com a *embedding dimension* $d = 3$ na mesma série temporal com $N = 6$ elementos. Nesse caso, as partições podem ser representadas pelos vetores:

$$\begin{aligned} (\vec{3}) &= (2, 6, 1), \\ (\vec{4}) &= (6, 1, 4), \\ (\vec{5}) &= (1, 4, 5), \\ (\vec{6}) &= (4, 5, 3). \end{aligned}$$

Além disso, temos agora $3! = 6$ possibilidades para as permutações dos índices (0, 1, 2). Todavia, observamos que dentre as permutações possíveis, apenas três aparecem nesse exemplo. Replicando os procedimentos referentes ao ordenamento dos vetores, encontramos a tabela ilustrada a seguir.

¹Para simplificar a notação matemática, todas as funções logarítmicas neste trabalho utilizam a base 2.

$\vec{s}$	$\vec{s}$ ordenado	$\pi \rightarrow (0, 1, 2)$
(2, 6, 1)	(1, 2, 6)	(2, 0, 1)
(6, 1, 4)	(1, 4, 6)	(1, 2, 0)
(1, 4, 5)	(1, 4, 5)	(0, 1, 2)
(4, 5, 3)	(3, 4, 5)	(2, 0, 1)

Usando esses resultados, podemos encontrar as probabilidades dos padrões ordinais com $d = 3$, as quais são:

$$\begin{aligned}
p((0, 1, 2)) &= 1/4, \\
p((0, 2, 1)) &= 0, \\
p((1, 0, 2)) &= 0, \\
p((1, 2, 0)) &= 1/4, \\
p((2, 1, 0)) &= 0, \\
p((2, 0, 1)) &= 2/4.
\end{aligned}$$

De posse das probabilidades, podemos calcular a entropia de permutação, obtendo

$$S = -2(1/4) \log(1/4) - (2/4) \log(2/4) \approx 1.5.$$

Agora que temos uma boa intuição sobre a abordagem de Bandt e Pompe, podemos formalizar o método de maneira geral. É importante salientar que não iremos considerar explicitamente a possibilidade de encontrarmos partições ou vetores com elementos iguais. Esse tema será retomado mais adiante no contexto de nossos resultados sobre pinturas. Seguindo com a formalização do método, vamos considerar uma série temporal arbitrária com N termos representada por

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\} = \{x_t\}_{t=1,2,\dots,N}. \quad (1.2)$$

Essa série é segmentada em partições de tamanho d representadas por

$$(\vec{s}) \rightarrow (x_{s-(d-1)}, x_{s-(d-2)}, \dots, x_{s-1}, x_s), \quad (1.3)$$

com $s = d, d+1, \dots, N$ indexando os $N - d + 1$ vetores que particionam a série. Vamos associar os símbolos $(0, 1, \dots, d-1)$ a cada um desses vetores e analisar as permutações π_i ($i = 1, \dots, d!$) que ordenam seus elementos em ordem crescente. Após encontrar todas as permutações que ocorrem na série, calculamos as probabilidades de cada uma via

$$p(\pi_i) = \frac{\#\{s | s \leq N - d + 1; (\vec{s}) \text{ do tipo } \pi_i\}}{N - d + 1}. \quad (1.4)$$

Utilizando essas probabilidades, escrevemos a distribuição ordinal $P = \{p(\pi_i)\}_{i=1,\dots,d!}$, a partir da qual, calculamos a entropia de Shannon [53], definindo a entropia de permutação como

$$S[P] = - \sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i). \quad (1.5)$$

Observamos que a *embedding dimension* d é o único parâmetro envolvido no cálculo da entropia de permutação. Esse parâmetro define o número de estados acessíveis ao sistema ($d!$) e, por isso, Bandt e Pompe sugerem usar $d = 3, \dots, 7$ em aplicações típicas. Valores grandes de d conduzem a muitas possibilidades para os padrões ordinais, obrigando o uso de séries temporais muito longas para encontrarmos uma estimativa confiável da distribuição ordinal. Nesse contexto, também é comum considerar a restrição $d! \ll N$ para a escolha da *embedding dimension*.

Podemos ainda calcular a entropia de permutação normalizada dividindo seu valor pelo valor máximo da entropia $S_{\max}$, ou seja,

$$H[P] = \frac{S[P]}{S_{\max}}, \quad (1.6)$$

de modo que o valor de H fica restrito ao intervalo $[0, 1]$. Para calcular $S_{\max}$ utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange [54]. Ao utilizar multiplicadores de Lagrange buscamos maximizar uma função $f(x, y)$ (de duas variáveis, nesse exemplo) sujeita a um vínculo de forma $g(x, y) = c$. No nosso caso, a entropia é a função a ser maximizada e cada $p(\pi_i)$ em P é uma variável. O vínculo refere-se a normalização da distribuição ordinal, isto é,

$$\sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) = 1. \quad (1.7)$$

Para utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange, construímos uma função auxiliar que contém o vínculo e a própria função que almejamos maximizar dada por

$$F(p(\pi_i), \lambda) = - \sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) - 1 \right), \quad (1.8)$$

sendo λ o chamado multiplicador de Lagrange. Derivando a função definida na equação 1.8 em relação a $p(\pi_j)$ e igualando a zero, encontramos

$$p(\pi_j) = e^{\lambda-1}. \quad (1.9)$$

Usando o vínculo da equação 1.7, encontramos que

$$1 = \sum_{j=1}^{d!} p(\pi_j) = \sum_{j=1}^{d!} e^{\lambda-1}, \quad (1.10)$$

a qual pode ser resolvida, conduzindo a

$$p(\pi_i) = \frac{1}{d!}. \quad (1.11)$$

Esse resultado confirma que a distribuição uniforme ou equiprovável maximiza a entropia. Calculando a entropia de Shannon dessa distribuição, encontramos

$$S_{\max} = \log d!, \quad (1.12)$$

resultado que pode ser usado para normalizar a entropia de permutação, isto é,

$$H[P] = \frac{S[P]}{\log d!}. \quad (1.13)$$

Com a normalização, a entropia $H[P]$ fica restrita ao intervalo $0 \leq H[P] \leq 1$. O limite inferior $H[P] \approx 0$ ocorre quando a distribuição de probabilidade apresenta apenas uma probabilidade não nula. Esse valor é característico de série regulares que apresentam apenas um único padrão ordinal. Por sua vez, o limite superior $H[P] \approx 1$ ocorre quando a distribuição de probabilidade for equiprovável ou uniforme, ou seja, todos os padrões ordinais acessíveis têm a mesma probabilidade de ocorrência, uma configuração que emerge em uma série completamente aleatória.

Para ilustrar a utilidade da entropia de permutação em contextos práticos, Bandt e Pompe [48] conduziram uma análise em uma série temporal das amplitudes de um sinal sonoro derivado da pronúncia da frase *permutation entropy measures complexity*. O objetivo era identificar os segmentos contendo voz ativa, como representado na Figura 1.1A. Além disso, eles compararam a entropia de permutação com a chamada *zero-crossing rate* (ZCR), a qual captura a velocidade que um sinal vai de valores positivos para negativos em um intervalo de tempo, ou seja, a taxa local de passagem pelo valor zero. A ZCR é comumente empregada para detectar segmentos sonoros de curta duração, sendo que a ZCR tende a apresentar valores menores para segmentos de voz ativo devido às baixas oscilações típicas desse tipo de som.

Na Figura 1.1A, notamos que o sinal inicia e termina com ruído de fundo. Essa característica é refletida em valores próximos a 1 para a entropia de permutação H , como evidenciado na Figura 1.1B. O mesmo padrão se repete para os chamados “sons não vocálicos,” que representam sons consonânticos de baixa intensidade, bem como para as pausas durante a

fala. Os segmentos que abrigam voz ativa se destacam por uma diminuição nos valores da entropia de permutação. A Figura 1.1C mostra que a ZCR também é capaz de identificar voz ativa, porém a entropia de permutação é bem mais precisa nessa identificação. Por exemplo, durante intervalos de silêncio, entre 0 e 0.3 segundos ou a partir de 3.6 segundos, a ZCR indica erroneamente a presença de voz ativa devido a sua baixa contagem, enquanto a entropia próxima a 1 corretamente sugere silêncio ou ruído. Dessa forma, podemos concluir que a entropia de permutação supera a ZCR, destacando sua capacidade superior em identificar nuances da fala, tanto durante a pronúncia quanto nas pausas resultantes das transições.

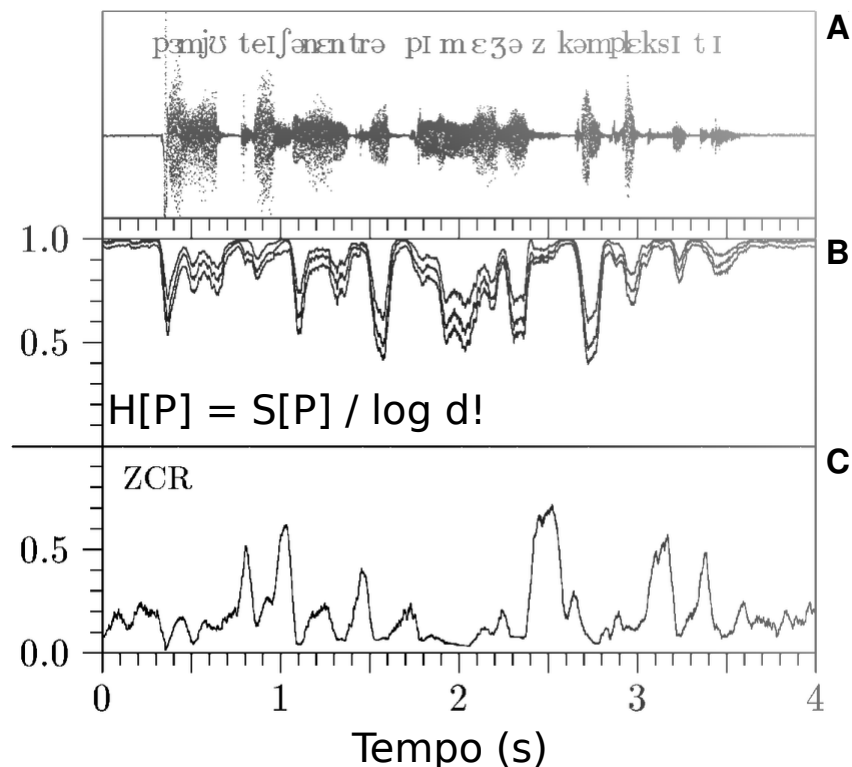


Figura 1.1: Aplicação da entropia de permutação em uma série temporal de amplitude sonora. (A) Evolução temporal das amplitudes sonoras ao longo da pronúncia da frase *permutation entropy measures complexity*. Os símbolos sobre a série indicam a transcrição fonética correspondente. A taxa de amostragem é de 11 kHz e a amplitude está em unidades arbitrárias. (B) Valores normalizados da entropia de permutação $H[P]$ para $d = 2, 3$, e 4. (C) Comportamento da *zero-crossing rate* (ZCR). A figura é uma adaptação da referência [48].

1.2 Complexidade estatística

Continuando nossa revisão, vamos adentrar no tópico de medidas de complexidade, especificamente no trabalho realizado por Lopéz-Ruiz *et al.* [49]. Esse trabalho propõe uma medida de complexidade com base em uma análise qualitativa de dois sistemas físicos opostos: o cristal perfeito e o gás ideal. Lopéz-Ruiz *et al.* notam que uma característica comum

aos dois sistemas é a baixa complexidade. Todavia, em termos de “estrutura organizacional,” esse dois sistemas são completamente diferentes, sendo o cristal perfeito completamente ordenado e o gás ideal completamente desordenado.

A ideia de López-Ruiz *et al.* é encontrar uma medida de complexidade que reflita essas características dos dois sistemas. Podemos considerar que o cristal perfeito tem alta simetria e, em termos de distribuições de probabilidades, sua distribuição deve ser caracterizada pela existência de um único estado. Logo, a informação para descrever o estado espacial de um cristal perfeito deve ser mínima. Já no caso de um gás ideal, temos uma disposição espacial completamente desordenada, o que acarreta em uma distribuição de probabilidade equiprovável. Dessa forma, a informação necessária para descrever a configuração espacial de um gás ideal deve ser máxima, ou seja, temos uma configuração completamente aleatória que não pode ser reduzida em termos informacionais.

Assim, a informação ou entropia H não pode ser considerada uma medida de complexidade visto que ela coloca o cristal perfeito e o gás ideal em dois extremos. Para contornar esse característica, López-Ruiz *et al.* definem uma medida auxiliar denominada desequilíbrio D . Trata-se de uma medida de distância entre a distribuição equiprovável e a distribuição dos estados do sistema em análise. Desse modo, para o cristal, que tem distribuição de probabilidade centrada em um único estado, haverá um valor elevado para o desequilíbrio. Por outro lado, para o gás ideal, com distribuição equiprovável, o desequilíbrio será nulo.

Combinando o comportamento da medida de entropia H com o desequilíbrio D , López-Ruiz *et al.* propuseram uma medida de complexidade que é o produto dessas duas quantidades, ou seja, $C = H \times D$. A Figura 1.2 ilustra o comportamento de H , D e C ao variar o grau de ordenação do sistema entre os casos extremos de um cristal perfeito e um gás ideal. Notamos que a medida de complexidade C carrega em si o conceito qualitativo/intuitivo de que tanto o cristal quanto o gás ideal são sistemas de baixa complexidade, sendo um sistema de alta complexidade aquele que está em um estado intermediário de ordenação entre o perfeitamente ordenado e o completamente aleatório.

Concluída nossa exposição qualitativa, vamos formalizar essa medida de complexidade. López-Ruiz *et al.* argumentam que é razoável relacionar uma medida de distância ao desequilíbrio D . Assim, devemos ter duas condições respeitadas. Primeiramente, $D > 0$, pois a complexidade deve ser positiva. Em segundo lugar, $D = 0$ no limite de equiprobabilidade dos estados do sistema. Então, podemos definir o desequilíbrio como a distância euclidiana convencional entre a distribuição de probabilidade do sistema $P = \{p(\pi_i)\}_{i=1,\dots,d!}$ e a distribuição uniforme $P_e = \{1/d!\}_{i=1,\dots,d!}$, ou seja,

$$D = \sum_{i=1}^{d!} \left(p(\pi_i) - \frac{1}{d!} \right)^2. \quad (1.14)$$

Desse modo, a complexidade C proposta por López-Ruiz *et al.* combinada com a abor-

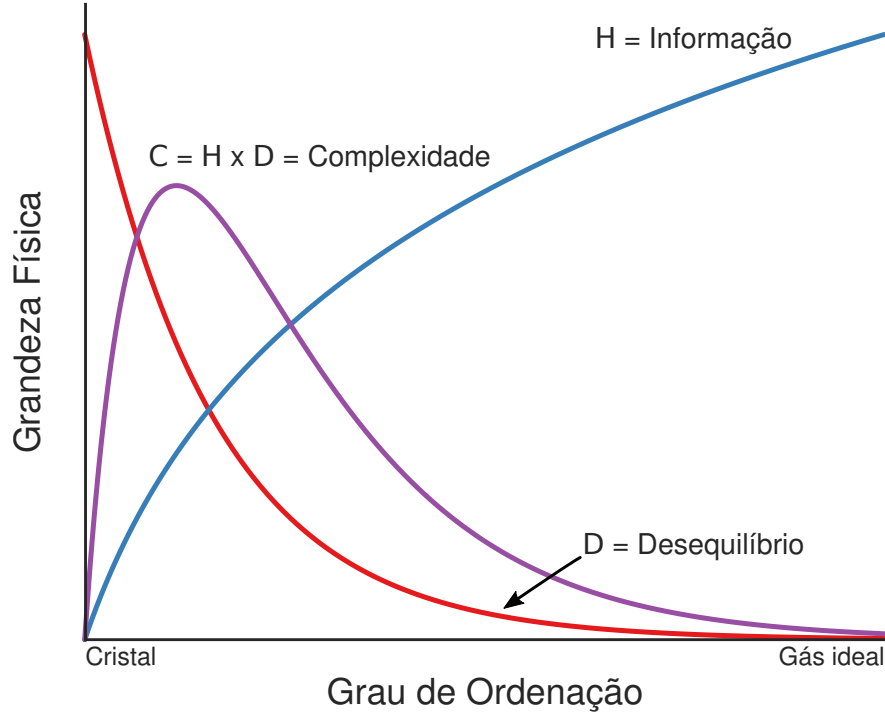


Figura 1.2: Ilustração do comportamento intuitivo esperado para as grandezas entropia H , desequilíbrio D e complexidade $C = H \times D$, todas em função do grau de ordenação do sistema. No extremo de ordem podemos ter um cristal perfeito; já no extremo de aleatoriedade, um gás ideal. Notamos que a medida de complexidade estatística de López-Ruiz *et al.* [49] captura a noção intuitiva de complexidade para os exemplos citados, ou seja, tende a zero para ambos e apresenta um valor máximo entre esses dois extremos de ordem e desordem. A figura é uma adaptação da referência [49].

dagem de Bandt e Pompe [48] fica

$$C = HD = -C_0 \left(\sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{d!} \left\{ p(\pi_i) - \frac{1}{d!} \right\}^2 \right), \quad (1.15)$$

com C_0 sendo uma constante de normalização. Retomando nossa discussão, temos que o cristal perfeito apresenta informação H mínima e desequilíbrio máximo; portanto $C \rightarrow 0$. Para o gás ideal, a informação H é máxima e desequilíbrio é nulo, conduzindo também a complexidade $C \rightarrow 0$. Assim, em termos de organização estrutural, os sistemas que estiverem entre o ordenado e o desordenado apresentam valores de complexidade positivos.

Uma característica notória da medida de complexidade de López-Ruiz *et al.* é a não univocidade da relação entre H e C . Em outras palavras, embora C seja definida pelo produto entre D e H , não existe uma correspondência um para um entre os valores de complexidade e entropia. Na verdade, para um dado valor de H , os valores de complexidade C podem variar em um intervalo $[C_{\min}, C_{\max}]$. Isso ocorre porque C também depende da distância D entre a distribuição do sistema e a distribuição uniforme.

Para esclarecer melhor esse fato vamos considerar um exemplo com três estados possíveis

cujas probabilidade são $p_1 = x$, $p_2 = y$ e $p_3 = 1 - (x + y)$. Calculando a entropia e o desequilíbrio temos:

$$H = -(x \log x + y \log y + (1 - x - y) \log(1 - x - y)) \quad (1.16)$$

e

$$D = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left((1 - x - y) - \frac{1}{3}\right)^2, \quad (1.17)$$

respectivamente. Analisando essas expressões fica claro que os valores de H não estão univocamente atrelados aos de D e, conseqüentemente, da complexidade C . Por exemplo, para as distribuições

$$P_1 = \{0.80, 0.16, 0.03\} \text{ e } P_2 = \{0.81, 0.14, 0.04\} \quad (1.18)$$

encontramos $H \approx 0.600$; porém, o desequilíbrio referente a P_1 é $D = 0.3338$, enquanto para P_2 temos $D = 0.3448$. Conseqüentemente, a complexidade assume valores distintos para P_1 e P_2 , os quais são $C = 0.2004$ e $C = 0.2054$, respectivamente. Varrendo todas as possibilidades para os valores de x e y nas definições de p_1 , p_2 e p_3 , podemos construir um plano com valores de entropia e complexidade, conforme mostra a Figura 1.3. Esse figura deixa claro o fato de que para um valor de entropia temos um intervalo de possibilidades para a complexidade, ou seja, a medida de complexidade quantifica informação adicional sobre o sistema que não está contida na medida de entropia.

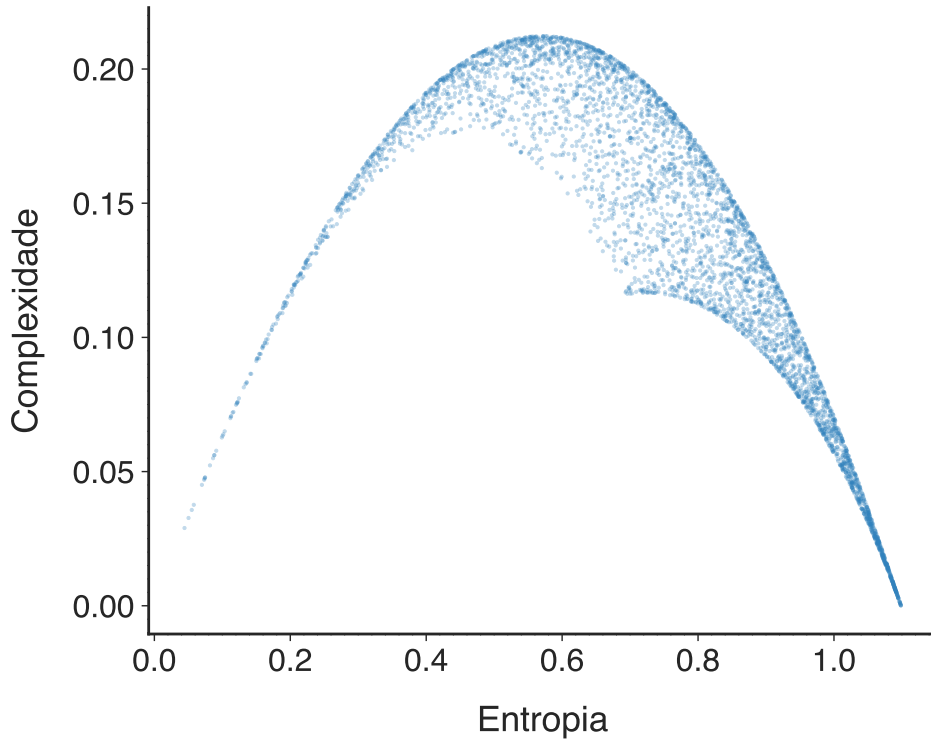


Figura 1.3: Plano complexidade-entropia ilustrando o fato da medida de complexidade não ser uma função unívoca da entropia. A figura é uma adaptação da referência [49].

1.3 Plano complexidade-entropia

Parcialmente inspirados pelo trabalho de López-Ruiz *et al.*, Rosso *et al.* [51] propuseram usar um plano complexidade-entropia para distinguir séries temporais caóticas e estocásticas. A ideia de Rosso *et al.* foi combinar a entropia de permutação normalizada de Bandt e Pompe [48] com uma medida de desequilíbrio associada à divergência de Jensen-Shannon [55]. Mais especificamente, no lugar da distância euclidiana, eles definem o desequilíbrio como

$$D[P] = D_0 \left\{ H\left[\frac{P + P_e}{2}\right] - \frac{H[P]}{2} - \frac{H[P_e]}{2} \right\}, \quad (1.19)$$

na qual

$$P = \{p(\pi_i)_{i=1,\dots,d!}\} \text{ e } P_e = \left\{\frac{1}{d!}, \dots, \frac{1}{d!}\right\} \quad (1.20)$$

são a distribuição ordinal da série temporal e a distribuição equiprovável, respectivamente. Além disso, D_0 é uma constante de normalização dada por

$$D_0 = \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{d! + 1}{d!} \log(d! + 1) - \log d! - 2 \log 2 \right) \right\}^{-1}, \quad (1.21)$$

a qual pode ser calculada usando o método dos multiplicadores de Lagrange, tal como fizemos para calcular o valor máximo da entropia de Shannon.

Desse modo, Rosso *et al.* usam o método de Bandt e Pompe [48] para calcular a entropia de permutação normalizada,

$$H[P] = -\frac{1}{\log d!} \sum_{i=1}^{d!} p(\pi_i) \log p(\pi_i), \quad (1.22)$$

e definem sua medida de complexidade (em analogia à de López-Ruiz *et al.* [49]) como

$$C = H[P]D[P]. \quad (1.23)$$

Além disso, eles propuseram o uso combinado dos valores de H e C , o qual foi chamado de *complexity-entropy causality plane*, sendo o termo *causality* usado para informar que a distribuição de probabilidade usada para caracterizar as séries temporais é oriunda da abordagem de Bandt e Pompe.

A Figura 1.4 apresenta o principal resultado obtido por Rosso *et al.*: um plano complexidade-entropia calculado para diversas séries temporais de natureza caótica e estocástica. Observamos que as séries temporais de carácter caótico apresentam valores de complexidade próximos ao máximo e valores intermediários de entropia. Por outro lado, séries temporais oriundas de processos estocásticos estão localizadas em regiões marcadamente distintas, caracterizadas por valores intermediários de complexidade e valores mais altos de entropia.

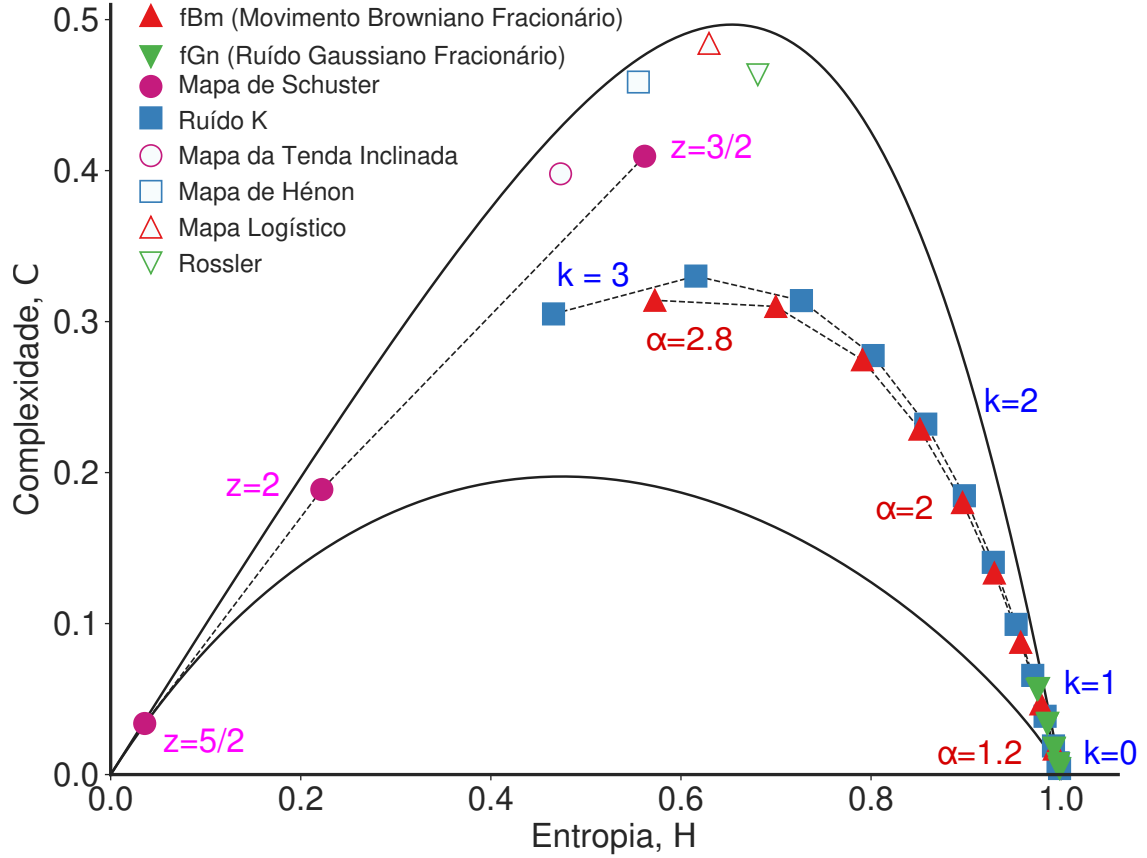


Figura 1.4: Relação entre entropia (H) e complexidade (C) para diversos sistemas dinâmicos e estocásticos. As curvas pretas sólidas representam a fronteira teórica que relaciona os valores de entropia com os possíveis máximos e mínimos de complexidade. Diferentes símbolos e cores indicam os sistemas. O círculo rosa representa o mapa da tenda inclinada, o quadrado azul claro refere-se ao mapa de Hénon, o triângulo vermelho ao mapa logístico, o triângulo verde ao sistema de Rössler, o círculo rosa preenchido ao mapa de Schuster, o quadrado azul escuro ao ruído k , o triângulo vermelho preenchido ao movimento browniano fracionário (fBm) e o triângulo verde preenchido ao ruído gaussiano fracionário (fGn). As linhas pontilhadas conectam pontos dos processos de ruído k e fBm, mostrando variações específicas dos parâmetros k e α (expoente de Hurst), respectivamente. Os valores de z , k e α estão destacados ao lado de seus respectivos pontos, indicando diferentes regimes. A figura é uma adaptação da referência [51].

1.4 Plano Fisher-Shannon

Motivados pelo mesmo problema de Rosso *et al.*, ou seja, distinguir séries temporais geradas por processos caóticos e processos estocásticos, Olivares *et al.* [50] propuseram a utilização de um novo quantificador para a distribuição ordinal chamado de medida de informação de Fisher F [56]. A motivação para a escolha dessa quantidade refere-se ao fato da medida de informação de Fisher ser um quantificador local dos padrões de uma distribuição de probabilidade altamente sensível a variações entre os elementos da distribuição.

Desta forma, Olivares *et al.* combinam a entropia de permutação normalizada H com

a medida de Fisher F , produzindo um diagrama H versus F denominado de plano Fisher-Shannon. Para definir esse espaço de representação, notamos que a medida de informação de Fisher é dada por [50]

$$F(P) = F^* \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{p(\pi_{i+1})} - \sqrt{p(\pi_i)})^2, \quad (1.24)$$

na qual

$$F^* = \begin{cases} 1 & \text{se } p(\pi_{i^*}) = 1 \text{ para } i^* = 1 \text{ ou } i^* = n \\ 1/2 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.25)$$

é uma constante de normalização garantindo que $0 < F < 1$. Nesse cálculo, os elementos $p(\pi_i)$ da distribuição de probabilidade ordinal P são ordenados em ordem lexicográfica conforme determinado pelo código de Lehmer [57, 58], o que corresponde a ordem alfabética dos padrões ordinais ou símbolos de permutação. Conforme já mencionado, o valor de F é uma medida local altamente sensível a mudanças entre os elementos da distribuição ordinal, semelhante ao gradiente de uma distribuição de probabilidade no caso contínuo. A medida de informação de Fisher exibe um comportamento antagônico à entropia de permutação, aproximando-se de um para sistemas altamente ordenados ($F \approx 1$) e zero para sistemas desordenados ($F \approx 0$). Além disso, similarmente à complexidade estatística, o valor de F não pode ser diretamente relacionado a H , o que motiva o uso conjunto de ambos os quantificadores formando o plano Fisher-Shannon [50].

Similarmente ao trabalho de Rosso *et al.*, Olivares *et al.* [50] usaram o plano Fisher-Shannon para distinguir entre séries temporais oriundas de mapas e sistemas dinâmicos (mapa tenda inclinada, mapa de Henon, mapa logístico, mínimos de Rössler e mapa de Schuster) e séries estocásticas (ruído k , movimento browniano fracionário e ruído gaussiano fracionário). Para isso, empregaram ainda séries temporais com $N = 2^{15}$ termos e *embedding dimension* $d = 6$. A Figura 1.5 mostra a posição de cada série temporal no plano Fisher-Shannon. Podemos observar que as séries temporais oriundas de sistemas caóticos estão localizadas na região $0.45 < H < 0.70$ e apresentam valores altos para a informação de Fisher. Por outro lado, séries temporais de natureza estocástica apresentam valores menores para a medida de informação de Fisher. Além disso, é interessante notar que ao passo que as correlações nas séries estocásticas aumentam, temos uma diminuição nos valores de entropia e um aumento nos valores da medida de informação de Fisher.

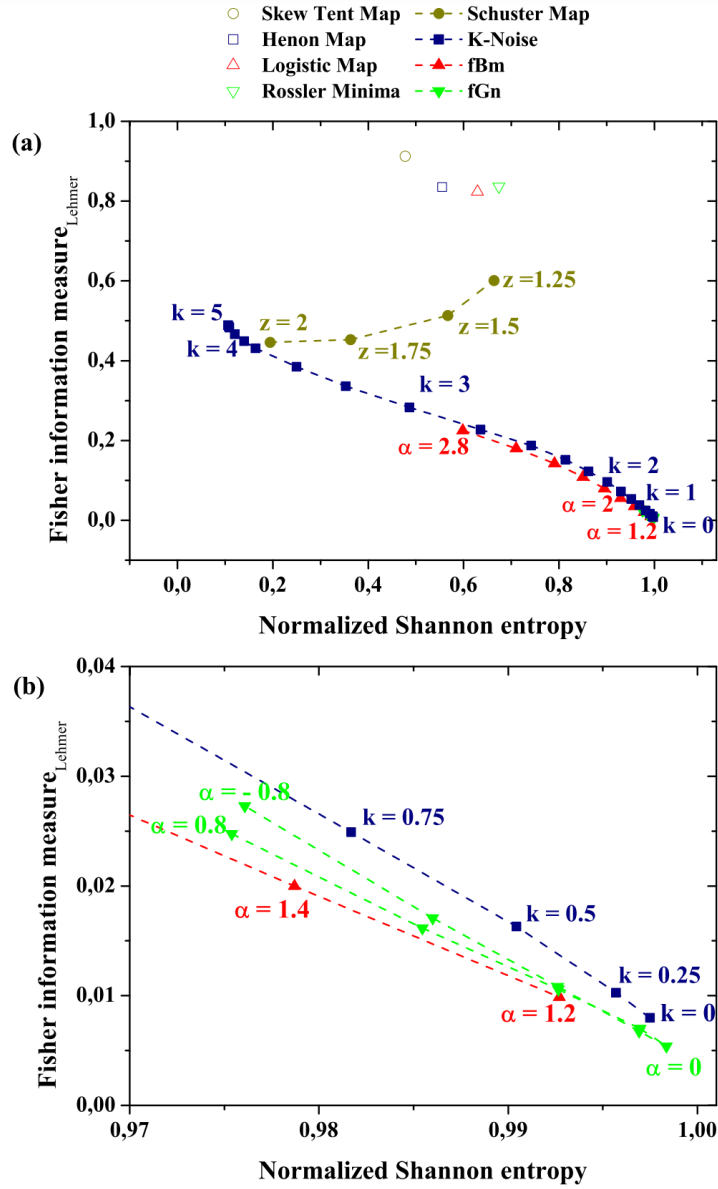


Figura 1.5: Comportamento de séries temporais estocásticas e caóticas no plano Fisher-Shannon. (A) Localização de diversos sistemas caóticos e estocásticos no plano Fisher-Shannon. Para essa análise, foram utilizadas séries temporais com $N = 2^{15}$ termos e *embedding dimension* $d = 6$. Cada ponto no gráfico representa um sistema específico. (B) Ampliação do comportamento ao redor do ponto $H = 1$ e $F = 0$. A figura é uma adaptação da referência [50].

Em outro exemplo, Olivares *et al.* [50] analisaram séries do mapa logístico obtidas iterando a equação de recorrência que o define,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.26)$$

para diferentes valores do parâmetro r . Nesse caso, a intenção é verificar se o plano Fisher-Shannon é capaz de distinguir os diferentes regimes que o mapa logístico exibe. A Figura 1.6A

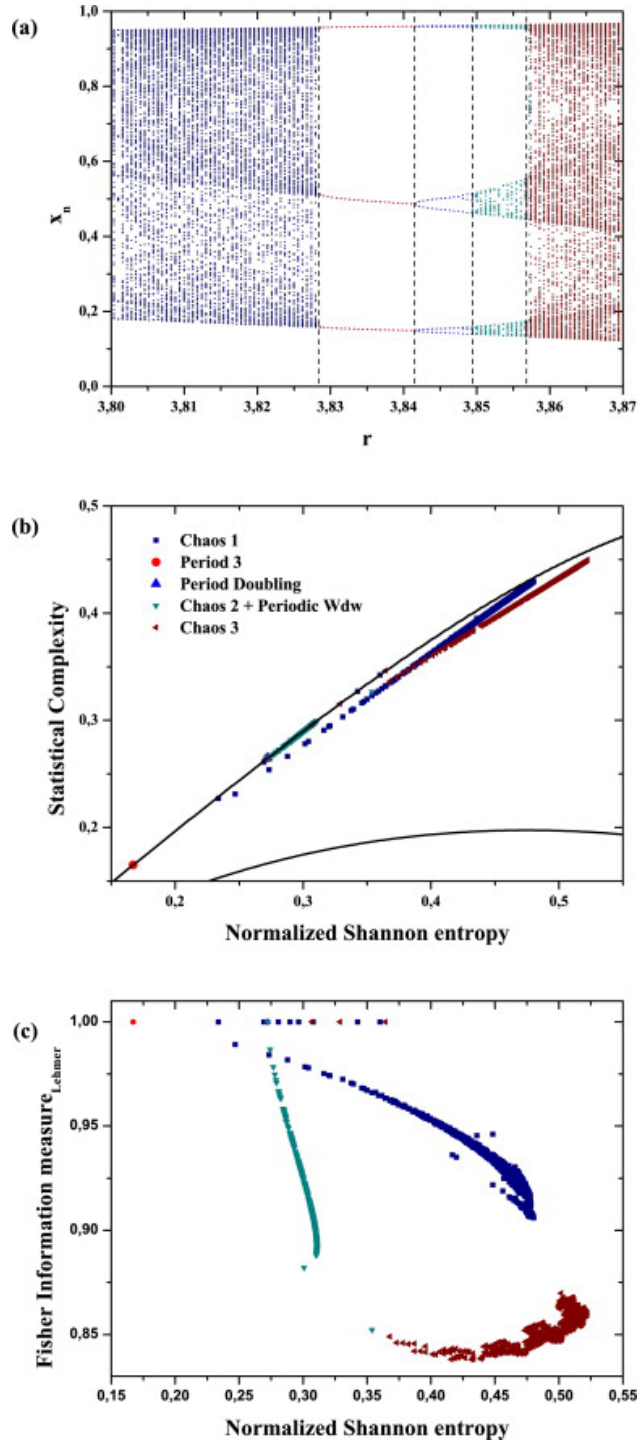


Figura 1.6: Análise dos regimes do mapa logístico. O painel (A) mostra o diagrama de bifurcação em função do parâmetro r , (B) mostra o plano complexidade-entropia e (C) o plano Fisher-Shannon. Usou-se $d = 6$ nas duas análises. A figura é uma adaptação da referência [50].

mostra o diagrama de bifurcação do mapa logístico para r entre 3.8 e 3.87, destacando 4 desses regimes, os quais os autores denominaram *chaos 1* (círculos em azul), *period 3* (círculos em vermelho), *period doubling* (triângulos em azul), *chaos 2* (triângulos em verde) e *chaos*

3 (triângulos em vermelho). A Figura 1.6B mostra a análise usando o plano complexidade-entropia, enquanto o painel (C) mostra as mesmas séries analisadas com o plano Fisher-Shannon. Notamos que ambas as representações distinguem bem os regimes típicos do mapa logístico. Porém, a separação entre regimes periódicos e caóticos é mais clara no plano Fisher-Shannon.

1.5 Padrões ordinais em imagens

A abordagem de Bandt e Pompe, originalmente proposta para séries temporais, também foi estendida por Ribeiro *et al.* [52] para o contexto de imagens ou outros tipos de dados bidimensionais em forma de grade. Nesse caso, no lugar da série temporal $\{x_t\}_{t=1,2,\dots,N}$ temos uma matriz $\{y_i^j\}_{i=1,\dots,n_x}^{j=1,\dots,n_y}$ de tamanho $n_x \times n_y$, cujos elementos podem representar a intensidade dos pixels de uma imagem.

Tal como fizemos no caso de séries temporais, é preferível iniciar a apresentação da generalização do método por meio de um exemplo, antes de abordar sua definição formal. Para isso, vamos considerar uma matriz quadrada de tamanho três por três ($n_x = n_y = 3$) dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Essa matriz é particionada em submatrizes de tamanho $d_x = d_y = 2$ (as *embedding dimensions* do caso bidimensional) de modo análogo ao processo que realizamos com os vetores ($\vec{s}$) do caso unidimensional. Essas partições podem ser pensadas como o resultado de uma amostragem da matriz A usando uma janela móvel de tamanho dois por dois que se move por meio de passos unitários nas direções horizontal e vertical. Denotando por (s_x, s_y) , com $s_x = d_x, \dots, n_x$ e $s_y = d_y, \dots, n_y$, o canto inferior de cada uma dessas posições da janela, temos as seguintes partições:

$$(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(3, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$(2, 3) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(3, 3) = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, concatenamos as linhas dessas submatrizes para representar os elementos de

cada partição como vetores simples, conduzindo a:

$$\begin{aligned}(2, 2) &= (1, 2, 7, 8), \\(3, 2) &= (2, 5, 8, 9), \\(2, 3) &= (7, 8, 6, 3), \\(3, 3) &= (8, 9, 3, 4).\end{aligned}$$

Por fim, esses vetores são analisados usando o mesmo procedimento realizado para as séries temporais, conduzindo aos padrões ordinais ou símbolos de permutação. Por exemplo, o primeiro vetor corresponde ao padrão $(0, 1, 2, 3)$. Além disso, para simplificar a notação, vamos denotar esses padrões usando a forma $[u_1 u_2 \dots u_{d_x \times d_y}]$ com cada u_i assumindo um dos valores do conjunto $(0, 1, \dots, d_x \times d_y - 1)$. Assim, por exemplo, o padrão $(0, 1, 2, 3)$ também pode ser representado por $[0123]$.

Com as permutações conhecidas nesse exemplo bidimensional, podemos avançar e obter as probabilidades de cada padrão que ocorre no dado. No exemplo em questão, temos

$$\begin{aligned}p([0123]) &= 2/4, \\p([3201]) &= 1/4, \\p([2301]) &= 1/4.\end{aligned}$$

Notamos que, das $(d_x d_y)! = 24$ permutações possíveis, temos a ocorrência de apenas três estados nesse exemplo.

Uma vez que temos boa intuição sobre o caso bidimensional, passamos agora à sua formalização para uma matriz de dados $A = \{y_i^j\}_{i=1, \dots, n_x}^{j=1, \dots, n_y}$ arbitrária, considerando também *embedding dimensions* d_x e d_y arbitrárias. Nesse caso, cada submatriz representando uma das $(n_x - d_x + 1)(n_y - d_y + 1)$ partições pode ser expressa por

$$(s_x, s_y) \mapsto \begin{pmatrix} y_{s_x - (d_x - 1)}^{s_y - (d_y - 1)} & y_{s_x - (d_x - 2)}^{s_y - (d_y - 1)} & \cdots & y_{s_x - 1}^{s_y - (d_y - 1)} & y_{s_x}^{s_y - (d_y - 1)} \\ y_{s_x - (d_x - 1)}^{s_y - (d_y - 2)} & y_{s_x - (d_x - 2)}^{s_y - (d_y - 2)} & \cdots & y_{s_x - 1}^{s_y - (d_y - 2)} & y_{s_x}^{s_y - (d_y - 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{s_x - (d_x - 1)}^{s_y - 1} & y_{s_x - (d_x - 2)}^{s_y - 1} & \cdots & y_{s_x - 1}^{s_y - 1} & y_{s_x}^{s_y - 1} \\ y_{s_x - (d_x - 1)}^{s_y} & y_{s_x - (d_x - 2)}^{s_y} & \cdots & y_{s_x - 1}^{s_y} & y_{s_x}^{s_y} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

com $s_x = d_x, d_x + 1, \dots, n_x$ e $s_y = d_y, d_y + 1, \dots, n_y$. Concatenando as linhas dessas submatrizes, ficamos com

$$\begin{aligned}y_{s_x - r_{d_x - 1}}^{s_y - u_{d_y - 1}} &\leq y_{s_x - r_{d_x - 1}}^{s_y - u_{d_y - 1}} \leq \cdots \leq y_{s_x - r_1}^{s_y - u_{d_y - 1}} \leq y_{s_x - r_0}^{s_y - u_{d_y - 1}} \leq \cdots \\ &\leq y_{s_x - r_{d_x - 1}}^{s_y - u_0} \leq y_{s_x - r_{d_x - 2}}^{s_y - u_0} \leq \cdots \leq y_{s_x - r_1}^{s_y - u_0} \leq y_{s_x - r_0}^{s_y - u_0},\end{aligned} \quad (1.29)$$

a partir da qual podemos encontrar todas as permutações π_i dos índices $(0, 1, \dots, d_x \times d_y - 1)$. Por fim, calculando a frequência relativa dessas permutações, temos as probabilidades

$$p(\pi_i) = \frac{\#\{(s_x, s_y) | s_x \leq n_x - d_x + 1 \text{ e } s_y \leq n_y - d_y + 1; (s_x, s_y) \text{ do tipo } \pi_i\}}{(n_x - d_x + 1)(n_y - d_y + 1)}, \quad (1.30)$$

bem como a distribuição ordinal $P = \{p(\pi_i)\}_{i=1, \dots, (d_x d_y)!}$. De posse dessa distribuição, podemos calcular a entropia de permutação ou qualquer outro quantificador da distribuição ordinal.

De modo geral, as expressões obtidas para o caso de séries temporais podem ser diretamente estendidas para o caso bidimensional fazendo a substituição de d por $(d_x \times d_y)$. Por exemplo, no caso do desequilíbrio definido a partir da divergência de Jensen-Shannon [55], temos

$$D[P] = D_0 \{S[(P + P_e)/2] - S[P]/2 - S[P_e/2]\}, \quad (1.31)$$

com a constante de normalização agora definida como

$$D_0 = \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(d_x d_y)! + 1}{(d_x d_y)!} \log((d_x d_y)! + 1) + \log(d_x d_y)! - 2 \log 2(d_x d_y)! \right) \right\}^{-1}, \quad (1.32)$$

a qual pode ser diretamente comparada com a equação 1.21.

Para ilustrar o uso de padrões ordinais para análise de imagens, vamos descrever os resultados de Ribeiro *et al.* [52] referentes à análise de superfícies fractais caracterizadas pelo expoente de Hurst h , que por sua vez tem relação com a dimensão fractal $D_f = 3 - h$. A Figura 1.7 mostra exemplos dessas superfícies para valores de h entre 0.1 e 0.9. Notamos que quanto menor o valor de h , mais rugosa é superfície gerada.

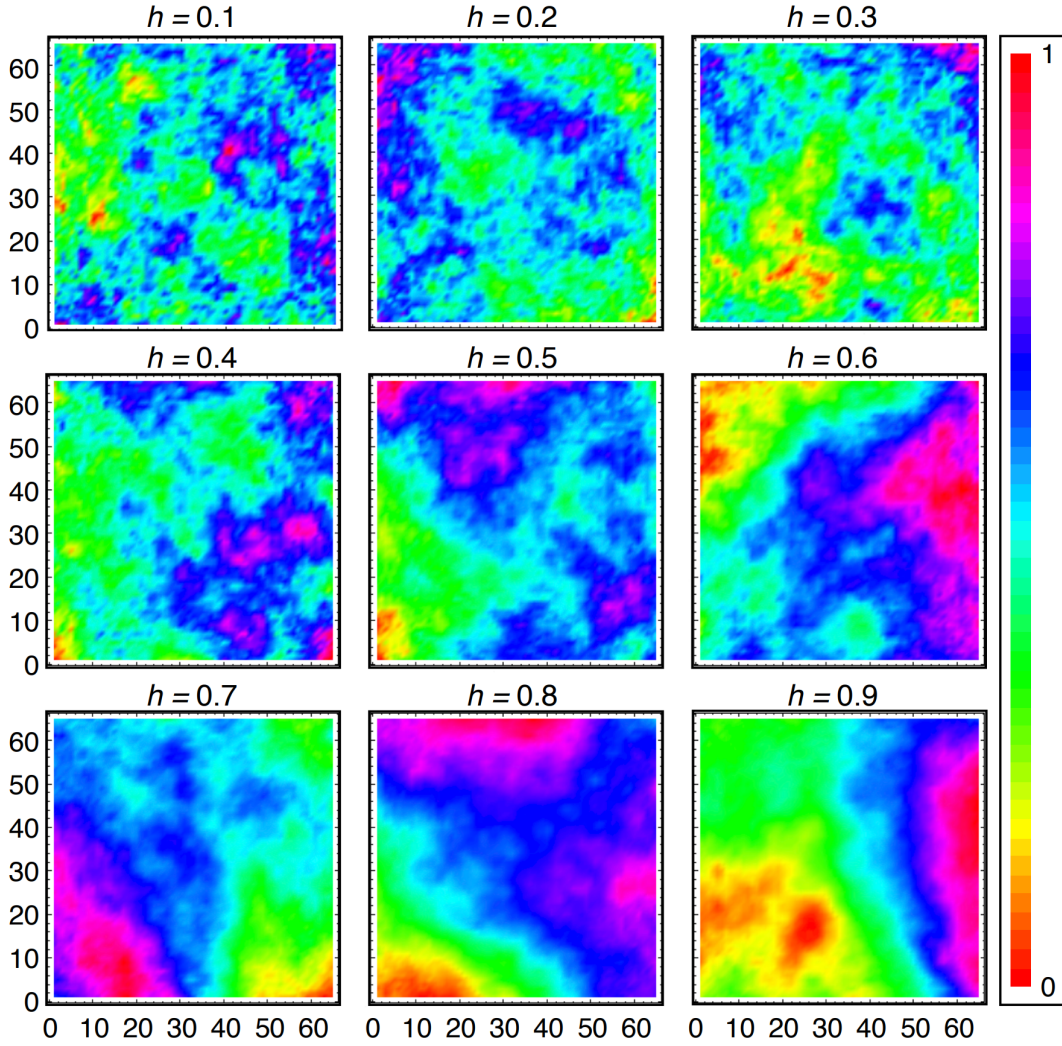


Figura 1.7: Exemplos de superfícies fractais caracterizadas por diferentes valores do expoente de Hurst h . A figura é uma adaptação da referência [52].

Usando um conjunto dessas superfícies fractais, Ribeiro *et al.* [52] investigaram o comportamento do plano complexidade-entropia como função do expoente de Hurst h . Mais especificamente, eles construíram uma visualização tridimensional na qual os valores de entropia e complexidade formam os eixos canônicos x e y , enquanto os valores de h estão ao longo eixo z . Esses resultados são mostrados na Figura 1.8 para três combinações de *embedding dimensions* d_x e d_y . Em todos os casos, os dados mostram que os valores de entropia e complexidade são muito eficientes em distinguir os diferentes níveis de rugosidade das superfícies fractais geradas com diferentes valores do expoente de Hurst.

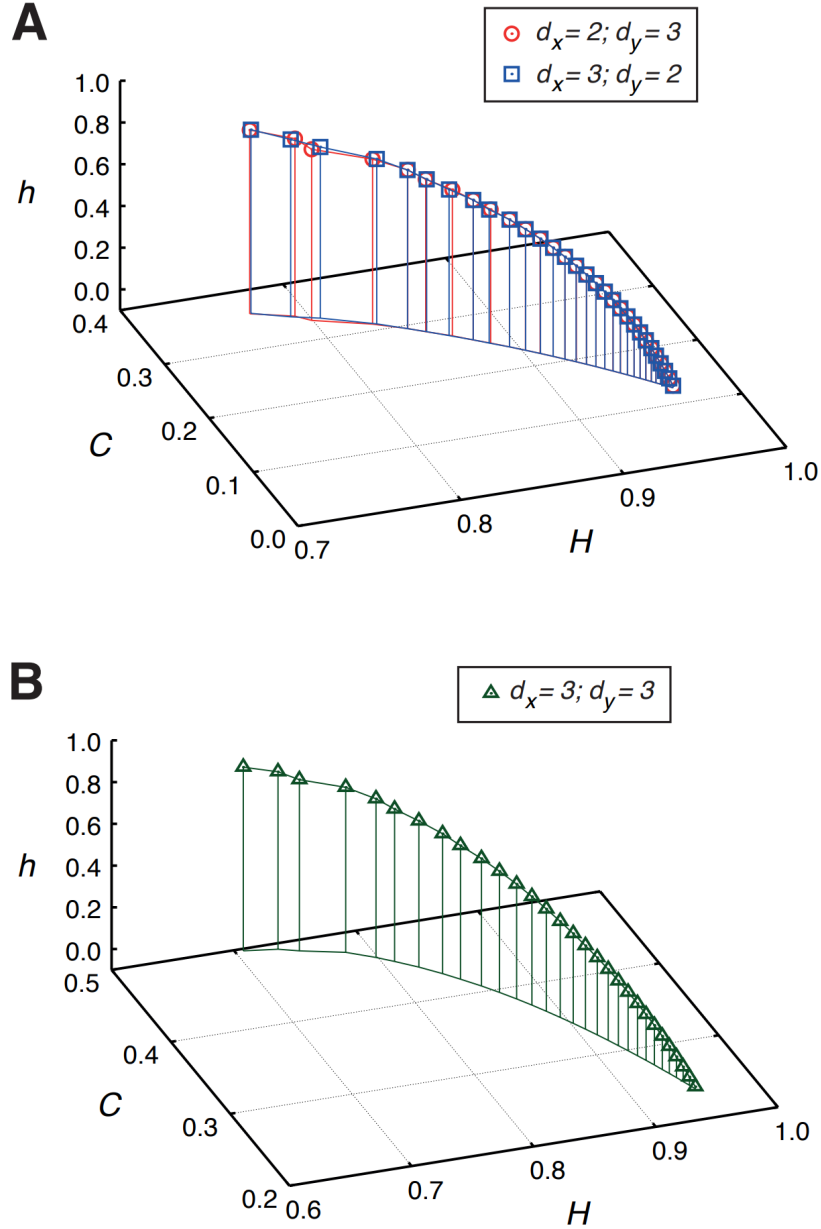


Figura 1.8: Análise de superfícies fractais usando o plano complexidade-entropia. Os dois painéis mostram uma visualização tridimensional compreendendo os valores de H , C e h . Em (A) temos duas curvas referentes a $d_x = 2$ e $d_y = 3$, e $d_x = 3$ e $d_y = 2$. Já a curva em (B) mostra resultados para $d_x = 3$ e $d_y = 3$. A figura é uma adaptação da referência [52].

1.6 Classificação de padrões ordinais dois por dois

Apoiando-se no trabalho de Ribeiro *et al.* [52] sobre padrões ordinais em imagens, Bandt e Wittfeld [47] propuseram uma classificação para padrões ordinais dois por dois, ou seja, para o caso em que as *embedding dimensions* d_x e d_y são iguais a 2. Além disso, essa classificação conduz a duas medidas para análise de imagens denominadas suavidade (*smoothness*) τ e estrutura de curva (*curve structure*) κ .

Para apresentar esses quantificadores e também a classificação de padrões ordinais de Bandt e Wittfeld é conveniente introduzir uma maneira alternativa de encontrar os padrões ordinais que foi usada pelos autores. No lugar de investigar permutações dos índices $(0, 1, 2, 3)$ que ordenam os elementos das partições dois por dois, Bandt e Wittfeld utilizam um procedimento baseado na atribuição de ranque aos valores da partição para a construção do padrão ordinal ou *motif* da partição.

Considerando novamente as partições dois por dois da matriz definida na equação 1.27, isto é,

$$(2, 2) = (1, 2, 7, 8) ,$$

$$(3, 2) = (2, 5, 8, 9) ,$$

$$(2, 3) = (7, 8, 6, 3) ,$$

$$(3, 3) = (8, 9, 3, 4) .$$

podemos exemplificar esse procedimento. Para cada partição, substituímos seus elementos pelo ranque de cada um, sendo o ranque 4 atribuído ao maior valor, 3 ao segundo maior valor, 2 ao terceiro maior e 1 ao menor valor. Desse modo, os padrões ficam

$$(2, 2) \rightarrow (1, 2, 3, 4) ,$$

$$(3, 2) \rightarrow (1, 2, 3, 4) ,$$

$$(2, 3) \rightarrow (3, 4, 2, 1) ,$$

$$(3, 3) \rightarrow (3, 4, 1, 2) .$$

Naturalmente, esse procedimento baseado em ranque vai conduzir à mesma distribuição ordinal, uma vez que apenas a designação dos padrões muda, ficando suas frequências relativas inalteradas. De fato, é possível relacionar os padrões obtidos via ranqueamento com aqueles relacionados à permutação de maneira simples. Basta aplicar o procedimento de permutação aos padrões de ranque. Por exemplo, para a última partição, $(8, 9, 3, 4)$, tomamos seu padrão de ranqueamento $(3, 4, 1, 2)$ e procuramos pela permutação de $(0, 1, 2, 3)$ que ordena os elementos em ordem crescente, encontrando $(2, 3, 0, 1)$, o qual é o padrão de permutação de $(8, 9, 3, 4)$. Portando existe, uma correspondência um para um entre os padrões de permutação e os padrões de ranqueamento. Porém, o procedimento de ranqueamento gera padrões que são mais facilmente interpretados, o que vai facilitar a introdução da classificação de Bandt e Wittfeld.

Seguindo nossa descrição, sabemos que existem $4! = 24$ padrões ordinais possíveis em partições dois por dois. Com base em argumentos de simetria e rugosidade, Bandt e Wittfeld categorizaram esses 24 padrões em três grupos, cada um contendo oito padrões, denominados por tipo I, tipo II e tipo III. Uma representação desses padrões agrupados é mostrada na

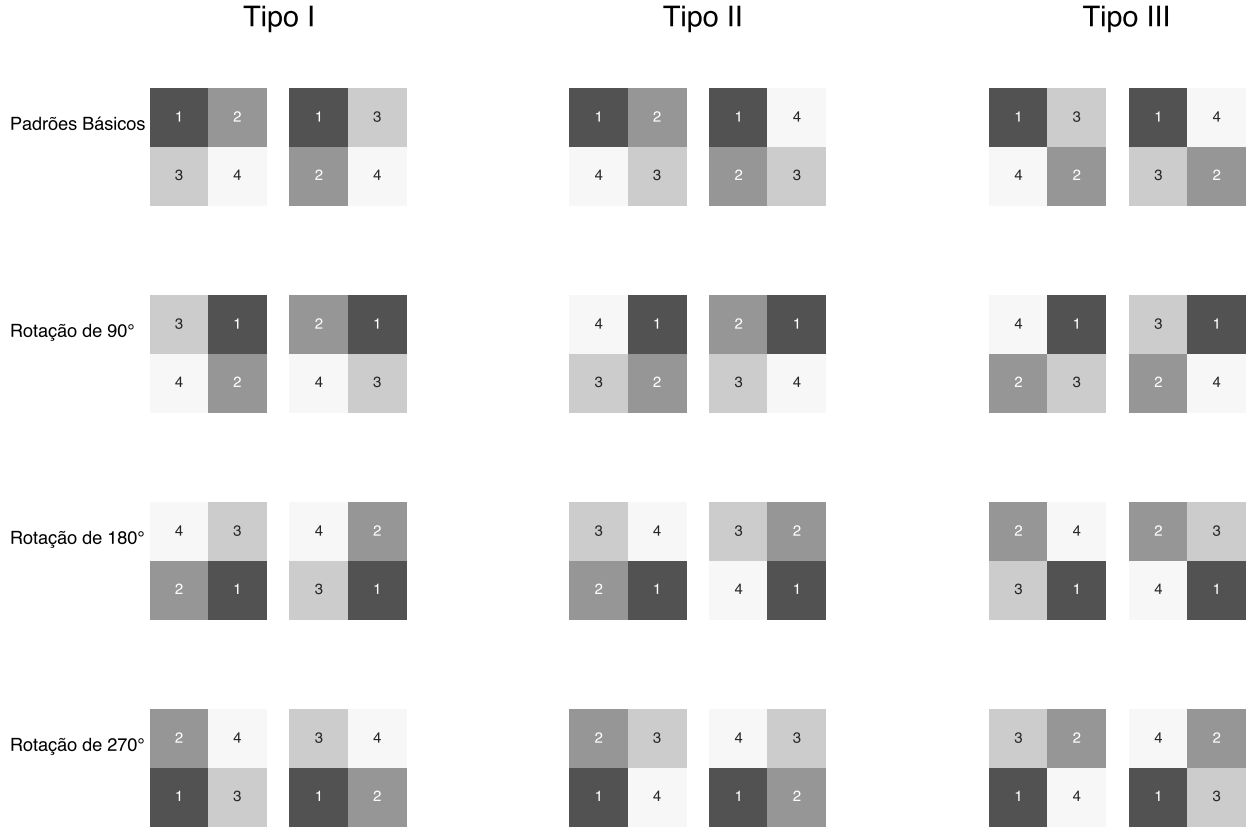


Figura 1.9: Agrupamento dos 24 padrões ordinais em três tipos propostos por Bandt e Wittfeld [47]. A figura é uma adaptação da referência [47].

Figura 1.9. Cada um dos três tipos é formado por dois padrões básicos ou primários (primeira linha da figura) e por rotações desses padrões (demais linhas da figura).

O tipo I compreende os padrões primários [1234] e [1324], juntamente com suas versões rotacionadas por um quarto ([3142] e [2143]), metade ([4321] e [4231]) e três quartos ([2413] e [3412]) de volta. Este grupo contém os padrões ordinais mais contínuos, que emergem quando os elementos das partições dois por dois estão em um plano tridimensional (ou seja, os valores aumentam ou diminuem simultaneamente ao longo das colunas e linhas). O tipo II é formado pelos padrões primários [1243] e [1423], e suas versões rotacionadas por um quarto ([4132] e [2134]), metade ([3421] e [3241]) e três quartos ([2314] e [4312]) de volta. Estes padrões são menos contínuos do que os do tipo I e surgem quando as intensidades dos pixels dentro das partições aumentam ou diminuem simultaneamente em uma direção, mas apresentam tendências distintas na outra (por exemplo, no padrão [3421], a primeira linha aumenta da esquerda para a direita enquanto a segunda diminui, com valores ao longo de ambas as colunas diminuindo de cima para baixo). O tipo III representa os padrões mais descontínuos,

compreendendo os padrões primários [1342] e [1432], e suas versões rotacionadas por um quarto ([4123] e [3124]), metade ([2431] e [2341]) e três quartos ([3214] e [4213]) de volta. Nesses padrões, os valores dentro das partições exibem tendências distintas simultaneamente ao longo das linhas e colunas (por exemplo, em [2341], a primeira linha aumenta da esquerda para a direita enquanto a segunda diminui, e a primeira coluna aumenta de cima para baixo enquanto a segunda diminui).

Utilizando esta classificação de padrões ordinais, Bandt e Wittfeld calculam a frequência relativa de cada tipo de padrão, definindo a suavidade

$$\tau = q_1 - 1/3 \quad (1.33)$$

e a estrutura de curva como

$$\kappa = q_2 - q_3, \quad (1.34)$$

nas quais q_1 , q_2 , e q_3 denotam as frequências relativas dos padrões ordinais dos tipos I, II e III, respectivamente. Os valores de τ quantificam a suavidade/rugosidade das intensidades dos valores dentro das partições, alcançando um valor máximo de $2/3$ quando as intensidades aumentam ou diminuem consistentemente ao longo de ambas as direções (ou seja, quando somente padrões do tipo I emergem) e um mínimo de $-1/3$ quando as intensidades sempre mostram tendências distintas ao longo de ambas as direções (ou seja, quando somente padrões do tipo III emergem). Esta medida é análoga ao parâmetro de persistência definido para padrões ordinais com $d = 3$ em séries temporais [59]. Por sua vez, os valores de κ variam de -1 (quando somente padrões do tipo III emergem) a 1 (quando somente padrões do tipo II emergem), quantificando a presença de padrões ramificados e em espiral nas imagens. Conforme já mencionamos, Bandt e Wittfeld também introduziram o uso conjunto de τ e κ para caracterizar imagens, definindo um diagrama que denominamos plano suavidade-estrutura.

Para ilustrar a aplicação dessa classificação de padrões ordinais, vamos reportar um dos resultados presentes no trabalho de Bandt e Wittfeld sobre a análise de 25 tipos de texturas naturais introduzidas por Kylberg e Sintorn [60]. Essas imagens foram obtidas a partir de materiais como lentilhas, grãos, bem como estruturas mais regulares, como tecidos e malhas. Para cada textura, existem 100 amostras de imagens. Inicialmente, eles calcularam a frequência relativa dos 24 padrões ordinais para cada tipo de textura, conforme mostra a Figura 1.10. Notamos que existe uma hierarquia na ocorrência dos padrões ordinais. Padrões do tipo I são os que mais ocorrem nessas texturas (frequência média ≈ 0.07), seguido pelos padrões do tipo II (frequência média ≈ 0.04). Por sua vez, os padrões do tipo III são os mais raros entre os três tipos (frequência média ≈ 0.015). Resultado esse que corrobora a classificação em três tipos e que possivelmente motivou a proposta de Bandt e Wittfeld.

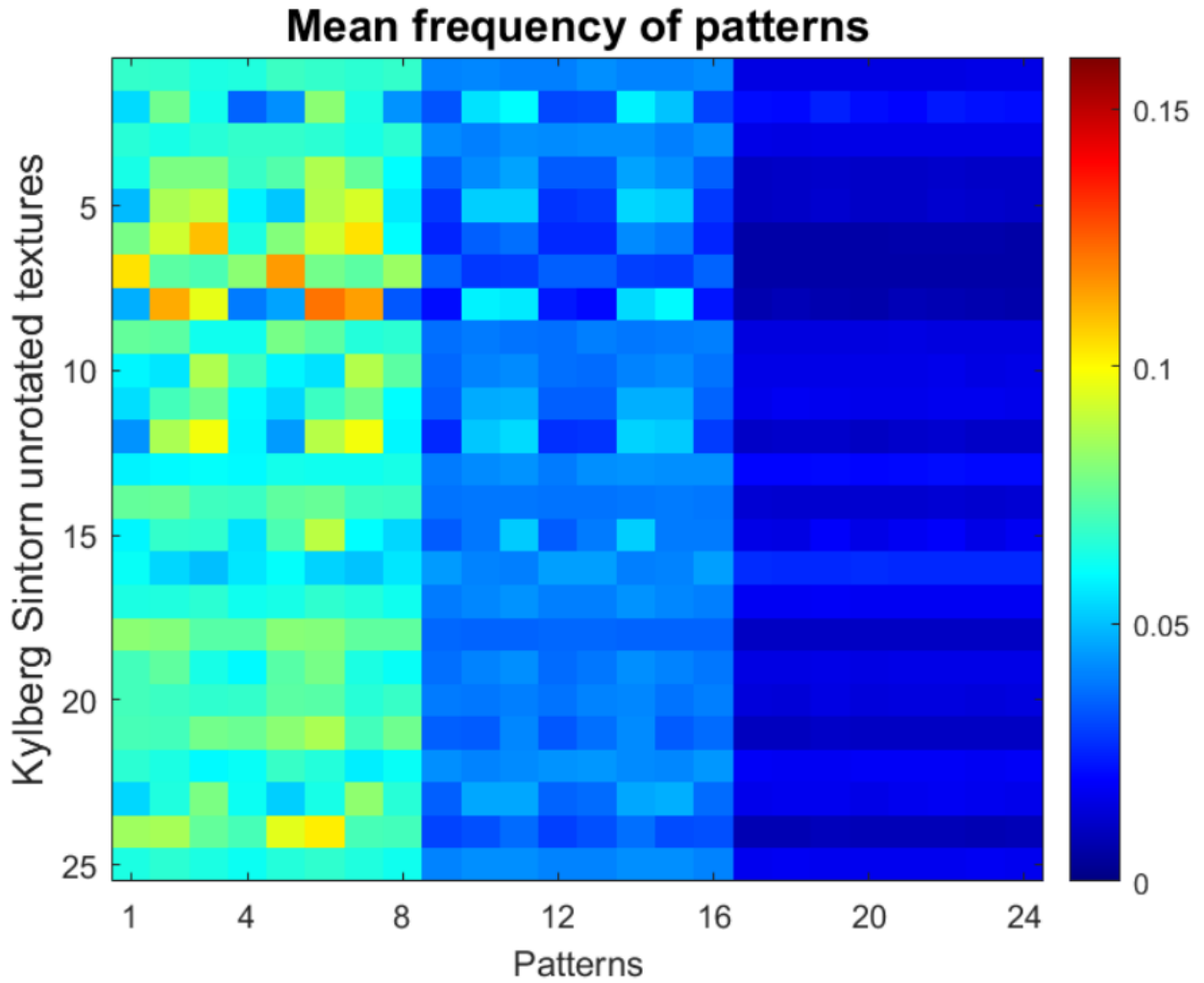


Figura 1.10: Padrões ordinais nas texturas de Kylberg e Sintorn [60]. O mapa de calor mostra a frequência relativa de cada um dos 24 padrões ordinais organizados nos três tipos e seguindo a mesma ordem da Figura 1.9. Especificamente, as colunas 1-8, 9-16 e 17-24 referem-se, respectivamente, aos tipos I, II e III. Observamos que existe uma separação clara na ocorrência dos padrões entre os tipos, sendo o tipo I mais frequente do que o tipo II, com o tipo III sendo o mais raro. A figura é uma adaptação da referência [47].

Além de calcular a incidência média de ocorrência dos padrões ordinais dois por dois para a base de dados de Kylberg e Sintorn [60], Bantd e Wittfeld também analisaram essas imagens usando o plano suavidade-estrutura, conforme mostra a Figura 1.11. Nessa representação, cada uma das 100 imagens de cada um dos 25 tipos de texturas correspondem a um ponto no plano, com a cor indicando o tipo de textura. Notamos que os tipos de texturas podem ser relativamente bem distinguidos por diferentes valores de suavidade τ e estrutura de curva κ .

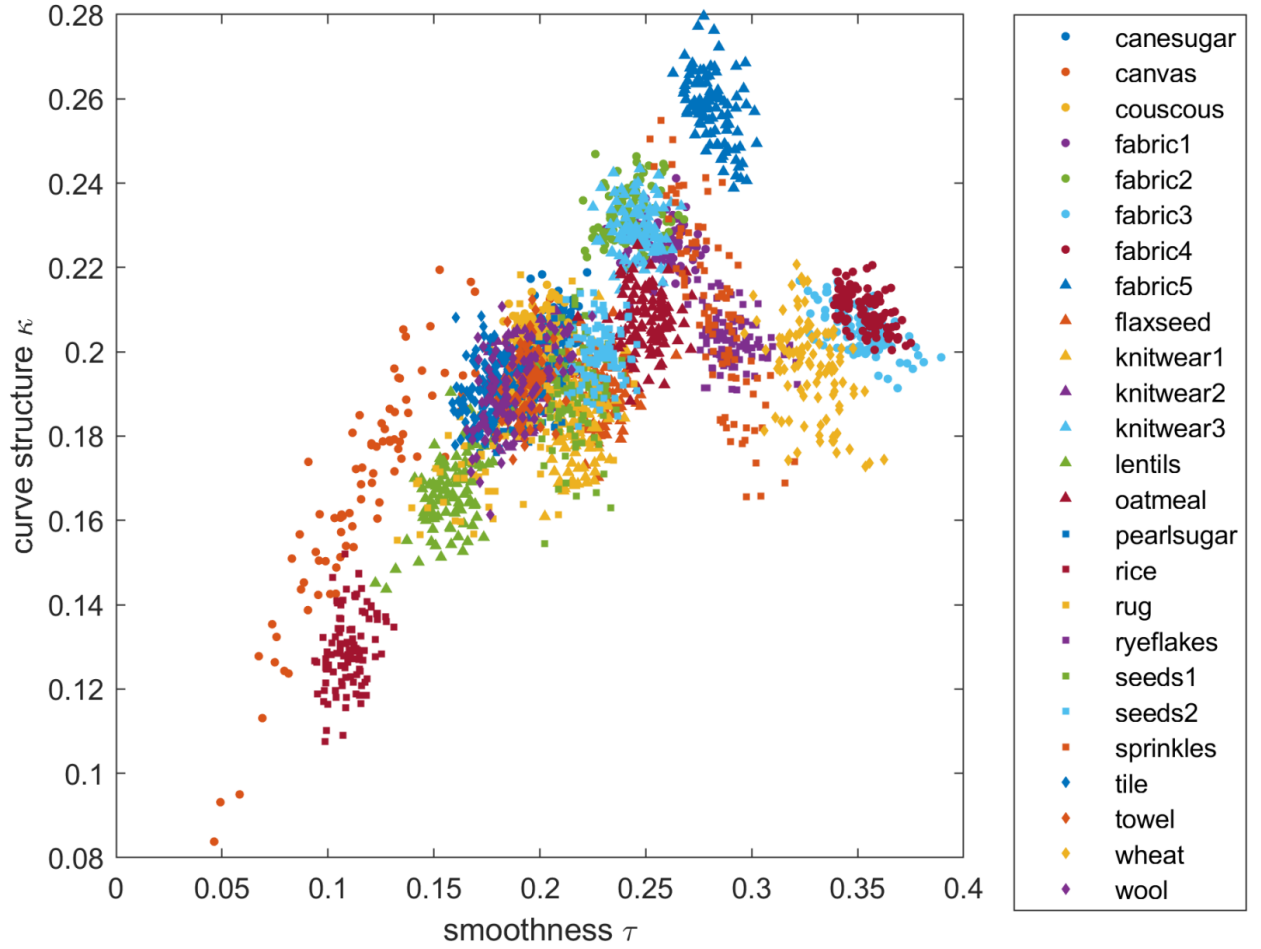


Figura 1.11: Plano suavidade-estrutura com as imagens dos 25 tipos de textura de Kylberg e Sintorn [60]. Cada ponto no plano corresponde aos valores de suavidade τ versus estrutura de curva κ para cada uma das 100 imagens de cada um dos 25 tipos de texturas da base. A figura é uma adaptação da referência [47].

Enceramos nossa revisão dos principais métodos ordinais com essa apresentação da classificação de padrões dois por dois. No próximo capítulo, passamos a apresentar nossos resultados sobre a análise de um grande banco de dados de imagens de pinturas.

Padrões ordinais dois por dois em pinturas artísticas

Neste capítulo, vamos apresentar os principais resultados dessa dissertação sobre a análise de padrões dois por dois em imagens de pinturas. Iniciaremos descrevendo nossa base de dados, o qual contempla quase 140 mil pinturas criadas ao longo do último milênio. Em seguida, vamos apresentar uma extensão da proposta de Bandt e Wittfeld para a classificação de padrões ordinais dois por dois, levando em conta a possibilidade de ocorrência de valores idênticos nas partições. Veremos que essa generalização conduz a um espaço de 75 possíveis padrões ordinais, os quais podemos classificar em 11 tipos. Discutiremos interpretações simples desses padrões e também a possibilidade de associar suas prevalências com características visuais das obras de arte. Além disso, mostraremos que existe um padrão universal na distribuição desses padrões ordinais, o que vai nos permitir definir uma medida padronizada de prevalência e também uma métrica para quantificar o quão distante uma obra ou um estilo artístico está dessa incidência média. Mostraremos que, quando combinados a métodos de aprendizagem de máquina, esses padrões são úteis para classificar estilos artísticos de pinturas. Por fim, vamos analisar a evolução das pinturas ao longo dos anos quanto à prevalência desses padrões ordinais em conexão com aspectos de história da arte.

2.1 A base de dados WikiArt

A matéria prima para nossas análises é a mesma obtida por Sigaki *et al* [35]. Trata-se de um conjunto de larga escala de imagens de obras de arte coletadas da Wikiart (www.wikiart.org), uma enciclopédia de arte *online* dedicada a obras de arte visuais. A página oferece acesso gratuito a uma vasta coleção de imagens de obras de arte de diversos períodos e movimentos artísticos. Além dos arquivos de imagem das pinturas, há também metadados

referentes ao título da obra, artista, estilo artístico, data de composição, entre outros. Foi realizada uma varredura automatizada nas páginas da Wikiart para extrair tanto os arquivos de imagem quanto os metadados. Desse processo, resultou um conjunto de arquivos com mais de 27 GB, contendo as imagens de 137 364 pinturas. Essas obras de arte cobrem 2 391 artistas, 154 estilos artísticos e abrangem quase um milênio da história da arte, sendo as pinturas mais antigas datadas de 1031, enquanto as mais recentes são de 2016.

A Figura 2.1 apresenta a distribuição do número de obras ao longo dos anos, fornecendo uma visão sobre a produção artística em diferentes épocas. Destaca-se o ano de 1910 como um marco significativo, registrando a produção de aproximadamente 1219 obras. Notavelmente, neste ano, os estilos artísticos predominantes eram o Impressionismo, Expressionismo e *Art Nouveau*, representando alguns dos movimentos mais proeminentes do século XX. Por outro lado, observamos diversos anos em que temos poucas obras de arte, ressaltando a não homogeneidade temporal de nossos dados.

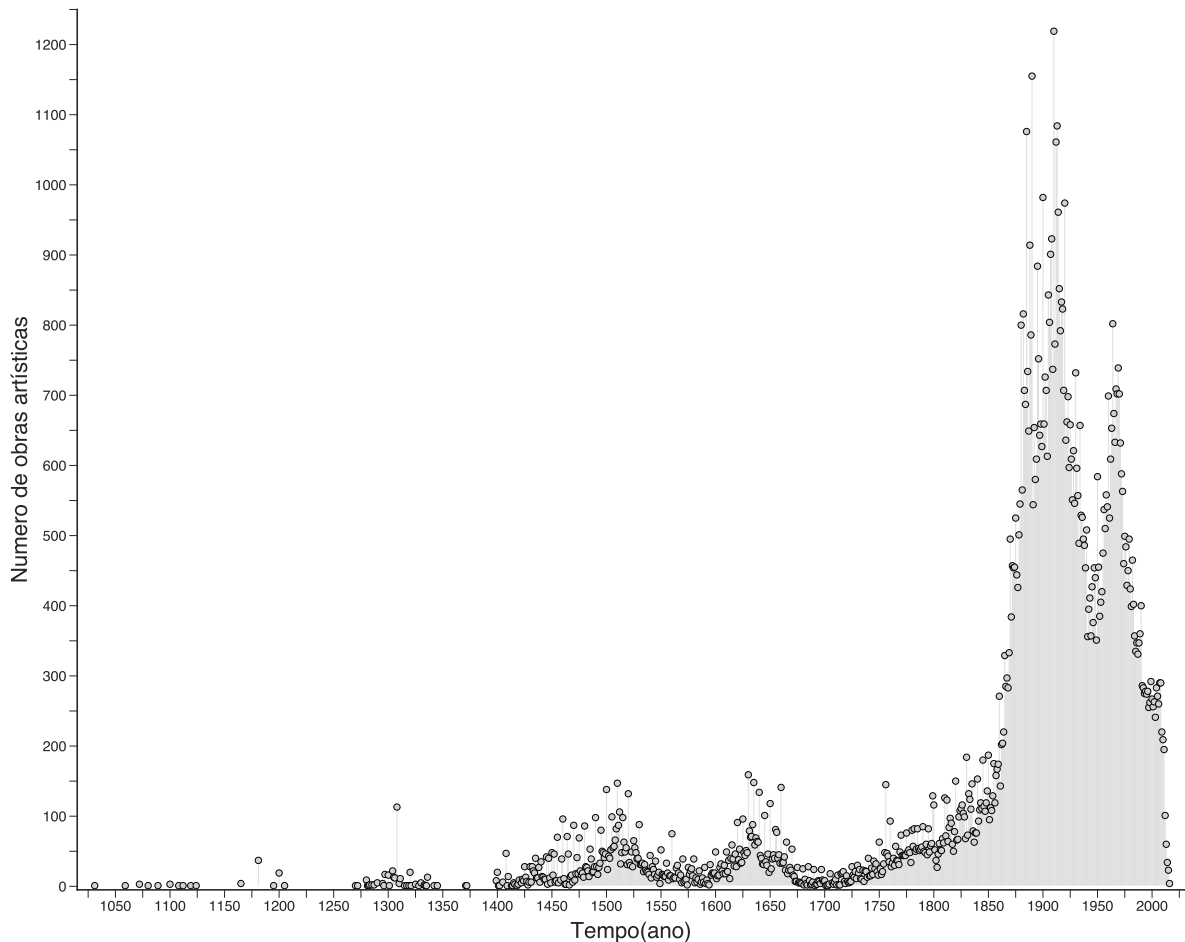


Figura 2.1: Distribuição do número de pinturas em nossa base de dados ao longo do tempo. Observa-se uma baixa quantidade de obras antes de 1400, seguida por um aumento gradual até o século XVI. A partir do século XIX, há um aumento significativo no número de obras, culminando em um pico no final do século XIX e início do século XX.

Essas obras de arte também não estão igualmente distribuídas entre os diferentes estilos artísticos, sendo Impressionismo com 14 211 obras, Realismo com 12 733 obras e o Romantismo com 10 260 obras, os estilos mais representados na base de dados. Na Figura 2.2 apresentamos o quantitativo de obras para todos os 154 estilos artísticos da base.

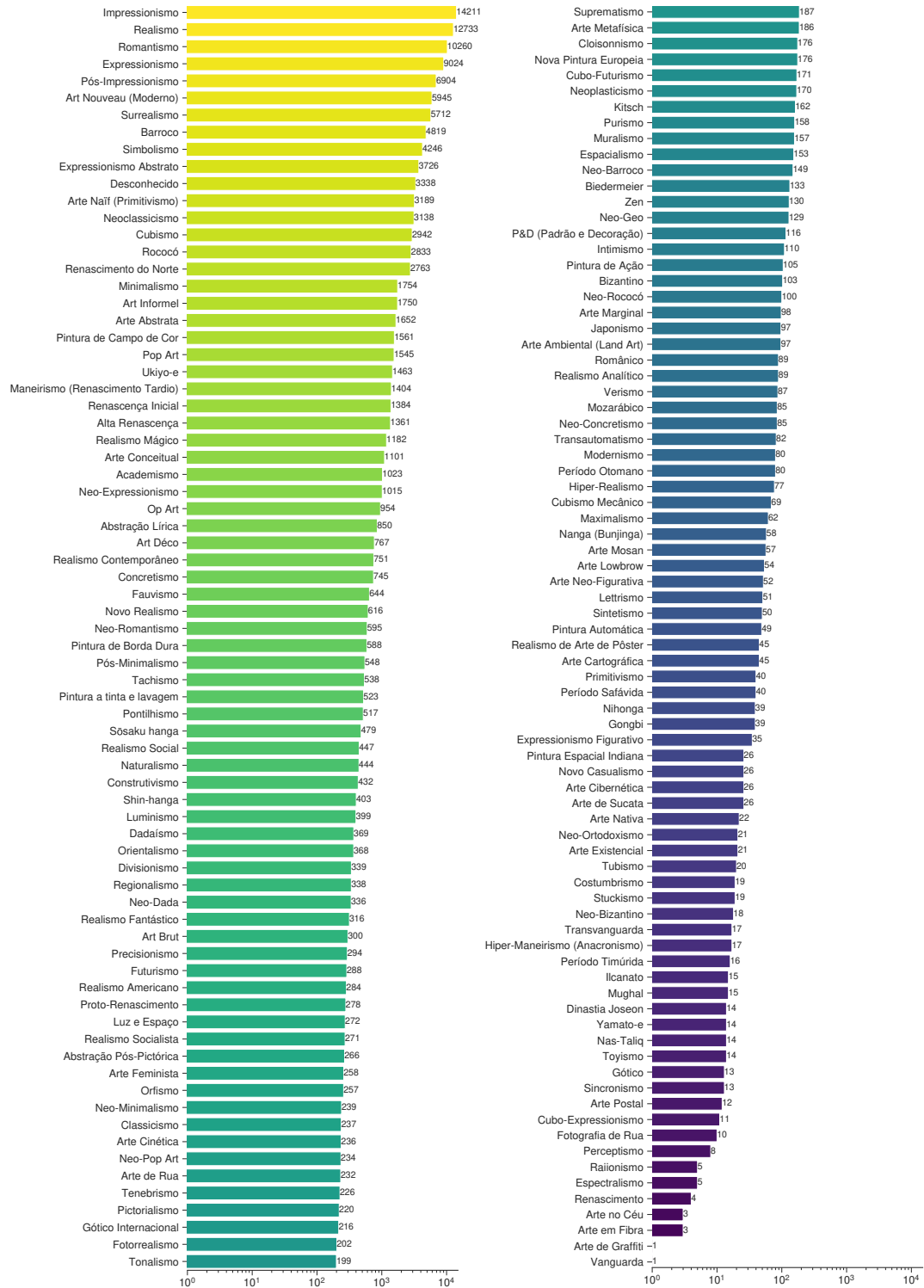


Figura 2.2: Distribuição das obras de arte entre os 154 estilos artísticos presentes em nossa base de dados. Note que usamos escala logarítmica para representar os valores.

2.2 Representação matricial das pinturas

Cada arquivo de imagem de nossa base de dados está no formato JPEG com 24 bits por pixel, sendo 8 bits para cada um dos três canais de cores: vermelho, verde e azul. Na prática, isso significa que cada imagem é representada por três matrizes, uma para cada canal de cor. Além disso, a dimensão dessas matrizes corresponde à dimensão das imagens em número de pixels. Cada pixel nessas três matrizes tem intensidade variando entre 0 e 1, sendo que 0 indica a intensidade nula enquanto 1 significa a intensidade máxima para a cor correspondente à matriz.

Para todas as nossas análises, convertemos as três camadas de cores (o chamado padrão RGB) para uma única camada usando a transformação de luminância [61], muitas vezes denominada também como escala de cinza. Dessa maneira, cada imagem pode ser representada por uma única matriz cujas entradas correspondem a uma combinação linear dos valores das camadas de cor. Especificamente, temos $(0.2125 \times R) + (0.7154 \times G) + (0.0721 \times B)$, sendo que R , G e B representam as intensidades dos pixels das camadas de vermelho, verde e azul, respectivamente. Consequentemente, cada pintura é representada por uma matriz A com n_y linhas (altura da imagem) e n_x colunas (largura da imagem), na qual cada entrada a_{ij} denota a intensidade do pixel da i -ésima linha e da j -ésima coluna. A Figura 2.3 ilustra esse processo.

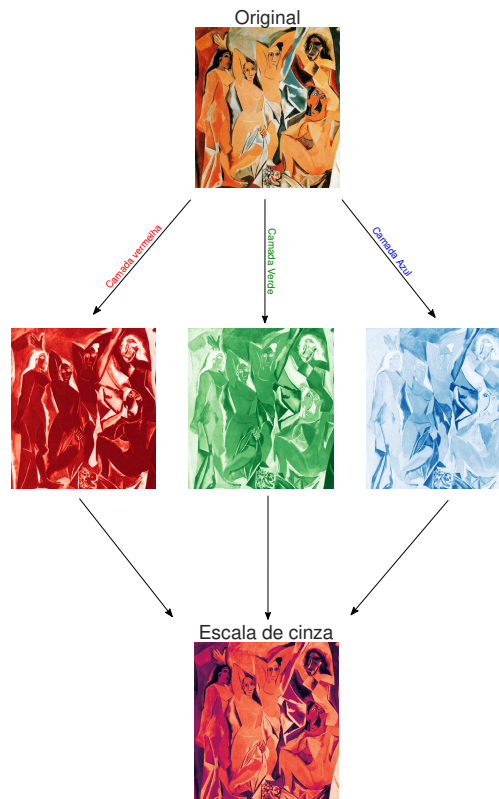


Figura 2.3: Ilustração da transformação de luminância para a obra “*Les Femmes d’Alger*” (1907) de Pablo Picasso.

2.3 Igualdades em padrões ordinais dois por dois

Uma vez que já revisitamos os principais conceitos referentes aos métodos ordinais e também descrevemos nossos dados, estamos em condição de apresentar nossa abordagem para investigar obras de arte. Nosso procedimento tem como inspiração a classificação de padrões de Bandt e Wittfeld [47] e, de fato, pode ser pensado como uma extensão daqueles resultados de maneira a considerar explicitamente a ocorrência de valores idênticos dentro das partições dois por dois.

Para descrever nossa abordagem, vamos considerar novamente uma imagem hipotética de tamanho três por três dada por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seguindo a essência dos métodos ordinais, amostramos a matriz A usando uma partição deslizando de tamanho dois por dois que se move um pixel por vez, tanto horizontalmente quanto verticalmente. Esse processo resulta nas quatro partições listadas a seguir:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Posteriormente, atribuímos classificações relativas (ranqueamentos) aos valores dos pixels dentro dessas partições. Aqui, diferentemente da abordagem original de Bandt e Wittfeld [47], vamos ranquear os elementos das partições usando números 0, 1, 2 e 3, sendo ranque 0 atribuído ao menor valor, ranque 1 atribuído ao segundo menor valor, ranque 2 atribuído ao segundo maior valor e ranque 3 atribuído ao maior valor.

Assim, representando os elementos dessas partições concatenadas linha a linha como (a_0, a_1, a_2, a_3) , temos que a primeira partição $A_0 = (4, 2, 5, 3)$ é descrita por [2031], pois $a_0 = 4$ é o segundo maior elemento (ranque 2), $a_1 = 2$ é o menor elemento (ranque 0), $a_2 = 5$ é o maior elemento (ranque 3), e $a_3 = 3$ é o terceiro maior elemento (ranque 1). De forma similar, A_1 corresponde a [1320] e A_2 a [2103]. Conforme já mencionamos, a principal

diferença em nossa abordagem é o tratamento de valores idênticos dentro das partições. Nesses casos, vamos atribuir o mesmo ranque aos valores idênticos que ocorrem em uma partição. Portanto, a partição A_3 , na qual o número 3 (ranque 1) aparece duas vezes, corresponde ao padrão [1021].

Ao analisar todas as possibilidades, podemos identificar até 75 padrões ordinais distintos:

- 24 ocorrem em partições sem valores idênticos (esses são os mesmos padrões que surgem na análise de Bandt e Wittfeld);
- 36 surgem quando dois elementos da partição são iguais (12 padrões para cada um dos três possíveis ranques dos valores idênticos);
- 8 aparecem quando três elementos da partição são idênticos (4 padrões para cada um dos dois possíveis ranques dos valores idênticos);
- 6 são encontrados quando há dois pares de valores idênticos dentro de uma partição;
- e 1 corresponde a uma partição na qual todos os elementos são idênticos.

Ao avaliar todos os padrões ordinais de uma imagem, calculamos suas frequências relativas para definir a distribuição de probabilidade ordinal, aqui denotada por

$$P = \{p_i; i = 1, \dots, 75\}, \quad (2.1)$$

na qual p_i representa a frequência relativa do i -ésimo padrão. Assim, nosso método incorpora explicitamente a ocorrência de pixels idênticos dentro das partições. Comparado com a abordagem original de Bandt e Wittfeld [47] (veja a Seção 1.6), o número total de padrões possíveis em nossa abordagem aumenta de 24 para 75. Além disso, conforme verificaremos mais adiante, esses padrões adicionais fornecem informações essenciais para uma compreensão mais profunda das pinturas e estilos artísticos.

2.4 Classificação generalizada de padrões ordinais dois por dois

Classificamos os 75 padrões identificados em 11 grupos, designados por letras maiúsculas de A a K. Essa classificação é baseada no número de símbolos distintos que cada padrão exibe e no seu grau de suavidade, conforme mostrado na Figura 2.4. Observamos que certos padrões correspondem a rotações de outros padrões. Assim, tal qual fizeram Bandt e Wittfeld [47], identificamos um subconjunto de padrões como “padrões primários,” tendo em vista que suas rotações por um quarto, metade e três quartos de volta geram todos os

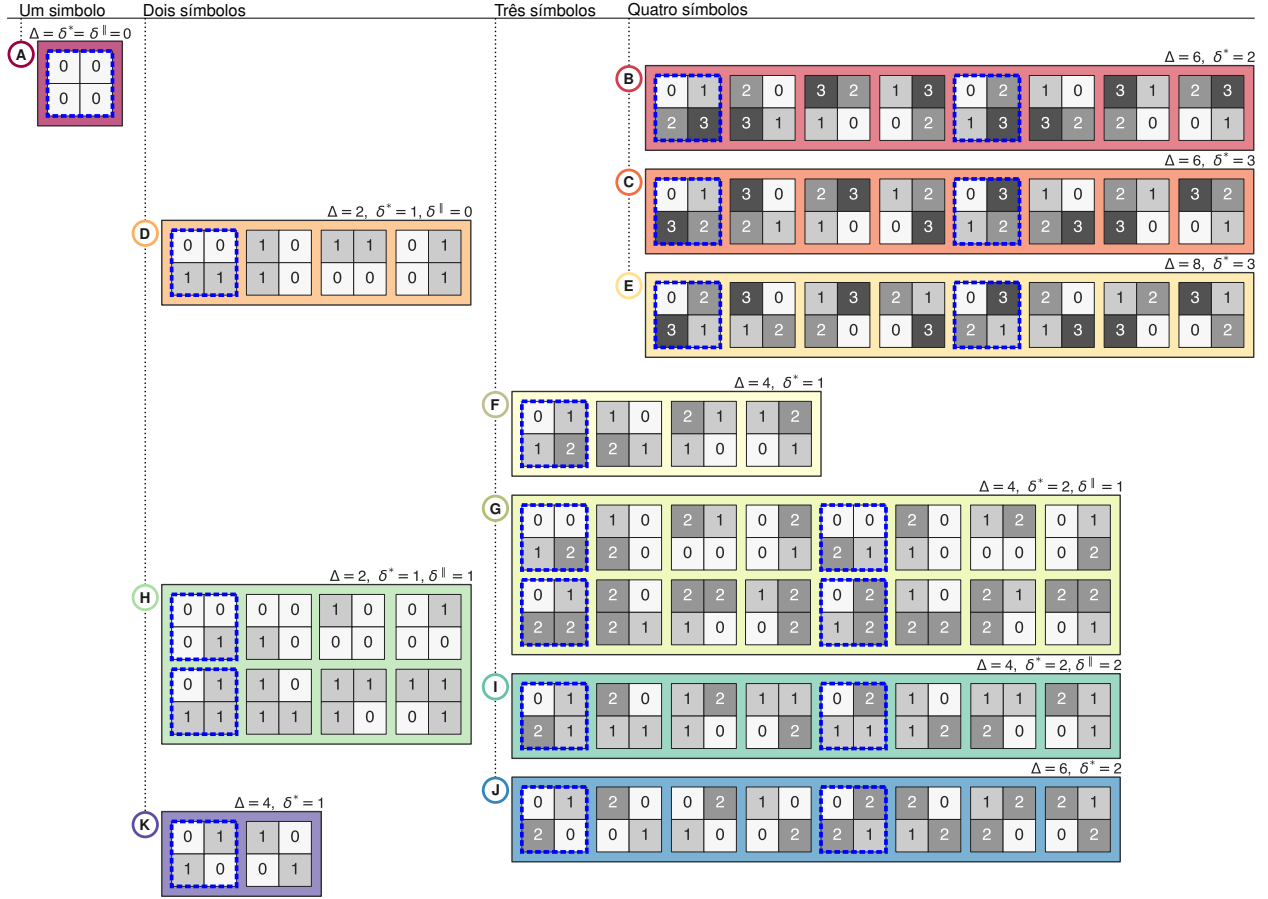


Figura 2.4: Visão geral dos 75 possíveis padrões ordinais dois por dois, categorizados em onze grupos com base no número de símbolos únicos e na suavidade. Os padrões são designados por letras maiúsculas de A a K e diferenciados por cores de fundo distintas. A suavidade é quantificada por três métricas: soma dos valores absolutos das diferenças de primeira ordem entre símbolos (Δ); valor absoluto máximo dessas diferenças (δ^*); e valor absoluto da diferença de primeira ordem entre símbolos alinhados com uma linha ou coluna de símbolos idênticos ($\delta^{\parallel}$). O padrão [0000], o único padrão do tipo A, apresenta suavidade máxima com $\Delta = \delta^* = \delta^{\parallel} = 0$ e corresponde a valores idênticos na partição associada. Os grupos D, H e K, classificados em ordem de suavidade, contêm padrões com dois símbolos distintos. O tipo D consiste em quatro padrões com $\Delta = 2$, $\delta^* = 1$ e $\delta^{\parallel} = 0$. O tipo H inclui oito padrões com $\Delta = 2$, $\delta^* = 1$ e $\delta^{\parallel} = 1$. O tipo K compreende dois padrões com $\Delta = 4$ e $\delta^* = 1$. Os padrões com três símbolos distintos são categorizados em quatro grupos: F, G, I e J, em ordem de suavidade. Os quatro padrões do tipo F são caracterizados por $\Delta = 4$ e $\delta^* = 1$. O tipo G, o maior grupo, inclui dezesseis padrões com $\Delta = 4$, $\delta^* = 2$ e $\delta^{\parallel} = 1$. O tipo I compreende oito padrões, diferenciados do tipo G por $\delta^{\parallel} = 2$. O tipo J inclui oito padrões com $\Delta = 6$ e $\delta^* = 2$. Finalmente, os padrões com quatro símbolos distintos são organizados nos grupos B, C e E, cada um contendo oito padrões. O tipo B é o mais suave ($\Delta = 6$ e $\delta^* = 2$), seguido pelo tipo C ($\Delta = 6$ e $\delta^* = 3$) e pelo tipo E ($\Delta = 8$ e $\delta^* = 3$). Os padrões primários dentro de cada grupo são destacados com linhas azuis tracejadas. As rotações dos padrões primários por um quarto, meia e três quartos de volta geram todos os outros padrões dentro de cada grupo.

outros padrões dentro de seus respectivos grupos. Cada grupo contém um, dois ou quatro padrões primários, que são destacados na Figura 2.4 por linhas azuis tracejadas.

Para um dado padrão representado como $[x_1 x_2 x_3 x_4]$, no qual cada símbolo x_i (para $i = 1, \dots, 4$) toma um valor do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, quantificamos a suavidade usando três medidas:

- a soma dos valores absolutos das diferenças de primeira ordem entre os símbolos:

$$\Delta = |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + |x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|;$$

- o valor absoluto máximo dessas diferenças:

$$\delta^* = \max(|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|);$$

- e o valor absoluto da diferença de primeira ordem entre símbolos alinhados ao longo de uma linha ou coluna de símbolos idênticos: $\delta^{\parallel}$.

Os valores de $\delta^{\parallel}$ são, portanto, determinados apenas para padrões que apresentam dois elementos idênticos alinhados ao longo de uma linha ou coluna. Por exemplo, o padrão [0001] resulta em $\Delta = 2$, $\delta^* = 1$ e $\delta^{\parallel} = 1$, enquanto o padrão [0110] resulta em $\Delta = 4$ e $\delta^* = 1$.

Inicialmente, classificamos a suavidade dos padrões com base em Δ ; δ^* é usado posteriormente para resolver casos de valores iguais de Δ , e $\delta^{\parallel}$ é usado de forma semelhante quando os padrões exibem valores idênticos de Δ e δ^* .

O padrão exclusivo de um símbolo [0000] é o único membro do grupo A. Caracterizado por sua uniformidade, esse padrão exibe a máxima suavidade com $\Delta = 0$, indicativo de intensidades de pixels idênticas dentro de uma partição.

Padrões de dois símbolos ocorrem em partições que exibem pares ou trios de valores idênticos e são categorizados nos tipos D, H e K. Entre estes, o tipo D representa a configuração mais homogênea ($\Delta = 2$, $\delta^* = 1$ e $\delta^{\parallel} = 0$), tipificada por pares de valores iguais alinhados em uma coluna ou linha, com o padrão principal sendo [0011]. O tipo H, um pouco menos uniforme, difere do tipo D por $\delta^{\parallel} = 1$ e corresponde a trios de valores idênticos que formam cantos dentro de partições, cujos padrões principais são [0001] e [0111]. O tipo K, o menos uniforme dentro deste grupo ($\Delta = 4$), consiste em padrões nos quais pares de valores iguais estão alinhados tanto nas diagonais principais quanto nas secundárias, conforme ilustrado pelo padrão principal [0110].

Padrões de três símbolos surgem quando as partições contêm apenas um par de valores idênticos. Esses padrões estão distribuídos em quatro grupos: F, G, I e J. O tipo F, com [0112] como padrão principal, é o mais suave dentro desta categoria ($\Delta = 4$ e $\delta^* = 1$), exibindo uma configuração na qual o par de valores idênticos tem o ranque intermediário e está posicionado diagonalmente, criando estruturas em forma de canto semelhantes ao tipo

H. O tipo G é delineado por quatro tipos principais ([0012], [0021], [0122] e [0212]) e o tipo I por dois ([0121] e [0211]), ambos caracterizados por $\Delta = 4$ e $\delta^* = 2$, correspondendo a uma configuração na qual o par de valores idênticos está localizado ao longo de uma coluna ou linha. No tipo G, os valores idênticos assumem os ranques extremos, enquanto no tipo I, eles têm o ranque intermediário. Esta distinção sutil resulta em uma mudança em $\delta^{\parallel}$ de 1 para 2, tornando o tipo I menos uniforme do que tipo G. O tipo J, identificado pelos tipos principais [0120] e [0221], apresenta o par de valores idênticos com o ranque extremo ao longo das diagonais. Assim, a única diferença entre os tipos F e J é o ranque de seus elementos diagonais, mas essa variação altera a métrica de suavidade Δ de 4 para 6, categorizando o tipo J como o menos suave entre os padrões de três símbolos.

Padrões com quatro símbolos surgem quando não há valores idênticos dentro de uma partição e compreendem os tipos B, C e E. Estes são equivalentes aos padrões denominados tipos I, II e III por Bandt e Wittfeld [47], conforme já discutimos na Seção 1.6. Padrões do tipo B, com [0123] e [0213] como padrões principais, ocorrem quando os valores da partição se alinham em um plano tridimensional, indicando aumentos ou diminuições simultâneas ao longo de ambas as colunas e linhas. O tipo C, com padrões principais [0132] e [0312], exibe $\Delta = 6$ e $\delta^* = 3$ e é menos suave que o tipo B ($\Delta = 6$ e $\delta^* = 2$). Esses padrões surgem quando as intensidades dos pixels dentro das partições aumentam ou diminuem simultaneamente em uma direção, mas exibem tendências distintas na outra. Por exemplo, em [0132], as intensidades na primeira linha aumentam da esquerda para a direita, enquanto na segunda diminuem, com ambas as colunas aumentando de cima para baixo. O tipo E é o menos suave entre os tipos de quatro símbolos e compreende os padrões principais [0231] e [0321]. Nestes padrões, as intensidades dos pixels dentro das partições exibem tendências distintas tanto nas linhas quanto nas colunas. Por exemplo, em [0231], a primeira linha aumenta da esquerda para a direita, enquanto a segunda diminui, e a primeira coluna aumenta de cima para baixo, enquanto a segunda diminui.

2.5 Relação entre características visuais e padrões ordinais

Após apresentar nossa classificação, calculamos a distribuição de probabilidade dos padrões ordinais $P = \{p_i; i = 1, \dots, 75\}$ para todas as pinturas de nosso conjunto de dados. Além disso, usamos nossa classificação para organizar os elementos de P de acordo com o tipo pertencente, de A a K . Mais ainda, dentro de cada tipo, organizamos as probabilidades p_i conforme a ordem que estão apresentadas na Figura 2.4. Consequentemente, p_1 corresponde à probabilidade de encontrar o padrão [0000], p_2 está associada a [0123], p_3 refere-se a [2031], e assim por diante, até p_{75} , que está relacionado a [1001].

Ao realizar esse procedimento, estamos mapeando cada imagem em um vetor de 75 dimensões, na qual cada dimensão representa a frequência relativa de um padrão ordinal dois por dois específico. Embora 75 dimensões certamente correspondam a um espaço de alta dimensionalidade, esse espaço é significativamente reduzido em comparação com a resolução original da imagem, que em nosso conjunto de dados tipicamente excede um milhão de pixels. Além disso, esses padrões ordinais têm interpretações simples e diretas, sendo ainda categorizados em 11 tipos.

Na tentativa de visualizar esse espaço de alta dimensionalidade, usamos o algoritmo *uniform manifold approximation and projection* (UMAP) [62] para projetar os vetores de 75 dimensões de todas as imagens em um espaço bidimensional. O UMAP é considerado uma das técnicas de redução de dimensionalidade mais avançadas, que se baseia em uma representação gráfica ponderada obtida a partir de uma matriz de dissimilaridade (aqui calculada usando a distância euclidiana) determinada a partir dos dados em alta dimensionalidade. Esses dados são então projetados em um espaço de menor dimensionalidade (um plano, no nosso caso) usando uma abordagem que corresponde a um algoritmo de *layout* de redes complexas baseado em forças de atração e repulsão. As projeções de baixa dimensionalidade produzidas pelo UMAP possuem um certo grau de estocasticidade inerente ao processo de otimização. O resultado disso é que as projeções UMAP são similares, mas não idênticas, para um mesmo conjunto de dados. Consequentemente, as projeções do UMAP são utilizadas principalmente para fins comparativos e de visualização.

A Figura 2.5 apresenta uma visualização dessa projeção UMAP considerando todas as pinturas em nossa base de dados. Para construir esses resultados, usamos o pacote Python *umap* [63] e consideramos o número de vizinhos igual a 150. Nessa projeção, pinturas ou grupos de pinturas que aparecem próximas tipicamente exibem frequências similares de padrões ordinais, enquanto aquelas que estão mais distantes geralmente têm distribuições mais dissimilares. Anotamos as posições de nove pinturas nessa visualização. Além disso, também incluímos uma representação das distribuições de padrões ordinais junto com imagens dessas obras de arte na Figura 2.5.

Essas distribuições fornecem informações sobre diversas características visuais das pinturas. Por exemplo, “Vermelho Azul Verde” (1963) de Ellsworth Kelly apresenta predominantemente padrões dos tipos A e D (com o tipo A sendo muito mais frequente), refletindo as três regiões coloridas e claramente delineadas desta pintura abstrata do estilo *Hard Edge Painting*. Encontramos uma distribuição semelhante em “Estudo Nº 3 - Campos Dinâmicos” (1962) de Günter Fruhtrunk, mas com uma presença significativa dos padrões [1010] e [0011], indicativos das estruturas verticais dominantes da pintura. Embora mais sutilmente, “Aba-poru” (1928) de Tarsila do Amaral também revela suas estruturas verticais por meio da alta ocorrência dos mesmos padrões ordinais. Por outro lado, obras como “Número 1 (Lavender Mist)” (1950) de Jackson Pollock, “A Noite Estrelada” (1889) de Vincent van Gogh, e “Uma

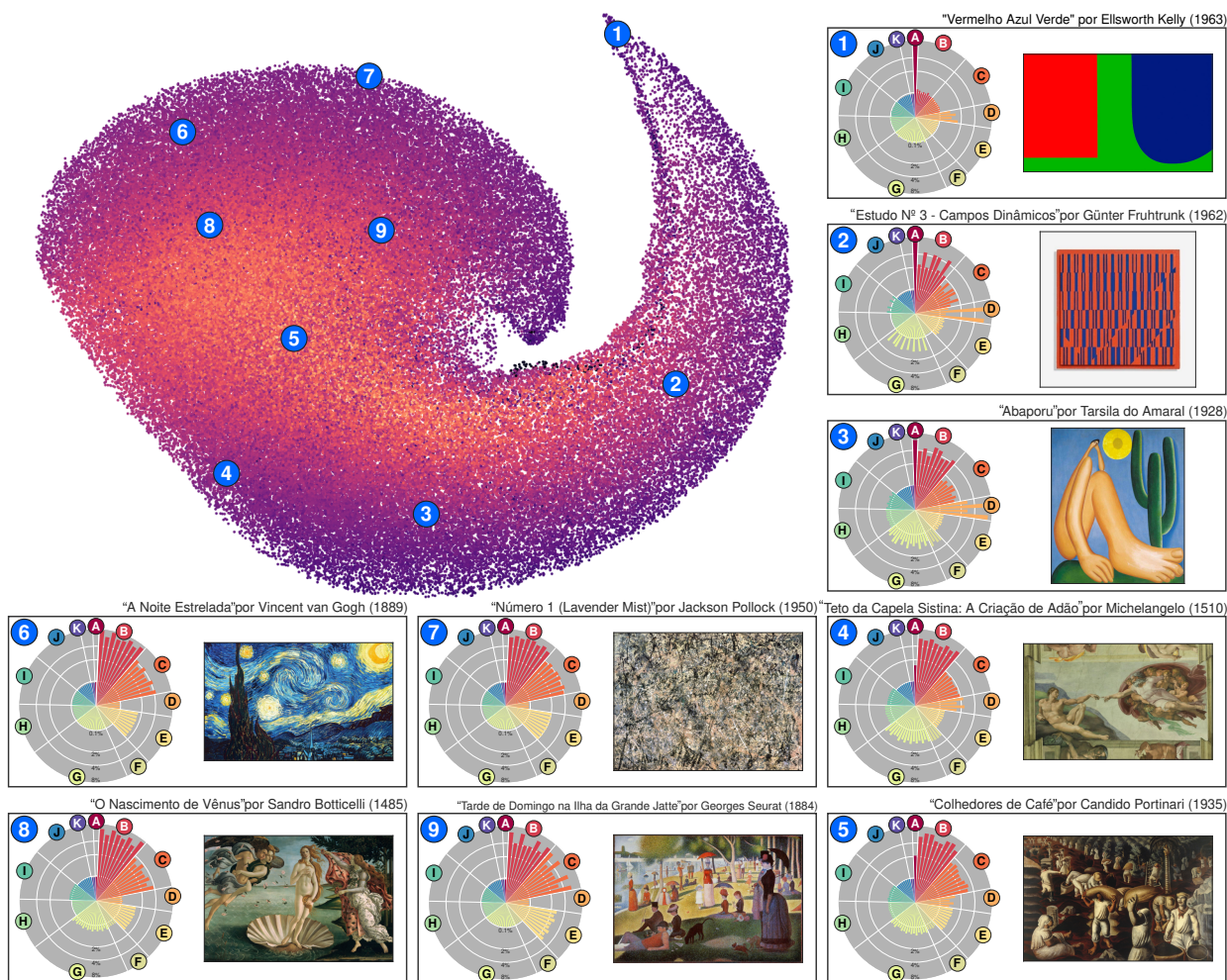


Figura 2.5: Representando pinturas usando padrões ordinais dois por dois. Todas as pinturas em nosso conjunto de dados são representadas como vetores de 75 dimensões, com cada dimensão correspondendo à frequência relativa de um padrão ordinal dois por dois específico. O painel principal exibe uma projeção bidimensional obtida a partir do UMAP, na qual cada ponto corresponde a uma pintura. Os números dentro dos círculos azuis indicam as posições de nove obras de arte selecionadas. Os painéis circundantes ilustram a distribuição dos padrões ordinais, agrupados por tipo, usando barras circulares em uma escala logarítmica, acompanhadas por imagens das pinturas correspondentes. Pinturas caracterizadas por elementos simples e bem definidos, com bordas nítidas, como a pintura de Ellsworth Kelly, geralmente exibem uma alta frequência do padrão do tipo A. Em contraste, pinturas com pinceladas soltas, borradas ou finas, como as *drip paintings* de Jackson Pollock, exibem uma presença negligenciável desse padrão. Os padrões ordinais também revelam nuances sutis das obras de arte, como a predominância de bordas em direções específicas, exemplificada pela alta frequência de dois padrões do tipo D na obra de Günter Fruhtrunk, ou descontinuidades significativas entre pixels vizinhos, como observado na obra de pontilhismo de Georges Seurat por meio da alta frequência de dois padrões do tipo E.

Tarde de Domingo na Ilha da Grande Jatte” (1884) de Georges Seurat praticamente não exibem o padrão do tipo A.

Nossos padrões ordinais também capturam nuances mais sutis das obras de arte. Por exemplo, a obra de Seurat é considerada um exemplo notável do estilo pontilhista de pintura, no qual o pintor utiliza pequenas pinceladas para produzir pontos de cores distintas que, por sua vez, geram descontinuidades significativas entre pixels vizinhos. Essas descontinuidades produzem uma frequência relativamente alta de dois padrões do tipo E. Além disso, observamos uma frequência maior de quatro padrões do tipo B ([0123], [3210], [1032] e [2301]) em comparação com os outros quatro ([2031], [1302], [0213] e [3120]) na obra de Seurat. Os padrões com alta prevalência têm menores diferenças de primeira ordem ao longo da direção horizontal do que para vertical, indicando que as intensidades dos pixels mudam mais abruptamente ao longo da direção vertical e concordando com o fato de que Seurat começou sua obra aplicando uma camada de pequenas pinceladas horizontais. Tendências semelhantes são observadas nos padrões do tipo C, nos quais padrões com maiores diferenças de primeira ordem na direção vertical ([0132], [2310], [1023] e [3201]) são mais prevalentes.

2.6 Prevalência universal de padrões dois por dois em pinturas

Acreditamos que os exemplos anteriores ilustram bem o tipo de informação que pode ser obtida a partir da análise de distribuições de padrões ordinais. Integrar essa análise com o conhecimento específico do domínio da arte pode representar um método promissor para o exame individual de pinturas.

Porém, de uma perspectiva mais geral, é interessante saber se existe uma prevalência universal de padrões ordinais em pinturas. Conforme vimos na Seção 1.6, essa questão também foi explorada por Bandt e Wittfeld [47] utilizando seus três tipos de padrões ordinais. De fato, no estudo desses autores com o conjunto de dados de 25 texturas naturais de Kylberg e Sintorn [60], eles observaram que os padrões do tipo I são mais prevalentes do que os do tipo II, que, por sua vez, superam os do tipo III em prevalência (veja a Figura 1.10).

Esse resultado indica que a prevalência dos padrões correlaciona-se com seu grau de suavidade, com padrões mais suaves aparecendo com mais frequência em texturas naturais. Apesar da escala e variabilidade limitadas do conjunto de Kylberg e Sintorn, é plausível supor que a suavidade dos nossos onze tipos de padrões influencia sua ocorrência. De fato, essa é a principal razão para usar a suavidade para categorizar nossos tipos. No entanto, também é razoável supor que a quantidade de valores idênticos dentro de uma partição impacta a prevalência dos padrões correspondentes.

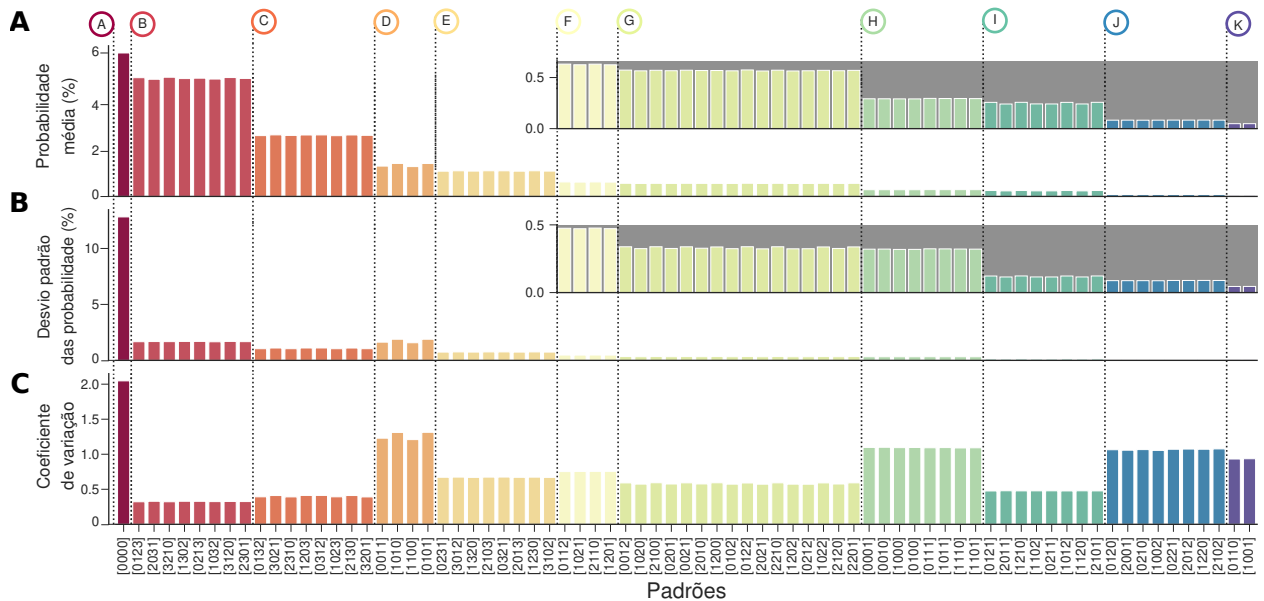


Figura 2.6: Padrões universais na ocorrência de padrões ordinais dois por dois. (A) Probabilidade média de encontrar cada um dos 75 padrões ordinais em todas as imagens do nosso conjunto de dados. Esses padrões são categorizados em onze grupos (A a K) e representados por cores diferentes. Dentro de cada grupo, a probabilidade de encontrar padrões permanece aproximadamente constante, mas diminui monotonicamente ao longo dos grupos arranjados alfabeticamente. Dentro dos grupos que compartilham o mesmo número de símbolos distintos, a probabilidade média diminui à medida que a rugosidade dos padrões aumenta. Por exemplo, os padrões do tipo D exibem a maior suavidade entre os tipos com dois símbolos diferentes, seguidos pelos tipos H e K, com probabilidades médias de 1.4%, 0.29% e 0.05%, respectivamente. Em todos os tipos, a sequência de ocorrência reflete uma interação não trivial entre a suavidade dos padrões e a probabilidade decrescente de repetição de símbolos. Por exemplo, os padrões dos tipos F e K, comparáveis em níveis de suavidade, diferem significativamente em frequência; o tipo K é menos comum devido à menor probabilidade de encontrar apenas dois símbolos distintos, comparado a três nos padrões do tipo F. (B) Desvio padrão e (C) coeficiente de variação (desvio padrão dividido pela média) para cada padrão ordinal em todas as imagens do nosso conjunto de dados. A ordenação do desvio padrão espelha amplamente a das probabilidades médias, exceto para os padrões do tipo D, que apresentam o segundo maior desvio padrão. Por outro lado, o coeficiente de variação entre os tipos de padrão exibe um comportamento distinto, com os tipos A, D, H, J e K apresentando os maiores coeficientes de variação, respectivamente.

Para abordar essa questão, calculamos a prevalência média dos 75 padrões ordinais em todas as imagens do nosso conjunto de dados. Esses resultados, mostrados na Figura 2.6A, revelam uma clara organização hierárquica na prevalência dos padrões ordinais. Suas probabilidades médias diminuem monotonicamente entre os tipos organizados alfabeticamente, e os padrões dentro de cada grupo exibem prevalências quase idênticas. O padrão mais suave,

tipo A, é também o mais frequente, enquanto os padrões menos frequentes pertencem ao grupo K. Dentro de grupos que compartilham o mesmo número de símbolos (valores idênticos), a probabilidade média diminui monotonicamente à medida que a rugosidade de seus padrões aumenta. Por exemplo, entre os padrões com dois símbolos, o tipo D é mais prevalente do que o tipo H, que é mais prevalente do que o tipo K, seguindo a mesma sequência de suavidade. Esse comportamento é consistente para padrões com três e quatro símbolos, classificados por prevalência e suavidade como (F, G, I, J) e (B, C, E), respectivamente. Em contraste, não há uma relação clara entre suavidade e prevalência entre tipos com diferentes números de símbolos. Portanto, a prevalência dos tipos de padrões reflete uma interação não trivial entre sua suavidade e a menor probabilidade de encontrar valores idênticos em partições dois por dois.

Exploramos ainda a variabilidade na prevalência dos padrões ordinais. As Figuras 2.6B e 2.6C mostram o desvio padrão e o coeficiente de variação (a razão entre desvio padrão e média) da probabilidade de cada padrão em todas as imagens. O ranqueamento pelo desvio padrão corresponde amplamente ao da prevalência média, exceto para os padrões do tipo D, que exibem o segundo maior desvio padrão. Em contraste, o coeficiente de variação apresenta um ranqueamento notavelmente diferente, com padrões de baixa prevalência (como J e K) mostrando uma dispersão relativa significativamente maior do que padrões de alta prevalência (como B e C). Esse achado sugere que mesmo padrões de baixa prevalência podem conter informações cruciais para a análise de pinturas, como confirmado visualmente na Figura 2.5. Além disso, esses valores do coeficiente de variação também destacam a importância da cautela ao comparar valores brutos de prevalência entre diferentes pinturas e estilos artísticos, pois pequenas mudanças nesses valores podem corresponder a variações substanciais relativas ao desvio padrão para vários padrões.

2.7 Prevalência padronizada de padrões ordinais

Na tentativa de levar em conta essas escalas distintas de variações, definimos uma medida padronizada de prevalência, ou *z-score*, como

$$z_i = \frac{p_i - \mathbb{E}[p_i]}{\mathbb{S}[p_i]},$$

na qual p_i é a probabilidade de encontrar o i -ésimo padrão ordinal em uma pintura, e $\mathbb{E}[p_i]$ e $\mathbb{S}[p_i]$ representam, respectivamente, a média e o desvio padrão de sua prevalência estimada em todas as imagens.

Desse modo, o valor de z_i quantifica quantas unidades de desvio padrão a prevalência do i -ésimo padrão em uma pintura específica está acima ($z_i > 0$) ou abaixo ($z_i < 0$) de sua incidência geral em todas as imagens. Por serem padronizados, os valores de z_i para todos os

75 padrões são comparáveis em escala e entre imagens. Além disso, eles também permitem medir o quão distante a distribuição de padrões ordinais de uma pintura está da prevalência média.

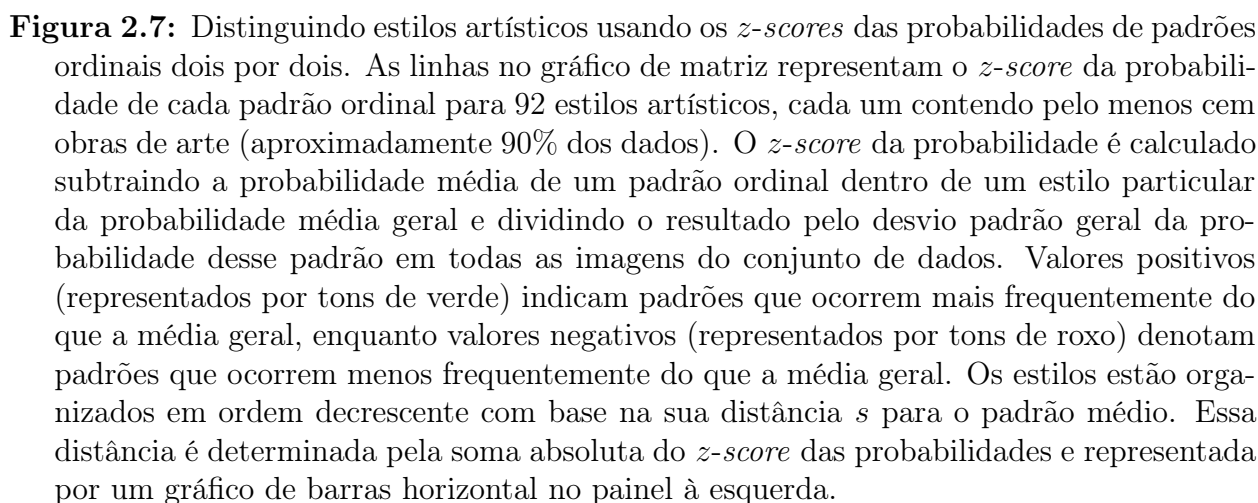
Para isso, podemos definir uma medida de distância para a distribuição média usando a soma absoluta dos z -scores das probabilidades, ou seja,

$$s = \sum_{i=1}^{75} |z_i|. \quad (2.2)$$

Na verdade, já utilizamos os valores de s para codificar por cores a projeção UMAP na Figura 2.5. Naquela figura, as tonalidades mais claras representam distâncias pequenas e tonalidades mais escuras indicam grandes distâncias para incidência média. Portanto, notamos que naquela representação, a proximidade das pinturas ao padrão médio diminui à medida que se afastam do centro da forma espiralada. Por exemplo, “Colhedores de Café” (1935) de Candido Portinari está próximo ao centro da espiral com $s \approx 16$, enquanto “Vermelho Azul Verde” (1963) de Ellsworth Kelly está posicionado em uma extremidade da espiral com $s \approx 113$.

Usando esses z -scores das probabilidades, investigamos se diferentes estilos artísticos exibem incidências distintas de padrões ordinais. Para isso, selecionamos 92 estilos, cada um representado por pelo menos cem pinturas, e calculamos a média de z_i após agrupar as imagens por estilo. Além disso, avaliamos o valor médio de s para classificar os estilos de acordo com sua distância em relação ao padrão médio. A Figura 2.7 ilustra essas médias em um gráfico de matriz, na qual os estilos estão organizados em ordem decrescente de s . Nesta visualização, tons de verde indicam padrões que excedem a incidência geral, enquanto tons de rosa representam padrões abaixo dessa incidência. Cada linha corresponde à impressão digital ordinal de um estilo, relacionando a prevalência de padrões ordinais às características visuais de cada estilo.

Embora uma análise abrangente de todos os estilos esteja além do escopo de nosso estudo, existem várias características mais gerais que são dignas de nota. Estilos mais antigos, como os da Renascença, normalmente mostram valores menores de s e, portanto, estão em estreita proximidade com a incidência média de padrões ordinais, embora um exame detalhado permita sua distinção. Por exemplo, as diferenças entre os estilos da Renascença e do Barroco são principalmente marcadas por z -scores menores em padrões do tipo B. A estética barroca, muitas vezes vista como uma resposta às composições harmônicas, equilibradas e rígidas da Renascença e Maneirismo, apresenta linhas ondulantes, contrastes acentuados entre luz e sombra, e elementos geralmente dispostos em poses torcidas e linhas diagonais para evocar um senso de movimento [64, 65]. Esses elementos visuais da arte barroca contribuem para uma diminuição da suavidade de suas composições, como evidenciado pela menor prevalência de padrões do tipo B (o tipo mais suave com quatro símbolos) em comparação com aqueles



dos estilos renascentistas.

Os estilos do período da Arte Moderna, como o Impressionismo, Fauvismo e Dadaísmo, frequentemente exibem valores intermediários ou altos de s , mas, novamente, é possível distinguir características estilísticas dos estilos Modernos por meio da análise de padrões ordinais. Considerando, por exemplo, Dadaísmo e Fauvismo, observamos que esses estilos são quase antitéticos no uso dos padrões ordinais. Enquanto o Dadaísmo tem um excesso do padrão tipo A, as obras Fauvistas evitam-no; inversamente, enquanto os padrões tipo B e tipo C ocorrem acima da incidência geral no Fauvismo, são mais raros nas pinturas Dadaístas. Essa tendência distinta persiste em todos os tipos e nos permite inferir que o Dadaísmo difere do Fauvismo em que o Dadaísmo apresenta uma maior ocorrência de padrões de valor igual e uma menor incidência dos tipos B, C e E (padrões sem valores idênticos). O Dadaísmo, considerado como um movimento anti-guerra (Primeira Guerra Mundial), enfatizou a aleatoriedade, o absurdo e a irracionalidade em suas composições [64, 65]. As obras Dadaístas frequentemente se assemelham a colagens de objetos desconexos e disjuntos que contribuem para a formação de bordas e, portanto, para o surgimento de padrões de valor igual. Por outro lado, o Fauvismo é caracterizado por suas cores vivas e não naturalísticas pintadas com pinceladas soltas, muitas vezes criando paisagens visuais unificadas e coesas que carecem de bordas bem definidas, levando assim a uma menor incidência de padrões de valor igual.

Em contraste com os estilos anteriores, movimentos artísticos que se desenvolveram durante ou após a década de 1960, como *Light and Space*, Neo-Minimalismo, *Hard Edge Painting*, *Color Field Painting*, Minimalismo e Neo-Geo, mostram desvios significativos da incidência geral de padrões ordinais. A década de 1960 é considerada por alguns historiadores da arte como um período de transição entre o Modernismo e o Pós-Modernismo, sendo este último iniciado com o desenvolvimento da *Pop Art* em uma visão simplificada [66]. Consequentemente, os estilos que exibem os maiores desvios em relação ao padrão médio são predominantemente das etapas mais tardias do Modernismo ou do Pós-Modernismo, principalmente caracterizados por uma presença excessiva de padrões do tipo A, D e H. Esses tipos de padrões estão relacionados ao surgimento de contornos nítidos nas pinturas, alinhando-se com as tendências estilísticas do Pós-Modernismo em direção ao ecletismo e à integração de composições fragmentadas que apresentam objetos cotidianos, facilmente identificáveis, ou texto como elementos centrais.

No entanto, o Divisionismo e o Pontilhismo se destacam como exceções notáveis a esse padrão. Embora ambos sejam categorizados como Arte Moderna, esses estilos exibem padrões ordinais marcadamente divergentes da incidência geral. Ao contrário de seus contemporâneos com altos valores de s , esses estilos mostram uma incidência substancialmente menor dos tipos A, D, H e outros tipos de padrões que apresentam valores idênticos ao longo das linhas ou colunas (tipos G e I). Essa prevalência reduzida destaca que as composições do

Divisionismo e do Pontilhismo são marcadas por pontos ou pinceladas minúsculas que resultam em visuais texturizados e opticamente misturados que carecem de bordas ou limites distintos.

A impressão ordinal de cada estilo sugere que pinturas de diferentes estilos tendem a ocupar regiões distintas no espaço de 75 dimensões associadas à probabilidade de cada padrão. Isso também indica que vetores representando a incidência média de padrões ordinais para cada estilo estão localizados em diferentes regiões do mesmo espaço. Para substantiar essas observações, usamos a mesma projeção UMAP derivada de todas as pinturas para projetar os vetores médios dos estilos. A Figura 2.8 mostra as localizações de todos os 92 estilos, cada um com pelo menos 100 pinturas.

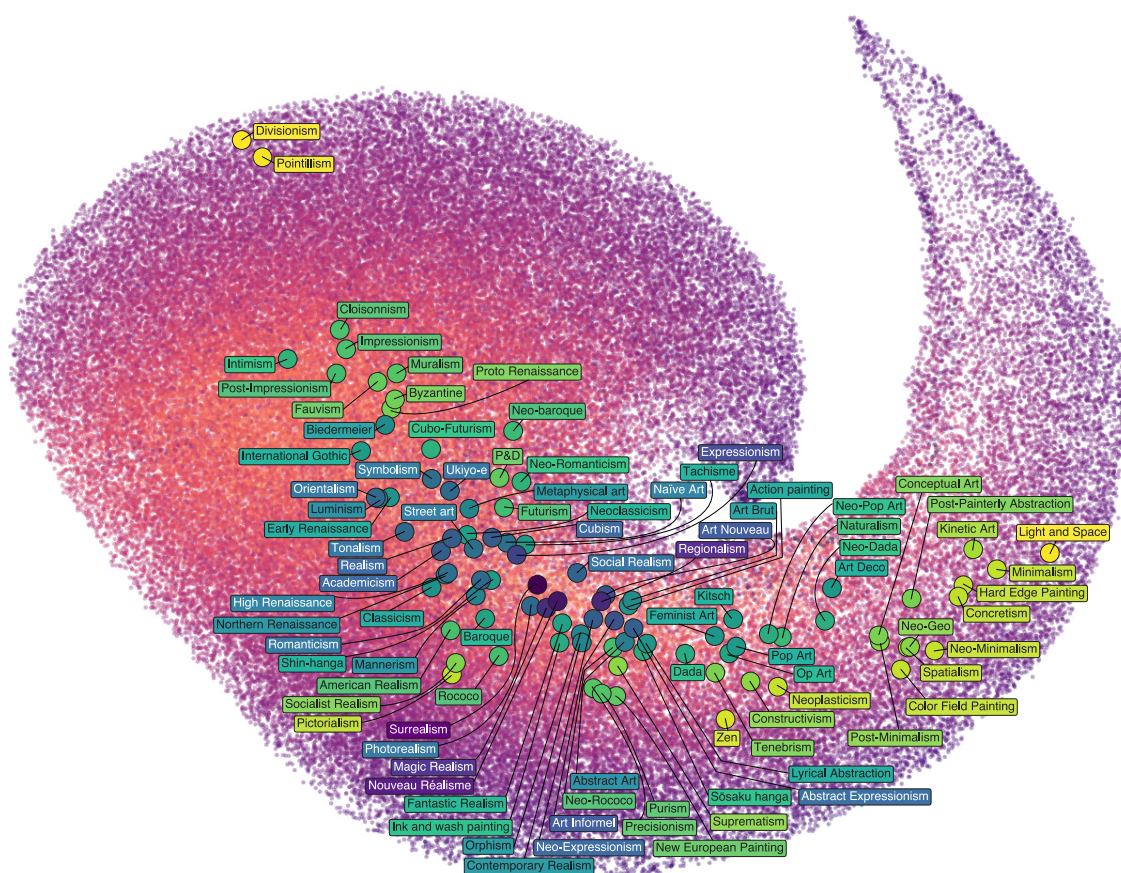


Figura 2.8: Localização dos estilos artísticos no espaço de padrões ordinais dois por dois. Pequenos pontos representam uma projeção UMAP bidimensional dos vetores de 75 dimensões correspondentes a cada pintura em nosso conjunto de dados. Esses vetores quantificam a frequência relativa de cada padrão ordinal. Os pontos são codificados por cores com base na proximidade ao padrão médio, com tonalidades mais escuras indicando maiores distâncias. Círculos representam os vetores médios projetados dos 92 estilos artísticos com pelo menos 100 imagens cada. O painel exibe os nomes de todos os estilos, com variações de cores indicando a distância ao padrão médio; aqui, cores mais claras significam maiores distâncias. Estilos e imagens próximos ao centro da projeção estão mais próximos do padrão médio, enquanto aqueles mais distantes exibem maior dissimilaridade ao padrão ordinal dois por dois médio.

Nessa figura, os pontos que formam o fundo da imagem correspondem a todas as pinturas em nosso conjunto de dados (como na Figura 2.5). Cada estilo é representado por círculos maiores, nos quais tonalidades mais claras denotam valores mais altos de s e tonalidades mais escuras representam valores mais baixos, inversamente à codificação de cores usada para pinturas individuais. Os estilos estão distribuídos ao longo da formação em espiral da projeção, com aqueles mais próximos à incidência média geral situados perto do centro, enquanto estilos mais distantes estão localizados em áreas periféricas. Em concordância com as impressões ordinais distintas mostradas na Figura 2.7, notamos que o Divisionismo e o Pontilhismo emergem como *outliers* nessa representação UMAP.

Embora o principal objetivo desta projeção UMAP seja visualizar o espaço de alta dimensão das probabilidades ordinais, a proximidade dentro desta representação é frequentemente acompanhada por algum nível de similaridade estética entre os estilos. Por exemplo, o Renascimento e movimentos relacionados estão mais próximos entre si, assim como os estilos modernos abstratos e os movimentos minimalistas e pós-minimalistas.

2.8 Determinando o estilo de pinturas via padrões ordinais dois por dois

Dada a separação no espaço de probabilidades ordinais observada para os estilos, decidimos investigar a possibilidade de usar a incidência de padrões ordinais para prever o estilo artístico de pinturas por meio de uma abordagem de aprendizado de máquina.

Nossa tarefa é determinar o estilo dessas imagens usando suas distribuições de padrões ordinais como características preditivas. Além disso, vamos comparar a precisão dessa abordagem com outros quantificadores ordinais que não consideram padrões associados a valores idênticos, a saber: o plano complexidade-entropia [35, 51, 52], o plano Fisher-Shannon [50], o plano suavidade-estrutura [47], a incidência dos três tipos de padrões definidos por Bandt e Wittfeld [47] (tipos I, II e III), e a probabilidade de todos os 24 padrões desconsiderando empates. Notamos que essas abordagens foram detalhadas nas Seções 1.3, 1.4 e 1.6 do capítulo anterior. Além desses quantificadores, também agregamos as probabilidades de todos os 75 padrões em suas onze categorias e consideramos a incidência desses tipos de padrões como características preditivas para o estilo artístico de uma pintura.

Para nossas tarefas de aprendizagem de máquina, empregamos o algoritmo conhecido como *extreme gradient boosting* ou XGBoost [67] para prever o estilo artístico das pinturas usando a incidência de padrões ordinais e todos os outros conjuntos de características ordinais. O XGBoost é um método de *ensemble* que combina incrementalmente árvores de decisão para minimizar uma função de perda aumentada por um termo de regularização (um conceito conhecido como *boosting* de gradiente regularizado). Este método incorpora uma

série de otimizações algorítmicas, numéricas e computacionais, tornando este algoritmo renomado por sua alta eficiência e desempenho excepcional, muitas vezes classificando-o entre as principais soluções em competições de aprendizado de máquina.

Para prever estilos artísticos, selecionamos os 20 estilos mais comuns de nosso conjunto de dados, cada um representado por pelo menos 1 500 obras de arte, totalizando 100 707 imagens. Dividimos aleatoriamente este conjunto de dados de maneira estratificada, alocando 80% das imagens para treinar os classificadores XGBoost (com parâmetros padrões), enquanto o restante é usado para testar as previsões. Replicamos essas etapas em dez realizações independentes, calculando tanto a média quanto o desvio padrão da acurácia nos conjuntos de teste.

De maneira mais específica, investigamos sete conjuntos de características ordinais para prever estilos artísticos. Cinco conjuntos utilizam a codificação ordinal proposta por Bandt e Pompe [48], que não leva explicitamente em conta valores idênticos dentro das partições da imagem. São eles: plano complexidade-entropia (H e C), o plano Fisher-Shannon (H e F), o plano suavidade-estrutura (τ e κ), as probabilidades dos três tipos de padrões sem empates (q_1 , q_2 e q_3) e as probabilidades dos 24 padrões possíveis sem empates (representando a distribuição ordinal padrão $P = \{p_i; i = 1, \dots, 24\}$).

Os dois conjuntos de características restantes, originais do nosso trabalho, consideram explicitamente a ocorrência de valores idênticos dentro das partições da imagem. São eles: a probabilidade associada a cada um dos onze tipos de padrões ($q_A, q_B, q_C, \dots$, e q_K) e a probabilidade de cada um dos 75 padrões ordinais ($P = \{p_i; i = 1, \dots, 75\}$). Avaliamos ainda a acurácia média de dois classificadores de referência: um estratificado, que gera previsões aleatórias respeitando a frequência dos estilos no conjunto de dados, e um uniforme, que atribui probabilidade igual a cada estilo.

A Figura 2.9A apresenta a precisão média de nossas previsões e compara esses resultados com os classificadores de referência, que fazem previsões uniformemente aleatórias (uniforme) ou geram previsões aleatórias respeitando a distribuição de estilo (estratificada). Notamos que todos os conjuntos de características ordinais alcançam níveis de precisão significativamente mais altos do que os classificadores de referência, indicando que os padrões ordinais carregam informações estilísticas sobre as pinturas, conforme já havia sido discutido por Sigaki *et al.* [35].

Notavelmente, o uso de todas as probabilidades dos 75 padrões ordinais como características preditivas resulta em uma precisão significativamente aumentada em comparação com todos os outros conjuntos de características ordinais. Essa melhoria é particularmente pronunciada quando comparada com os planos complexidade-entropia, Fisher-Shannon e suavidade-estrutura, bem como a incidência dos tipos I, II e III de Bandt e Wittfeld. Essas abordagens aproximam-se de uma precisão de 0.19, o que é cerca de 32% inferior à precisão alcançada com todos os padrões ordinais dois por dois. Além disso, o plano suavidade-

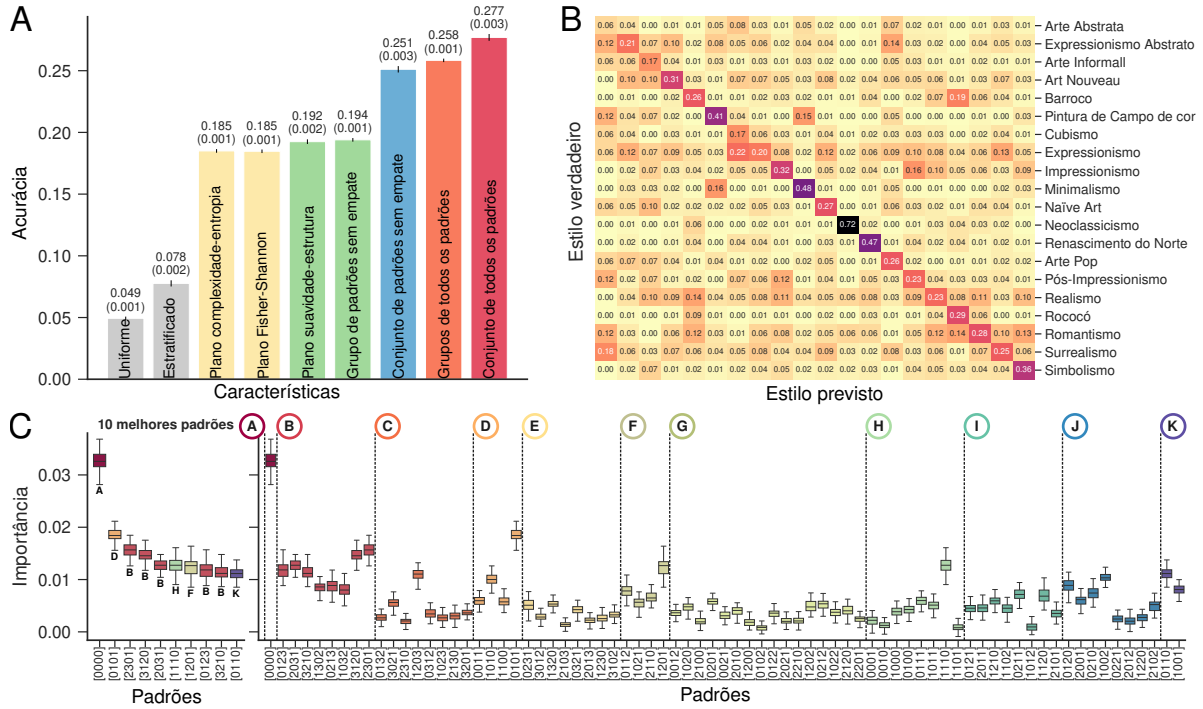


Figura 2.9: Identificação de estilos artísticos usando padrões ordinais dois por dois. (A) Precisão de classificadores treinados para prever estilos artísticos de pinturas usando diferentes quantificadores relacionados a padrões ordinais. O conjunto de dados inclui imagens de 20 estilos, cada um com pelo menos 1 500 obras de arte, divididas em conjuntos de treinamento (80%) e teste de maneira estratificada. As barras representam a precisão média em dez realizações dos procedimentos de treinamento e divisão dos dados em conjuntos de treinamento e teste. As barras de erro mostram o desvio padrão da precisão. Os números acima das barras indicam as precisões médias, com valores entre parênteses representando os desvios padrões. As barras cinzas denotam a precisão de classificadores de referência que fazem previsões uniformemente aleatórias (*uniforme*) ou baseadas na frequência dos estilos (*estratificado*). As barras amarelas representam previsões do XGBoost usando dois pares de quantificadores derivados da distribuição ordinal sem considerar igualdades nas partições: o plano complexidade-entropia ($H \times C$) e o plano Fisher-Shannon ($H \times F$). As barras verdes ilustram previsões do XGBoost usando o plano suavidade-estrutura ($\kappa \times \tau$) e as probabilidades dos grupos de padrões sem empates (q_1, q_2 , e q_3). A barra azul indica previsões do XGBoost usando a distribuição ordinal sem igualdades. A barra laranja representa previsões baseadas nas probabilidades associadas aos onze tipos de padrões ($q_A, q_B, q_C, \dots$, e q_K). Finalmente, a barra vermelha mostra previsões do XGBoost usando as probabilidades relacionadas a todos os 75 padrões ordinais dois por dois. (B) Matriz de confusão para o modelo XGBoost treinado com o conjunto completo de probabilidades ordinais e aplicado ao conjunto de teste. (C) *Box-plots* exibindo a importância de permutação de cada padrão ordinal dois por dois na previsão de estilos artísticos. A importância de permutação mede a degradação da precisão após a aleatorização das probabilidades de um padrão ordinal entre todas as imagens. O painel à esquerda destaca os dez padrões mais importantes, e o painel à direita exibe a importância de cada padrão ordinal.

estrutura e a incidência dos tipos I, II e III alcançam apenas uma precisão marginalmente maior do que os planos complexidade-entropia e Fisher-Shannon, apesar das considerações teóricas meticolosas usadas para definir esses quantificadores ordinais [47].

Usar o conjunto de 24 padrões ordinais sem empates melhora significativamente a acurácia para aproximadamente 0.25, mas isso ainda é cerca de 11% inferior à acurácia obtida com todos os 75 padrões ordinais. Por fim, a incidência dos onze tipos de padrões produz a segunda melhor classificação correta, cerca de 7% menor do que a alcançada com padrões individuais. Assim, apesar das simetrias compartilhadas entre padrões dentro de cada tipo, o desempenho marcadamente inferior dos classificadores treinados com o grupo de padrões destaca que cada padrão ordinal fornece informações únicas e cruciais para identificar o estilo de uma pintura.

Nós também calculamos a matriz de confusão para o classificador treinado com todos os padrões ordinais dois por dois, conforme mostrado na Figura 2.9B. Naturalmente, sua acurácia geral de aproximadamente 28% indica que esses padrões ordinais sozinhos são insuficientes para criar classificadores comparáveis com o estado da arte em análise de imagens [25–28]. Na verdade, o principal objetivo da nossa abordagem de aprendizado de máquina é demonstrar que os 75 padrões ordinais contêm informações críticas para a classificação de estilos que não estão presentes na distribuição dos padrões ordinais sem igualdades nem em suas medidas usuais de entropia.

Ainda assim, a matriz de confusão exibe uma estrutura diagonal bem definida, indicando que as previsões mais frequentes em todos os estilos estão alinhadas com os estilos verdadeiros das imagens. Por exemplo, o algoritmo treinado identificou corretamente obras de arte do Neoclassicismo, Minimalismo e Renascimento do Norte em 72%, 48% e 47% das previsões, respectivamente. No entanto, nosso modelo tem maiores dificuldades com a Arte Abstrata, identificando corretamente esse estilo em apenas 6% das previsões. O baixo desempenho com a Arte Abstrata pode ser atribuído à sua diversidade e à ampla gama de técnicas usadas nessas pinturas, que muitas vezes resulta em uma falta de características definidoras que variam significativamente entre os artistas e até mesmo entre diferentes obras do mesmo artista. Este estilo incorpora elementos estéticos também encontrados em vários outros estilos, como Expressionismo, Expressionismo Abstrato e Surrealismo. De fato, a Arte Abstrata é mais frequentemente identificada erroneamente como Arte Surrealista, um estilo que às vezes imita as características vistas na Arte Abstrata, como justaposições inesperadas, não-lineares e não-lógicas de objetos. Além disso, o algoritmo frequentemente confundiu Barroco com Rococó e Expressionismo com Cubismo. Em ambos os casos, características estéticas compartilhadas, como o uso dramático de luz e sombra e detalhes intrincados nas pinturas do Rococó e do Barroco, ou o uso de formas distorcidas e exageradas no Expressionismo e Cubismo, explicam parcialmente a confusão do nosso modelo.

Para compreender melhor o papel de cada padrão ordinal na previsão dos estilos artísticos,

avaliamos a importância de todos os padrões medindo sua contribuição para a precisão geral do modelo. Para isso, usamos o modelo treinado com todos os 75 padrões ordinais e avaliamos a contribuição de cada padrão para o desempenho geral do modelo utilizando uma medida denominada importância de permutação [68–70]. Originalmente proposta para florestas aleatórias [68], esta metodologia foi estendida para ser independente do modelo de aprendizagem [69]. O procedimento consiste em embaralhar aleatoriamente os valores de uma única característica várias vezes e medir a diminuição da acurácia do modelo no conjunto de teste em cada iteração. O princípio dessa técnica é que, ao perturbar a relação entre a característica embaralhada e o estilo, torna-se possível avaliar a significância da característica com base na queda observada na acurácia. Nesse caso, quanto maior a redução na acurácia, mais importante é característica para a previsão.

A Figura 2.9C apresenta um *box-plot* com a distribuição dos valores de importância para 100 repetições do processo de embaralhamento para cada padrão ordinal, destacando os 10 padrões que contribuem mais significativamente para a acurácia geral. Não há uma associação evidente entre os tipos de padrões ou a prevalência geral dos padrões (ver também Figura 2.4) e sua importância na classificação de estilos artísticos. Notavelmente, a classificação dos padrões mais importantes inclui o padrão [0110], que pertence ao tipo menos prevalente, tipo K. Outra descoberta notável é a importância desproporcional do padrão do tipo A [0000], que sozinho responde por 12% da acurácia geral. É igualmente intrigante notar que cinco padrões do tipo B são os únicos padrões sem valores idênticos no ranqueamento dos 10 mais importantes, enquanto os cinco padrões restantes são de tipos com valores idênticos. Essas descobertas corroboram ainda mais a importância de abordar adequadamente os valores idênticos ao investigar padrões ordinais em imagens.

2.9 Mudanças na incidência de padrões ordinais ao longo da história da arte

Na parte final dessa dissertação, exploramos o potencial de quantificar a evolução temporal das pinturas artísticas examinando mudanças na prevalência de padrões ordinais. Esta abordagem baseia-se nos resultados de Sigaki *et al.* [35], que quantificaram a história das obras de arte usando o plano complexidade-entropia. Em seu estudo, Sigaki *et al.* demonstraram que os grandes períodos artísticos exibem valores distintos de complexidade e entropia.

Nossa análise da impressão digital ordinal dos estilos sugere que a prevalência de padrões ordinais provavelmente varia ao longo dos períodos históricos, uma vez que estilos artísticos que emergem em diferentes épocas geralmente exibem distâncias distintas à incidência geral de padrões (s). Para testar sistematicamente essa hipótese, agrupamos as pinturas de nosso

conjunto de dados pela data de composição e calculamos o valor médio de s dentro de intervalos de tempo que abrangem um número comparável de obras de arte.

A Figura 2.10A descreve a evolução do valor médio de s , com diferentes cores de fundo delineando três grandes períodos históricos da arte: Arte Medieval, Renascimento, Neoclassicismo e Romantismo, que se desenvolveram até a década de 1850; Arte Moderna, iniciada com o surgimento do Impressionismo na década de 1870 e marcada pela emergência de estilos de vanguarda, como o Cubismo, Expressionismo e Surrealismo no início do Século XX; e Arte Contemporânea/Pós-Moderna, geralmente associada ao surgimento da *Pop Art* na década de 1960 [66].

Notamos que cada período exibe distâncias ao padrão ordinal médio distintas, corroborando a observação de que estilos artísticos também exibem diferentes valores de s . Notavelmente, a evolução das pinturas artísticas mostra uma tendência geral de aumento da divergência em relação ao padrão ordinal médio. Esta divergência acelerou-se durante a transição do Modernismo para o Pós-Modernismo, um padrão que também foi observado no plano complexidade-entropia de Sigaki *et al.* [35]. No entanto, ao contrário dos resultados desses autores, nos quais a complexidade e entropia mudaram de maneira claramente não monotônica, em nossos achados, a tendência geral de divergir da incidência geral de padrões ordinais é intercalada por apenas breves períodos de aproximação ao padrão médio.

Apesar da falta de uma teoria unificada sobre como a arte evoluiu ao longo do tempo [71], nos concentramos em duas perspectivas principais derivadas dos trabalhos de Wölfflin [43] e Riegl [72]. Esses dois historiadores de arte compartilham a visão de que diferentes períodos de arte podem ser distinguidos utilizando algumas categorias duais bem ilustradas pela dualidade háptico versus óptico de Riegl, e pela dualismo linear versus pictórico de Wölfflin.

Em termos simplificados, obras de arte hápticas ou lineares tipicamente retratam objetos de maneira clara e isolada, característicos da Renascença segundo Wölfflin, enquanto pinturas ópticas ou pictóricas apresentam formas mais holísticas com linhas e contornos borrados, características que Wölfflin associa à arte Barroca. Embora esses conceitos compartilhem semelhanças, Riegl vê a evolução da arte como uma mudança única e contínua dos modos de representação hápticos para ópticos [72], enquanto a visão de Wölfflin da transição de linear para pictórico pode permitir uma interpretação mais cíclica [72].

De acordo com Sigaki *et al.* [35], a evolução da arte em termos do plano complexidade-entropia se alinha mais com a perspectiva de Wölfflin, embora eles notem que as mudanças localmente persistentes na entropia e complexidade impedem conclusões definitivas. Além disso, o plano complexidade-entropia carece de um ponto de referência semelhante à nossa incidência universal de padrões ordinais, permitindo assim apenas comparações relativas entre períodos artísticos. Desse modo, apesar da existência de aproximações temporárias ao padrão médio, nossos resultados indicam que as pinturas artísticas estão continuamente divergindo da incidência média de padrões ordinais, o que, por sua vez, parece ter mais apoio

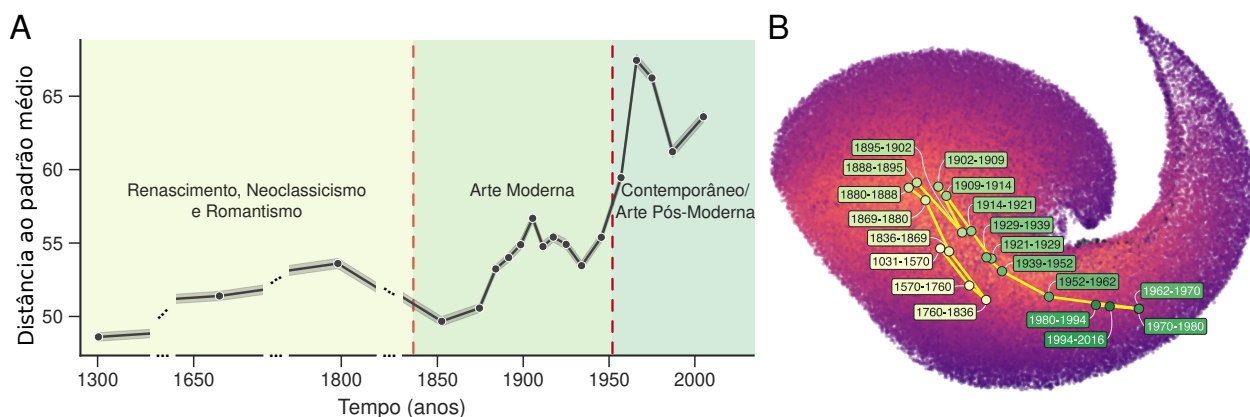


Figura 2.10: História da pintura analisada pela distância ao padrão ordinal médio. (A) Círculos indicam as distâncias médias ao padrão ordinal médio, calculadas agrupando as obras de arte por data; áreas sombreadas representam o erro padrão da média. Os intervalos temporais usados para a média contêm quantidades aproximadamente iguais de imagens e, portanto, não são uniformemente distribuídos ao longo do tempo. Linhas horizontais tracejadas delineiam os principais períodos históricos da arte: Arte Medieval, Renascimento, Neoclassicismo e Romantismo, que se desenvolveram até a década de 1850; Arte Moderna, iniciada com o advento do Impressionismo na década de 1870 e caracterizada pelo surgimento de estilos de vanguarda como Cubismo, Expressionismo e Surrealismo no início do Século 20; e Arte Contemporânea/Pós-Moderna, geralmente associada ao surgimento da *Pop Art* na década de 1960. (B) Evolução da pintura no contexto de padrões ordinais dois por dois. Círculos representam as posições dos vetores médios para cada período de tempo projetados no plano UMAP derivado de todo o conjunto de dados de pinturas. Cada intervalo de tempo também é indicado neste gráfico. Ambos os painéis exibem uma tendência geral das obras de arte divergirem do padrão ordinal médio, intercalada com breves períodos de aproximação a este padrão médio.

na teoria de Riegl.

Além disso, também examinamos como a localização média das obras de arte no espaço de 75 dimensões das probabilidades ordinais evoluiu ao longo do tempo usando a projeção UMAP. A Figura 2.10B mostra que as pinturas mais antigas em nosso conjunto de dados se agrupam perto do centro da formação em espiral que compreende a projeção com todas as pinturas. Com o passar do tempo, há inicialmente um movimento ascendente persistindo até o início do Século XX, seguido por uma migração sistemática do centro para uma das extremidades da formação em espiral. Comparando essa trajetória com os resultados da Figura 2.8, podemos afirmar que o movimento da arte é, em certa medida, impulsionado pela contínua emergência e declínio de estilos artísticos que, por sua vez, refletem uma forma evolutiva da expressão humana influenciada por mudanças culturais, tecnológicas e filosóficas.

Conclusão

Nesta dissertação de mestrado, realizamos uma análise abrangente de obras de arte utilizando padrões ordinais extraídos de partições de imagens de tamanho dois por dois pixels. Inicialmente, categorizamos os 75 possíveis padrões ordinais em onze tipos com base em considerações de simetria e métricas de suavidade. Essas categorias foram organizadas hierarquicamente com base no número de símbolos únicos e na suavidade de seus padrões. Subsequentemente, cada uma das quase 140 mil imagens em nosso conjunto de dados foi representada por uma distribuição de probabilidade discreta, refletindo a frequência relativa de cada padrão ordinal. Integrado a conhecimentos do domínio da arte, nosso método demonstrou o potencial do uso da distribuição de padrões ordinais para facilitar análises quantitativas de diversos aspectos visuais de obras de arte, variando desde a dominância de estruturas verticais e horizontais até detalhes sutis como características de pinceladas.

Nossa análise identificou um padrão universal na ocorrência de padrões ordinais em imagens de pinturas, o que nos levou à classificação em onze tipos de padrões distintos. A prevalência média desses padrões em cada grupo permanece aproximadamente constante, mas diminui monotonicamente à medida que a rugosidade dos padrões aumenta entre tipos que compartilham o mesmo número de símbolos. Observamos também que a ordem de incidência dos tipos de padrões reflete uma interação não trivial entre sua suavidade e a probabilidade reduzida de encontrar pixels com intensidades idênticas em partições de imagem de dois por dois pixels. Embora exista uma hierarquia clara na ocorrência de padrões ordinais em pinturas, verificamos que padrões com menor prevalência exibem variabilidade significativa em relação à sua probabilidade média de ocorrência. Esta constatação mostra que pequenas mudanças na incidência de certos padrões podem levar a variações relativas substanciais, levando-nos a estabelecer uma medida padronizada para a prevalência de padrões ordinais. Além disso, quando somada de forma absoluta, esta medida fornece uma medida de distância relativa à incidência média de padrões.

Utilizamos essa métrica padronizada para definir e classificar a impressão digital ordinal dos estilos artísticos com base em sua proximidade com a incidência geral de padrões ordinais. A prevalência padronizada desses padrões mostrou-se eficaz para analisar elementos estéticos de vários estilos artísticos. Notavelmente, nossos achados revelaram que estilos mais antigos frequentemente se alinham estreitamente com a incidência geral de padrões ordinais, enquanto os estilos Moderno e Pós-Moderno tipicamente exibem desvios significativos desse padrão geral. Além disso, nossa análise demonstrou que a prevalência de padrões ordinais é preditiva dos estilos artísticos em pinturas. Ao considerar adequadamente padrões com pixels de intensidades iguais, melhoramos substancialmente o desempenho da classificação de estilos. Especificamente, padrões caracterizados por pixels de intensidades idênticas estão entre as características mais importantes para a classificação de estilo, com o padrão do tipo A sozinho contribuindo com 12% da precisão geral.

Nossa investigação também explorou a trajetória histórica das pinturas artísticas, examinando mudanças na prevalência de padrões ordinais e sua divergência do padrão médio. Os resultados revelaram uma tendência geral em que pinturas artísticas divergem cada vez mais do padrão médio, pontuada por breves intervalos em que essa tendência é revertida. Essa divergência intensificou-se notavelmente durante a década de 1960, uma década crucial que, segundo alguns estudiosos da arte, marcou a transição do Modernismo para o Pós-Modernismo. Além disso, essa tendência de divergência alinha-se com a teoria da evolução da arte de Riegl, que postula que a arte progride por meio de um único processo em que modos hápticos de representação são gradualmente substituídos por modos ópticos.

Finalmente, nossa pesquisa demonstra que, apesar da complexidade visual das pinturas artísticas, padrões ordinais simples emergentes de partições de tamanho dois por dois pixels codificam informações cruciais capazes de identificar seus estilos artísticos, promovendo uma análise aprofundada de suas características estéticas e até mesmo revelando o comportamento dinâmico da arte.

Referências Bibliográficas

- [1] Siegenfeld, A. F. & Bar-Yam, Y. An introduction to complex systems science and its applications. *Complexity* **2020**, 1–16 (2020).
- [2] Mitchell, M. *Complexity: A Guided Tour* (Oxford university press, 2009).
- [3] Proença, G. *História da Arte* (Atica, 2002).
- [4] Argan, G. & Gubernatis, H. *Arte e Crítica de Arte*. Teoria da Arte (Estampa, 1995).
- [5] Argan, G., Bottmann, D. & Carotti, F. *Arte Moderna* (Companhia das Letras, 1992).
- [6] Beardsley, M. C. *Aesthetics from Classical Greece to the Present* (University of Alabama Press, 2015).
- [7] Grube, G. M. Plato's theory of beauty. *The Monist* **37**, 269–288 (1927).
- [8] Kidd, S. E. *Play vs. Mimesis in Aristotle's Aesthetics*, 143–161 (Cambridge University Press, 2019).
- [9] Aristotle. *Aristotle: Metaphysics, Books I-IX* (Harvard University Press, 1933). Translated by Hugh Tredennick.
- [10] Birkhoff, G. D. *Aesthetic Measure*, vol. 38 (Harvard University Press Cambridge, 1933).
- [11] Taylor, R. P., Micolich, A. P. & Jonas, D. Fractal analysis of Pollock's drip paintings. *Nature* **399**, 422 (1999).
- [12] Jones-Smith, K. & Mathur, H. Fractal analysis: Revisiting Pollock's drip paintings. *Nature* **444**, E9–E10 (2006).

- [13] Taylor, R. P., Micolich, A. P. & Jonas, D. Fractal analysis: Revisiting Pollock’s drip paintings (reply). *Nature* **444**, E10 (2006).
- [14] Taylor, R. P., Guzman, R., Martin, T. P., Hall, G. D. R., Micolich, A. P., Jonas, D., Scannell, B. C., Fairbanks, M. S. & Marlow, C. A. Authenticating Pollock paintings using fractal geometry. *Pattern Recognition Letters* **28**, 695–702 (2007).
- [15] Jones-Smith, K., Mathur, H. & Krauss, L. M. Drip paintings and fractal analysis. *Physical Review E* **79**, 046111 (2009).
- [16] De la Calleja, E. M., Cervantes, F. & De la Calleja, J. Order-fractal transitions in abstract paintings. *Annals of Physics* **371**, 313–322 (2016).
- [17] Alvarez-Ramirez, J., Ibarra-Valdez, C. & Rodriguez, E. Fractal analysis of Jackson Pollock’s painting evolution. *Chaos, Solitons & Fractals* **83**, 97–104 (2016).
- [18] Pedram, P. & Jafari, G. R. Mona Lisa: The stochastic view and fractality in color space. *International Journal of Modern Physics C* **19**, 855–866 (2008).
- [19] Hughes, J. M., Graham, D. J. & Rockmore, D. N. Quantification of artistic style through sparse coding analysis in the drawings of Pieter Bruegel the Elder. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **107**, 1279–1283 (2010).
- [20] Shamir, L. Computer analysis reveals similarities between the artistic styles of Van Gogh and Pollock. *Leonardo* **45**, 149–154 (2012).
- [21] Elsa, M. & Zenit, R. Topological invariants can be used to quantify complexity in abstract paintings. *Knowledge-Based Systems* **126**, 48–55 (2017).
- [22] Castrejon-Pita, J. R., Castrejón-Pita, A. A., Sarmiento-Galán, A. & Castrejón-García, R. Nasca lines: A mystery wrapped in an enigma. *Chaos* **13**, 836–838 (2003).
- [23] Koch, M., Denzler, J. & Redies, C. $1/f^2$ characteristics and isotropy in the Fourier power spectra of visual art, cartoons, comics, mangas, and different categories of photographs. *PLOS ONE* **5**, e12268 (2010).
- [24] Montagner, C., Linhares, J. M. M., Vilarigues, M. & Nascimento, S. M. C. Statistics of colors in paintings and natural scenes. *Journal of the Optical Society of America A* **33**, A170–A177 (2016).
- [25] Zujovic, J., Gandy, L., Friedman, S., Pardo, B. & Pappas, T. N. Classifying paintings by artistic genre: An analysis of features & classifiers. In *Multimedia Signal Processing, 2009. MMSP’09. IEEE International Workshop on*, 1–5 (IEEE, 2009).

- [26] Tan, W. R., Chan, C. S., Aguirre, H. E. & Tanaka, K. Ceci n’est pas une pipe: A deep convolutional network for fine-art paintings classification. In *2016 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 3703–3707 (2016).
- [27] Mao, H., Cheung, M. & She, J. Deepart: Learning joint representations of visual arts. In *Proceedings of the 25th ACM international conference on Multimedia*, 1183–1191 (2017).
- [28] Elgammal, A., Liu, B., Kim, D., Elhoseiny, M. & Mazzone, M. The shape of art history in the eyes of the machine. In *Proceedings of the Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence and Thirtieth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference and Eighth AAAI Symposium on Educational Advances in Artificial Intelligence*, AAAI’18/IAAI’18/EAAI’18 (AAAI Press, 2018).
- [29] Perc, M. Beauty in artistic expressions through the eyes of networks and physics. *Journal of the Royal Society Interface* **17**, 20190686 (2020).
- [30] Manovich, L. Data science and digital art history. *International Journal for Digital Art History* (2015).
- [31] Yazdani, M., Chow, J. & Manovich, L. Quantifying the development of user-generated art during 2001–2010. *PLOS ONE* **12**, e0175350 (2017).
- [32] Ushizima, D., Manovich, L., Margolis, T. & Douglas, J. Cultural analytics of large datasets from Flickr. *Proceedings of the International AAAI Conference on Web and Social Media* **6**, 30–34 (2021).
- [33] Kim, D., Son, S.-W. & Jeong, H. Large-scale quantitative analysis of painting arts. *Scientific Reports* **4**, 7370 (2014).
- [34] Lee, B., Kim, D., Sun, S., Jeong, H. & Park, J. Heterogeneity in chromatic distance in images and characterization of massive painting data set. *PLOS ONE* **13**, e0204430 (2018).
- [35] Sigaki, H. Y. D., Perc, M. & Ribeiro, H. V. History of art paintings through the lens of entropy and complexity. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **115**, E8585–E8594 (2018).
- [36] Valensise, C. M., Serra, A., Galeazzi, A., Etta, G., Cinelli, M. & Quattrocioni, W. Entropy and complexity unveil the landscape of memes evolution. *Scientific Reports* **11**, 20022 (2021).

- [37] Lee, B., Seo, M. K., Kim, D., Shin, I.-s., Schich, M., Jeong, H. & Han, S. K. Dissecting landscape art history with information theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **117**, 26580–26590 (2020).
- [38] Karjus, A., Solà, M. C., Ohm, T., Ahnert, S. E. & Schich, M. Compression ensembles quantify aesthetic complexity and the evolution of visual art. *EPJ Data Science* **12**, 21 (2023).
- [39] Lee, K., Park, J., Goree, S., Crandall, D. & Ahn, Y.-Y. Social signals predict contemporary art prices better than visual features, particularly in emerging markets. *Scientific Reports* **14**, 11615 (2024).
- [40] Hubbard, T. L. *Aesthetics and Preferences in Spatial and Scene Composition*, 222–240 (Cambridge University Press, 2018).
- [41] Hekkert, P. Design aesthetics: Principles of pleasure in design. *Psychology Science* **48**, 157 (2006).
- [42] Warnke, M. On Heinrich Wölfflin. *Representations* **27**, 172–187 (1989).
- [43] Wölfflin, H. *Principles of Art History: The Problem of the Development of Style in Later Art* (Dover, Mineola, 1950).
- [44] Darst, D. H. Renaissance symmetry Baroque symmetry and the sciences. *Diógenes* **31**, 69–90 (1983).
- [45] Sypher, W. *Four Stages of Renaissance Style* (Peter Smith Pub Inc, 1978).
- [46] Davis, W. *A General Theory of Visual Culture* (Princeton University Press, 2018).
- [47] Bandt, C. & Wittfeld, K. Two new parameters for the ordinal analysis of images. *Chaos* **33**, 043124 (2023).
- [48] Bandt, C. & Pompe, B. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters* **88**, 174102 (2002).
- [49] Lopez-Ruiz, R., Mancini, H. L. & Calbet, X. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A* **209**, 321–326 (1995).
- [50] Olivares, F., Plastino, A. & Rosso, O. A. Contrasting chaos with noise via local versus global information quantifiers. *Physics Letters A* **376**, 1577–1583 (2012).
- [51] Rosso, O. A., Larrondo, H., Martin, M. T., Plastino, A. & Fuentes, M. A. Distinguishing noise from chaos. *Physical Review Letters* **99**, 154102 (2007).

- [52] Ribeiro, H. V., Zunino, L., Lenzi, E. K., Santoro, P. A. & Mendes, R. S. Complexity-entropy causality plane as a complexity measure for two-dimensional patterns. *PLOS ONE* **7**, 1–9 (2012).
- [53] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal* **27**, 379–423 (1948).
- [54] Courant, R. *Differential and Integral Calculus*, vol. 2 (John Wiley & Sons, 2011).
- [55] Lamberti, P. W., Martin, M. T., Plastino, A. & Rosso, O. A. Intensive entropic non-triviality measure. *Physica A* **334**, 119–131 (2004).
- [56] Fisher, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **222**, 309–368 (1922).
- [57] Lehmer, D. H. Teaching combinatorial tricks to a computer. In Bellman, R. & Jr., M. H. (eds.) *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 10, 179–193 (1960).
- [58] Berger, S., Kravtsiv, A., Schneider, G. & Jordan, D. Teaching ordinal patterns to a computer: Efficient encoding algorithms based on the Lehmer code. *Entropy* **21**, 1023 (2019).
- [59] Bandt, C. & Shiha, F. Order patterns in time series. *Journal of Time Series Analysis* **28**, 646–665 (2007).
- [60] Kylberg, G. & Sintorn, I.-M. On the influence of interpolation method on rotation invariance in texture recognition. *EURASIP Journal on Image and Video Processing* **17**, 1–12 (2016).
- [61] Van der Walt, S., Schönberger, J. L., Nunez-Iglesias, J., Boulogne, F., Warner, J. D., Yager, N., Goullart, E. & Yu, T. scikit-image: Image processing in Python. *PeerJ* **2**, e453 (2014).
- [62] McInnes, L., Healy, J. & Melville, J. UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction. *ArXiv* (2018).
- [63] McInnes, L., Healy, J., Saul, N. & Grossberger, L. UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection. *The Journal of Open Source Software* **3**, 861 (2018).
- [64] Kleiner, F. S. *Gardner’s Art through the Ages: The Western Perspective, Volume II* (Wadsworth Publishing, Boston, MA, 2013), 14 edition edn.
- [65] Hodge, A. N. *A History of Art: Painting from Giotto to the Present Day* (Arcturus Publishing Limited, London, 2013).

- [66] Danto, A. C. & Goehr, L. *After the end of art: Contemporary art and the pale of history*, vol. 197 (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [67] Chen, T. & Guestrin, C. XGBoost: A scalable tree boosting system. In *KDD'16: Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 785–794 (New York, 2016).
- [68] Breiman, L. Random forests. *Machine Learning* **45**, 5–32 (2001).
- [69] Fisher, A., Rudin, C. & Dominici, F. All models are wrong, but many are useful: Learning a variable’s importance by studying an entire class of prediction models simultaneously. *Journal of Machine Learning Research* **20**, 1–81 (2019).
- [70] Molnar, C. *Interpretable Machine Learning* (2022).
- [71] Gaiger, J. The analysis of pictorial style. *The British Journal of Aesthetics* **42**, 20–36 (2002).
- [72] Riegl, A. *Historical Grammar of the Visual Arts* (Zone Book, New York, 2004).