
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LEANDRO DE SANTANA COSTA

SIMILARIDADES ENTRE TERREMOTOS E
RUÍDOS CREPITANTES EM CARVÃO E
FOLHAS PLÁSTICAS

Maringá, Agosto de 2017.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LEANDRO DE SANTANA COSTA

SIMILARIDADES ENTRE TERREMOTOS E
RUÍDOS CREPITANTES EM CARVÃO E
FOLHAS PLÁSTICAS

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor em Física.*

Orientador:

Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro - Universidade Estadual de Maringá

Maringá, Agosto de 2017.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR, Brasil)

C837s Costa, Leandro de Santana
Similaridades entre terremotos e ruídos
crepitantes em carvão e folhas plásticas / Leandro
de Santana Costa. -- Maringá, PR, 2017.
98 f.: il., figs., tabs., grafs. (algumas color.)

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Física, Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

1. Sistemas complexos - Física. 2. Física
estatística. 3. Terremoto. 4. Ruídos crepitantes. 5.
Carvão vegetal - Fraturas. 6. Plástico - Fraturas.
I. Ribeiro, Haroldo Valentim, orient. II.
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Departamento de Física. Programa de Pós-
Graduação em Física. III. Título.

CDD 23.ed. 530.15

MRPB-003609

Dedico este trabalho a minha esposa Jéssica e a meus pais Valdir e Regina, por serem as pessoas mais importantes em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço aqueles que participaram no desenvolvimento deste trabalho, por sua ajuda e empenho.

A Deus, por mais uma fase que concluo e por ser meu apoio em cada momento difícil.

A minha esposa, por seu cuidado, companheirismo e dedicação constante, que a torna essencial nessa conquista.

Ao meu orientador, Professor Doutor Haroldo Valentin Ribeiro, que me auxiliou no processo de formação acadêmica, sendo fundamental para meu desenvolvimento profissional.

Ao professor Doutor Renio dos Santos Mendes, por permitir minha entrada no Grupo de Sistemas Complexos do Departamento de Física e também por acompanhar nossos trabalhos, propondo sugestões pertinentes em cada etapa do desenvolvimento da pesquisa.

Aos professores Doutor Ervin Kaminski Lenzi, Doutor Perseu Angelo Santoro e Doutor Sergio de Picoli Junior que participaram diretamente desse trabalho. Também aos colegas Renato Ribeiro Guimarães, Denner Serafim Vieira, Higor Yudi Duenha Sigaki, Andreia Itami da Silva, e aos demais colegas do Grupo de Sistemas Complexos do Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá.

A Mônica M. Loiola, por todo auxílio e dedicação.

Ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, por influenciar positivamente minha formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos dois estudos sobre emissões acústicas em sistemas que produzem ruídos crepitantes: carvão vegetal umedecido em etanol e folhas plásticas amassadas. Nosso estudo visa a encontrar similaridades estatísticas entre a dinâmica desses sistemas e a atividade sísmica da Terra. Para buscar um paralelo mais completo, revisitamos as principais leis sísmicas que regem a estatística de terremotos; revisamos especificamente: a Lei de Gutenberg-Richter, a qual descreve a distribuição de probabilidade das magnitudes de terremotos; a Lei de Omori, que trata da dinâmica de ocorrência de tremores secundários (ou *aftershocks*) após um grande terremoto (ou *mainshock*); as leis relacionadas às distribuições de probabilidade dos tempos entre um terremoto e outro; a Lei de Produtividade, que relaciona a energia do tremor principal (*mainshock*) com o número de tremores secundários que são desencadeados; e, finalmente, a Lei de Båth, a qual afirma que a diferença entre a magnitude de um *mainshock* e o seu maior *aftershock* é, em média, 1,2. Com enfoque nessas cinco leis, analisamos os padrões estatísticos de emissões acústicas produzidas por carvão vegetal. Mostramos que amostras de carvão umedecidas com etanol emitem ruídos crepitantes devido ao aumento da pressão interna causada pela evaporação do etanol. Similarmente, buscamos caracterizar as principais leis sísmicas nos ruídos crepitantes emitidos ao longo do processo de relaxação de folhas plásticas amassadas. Verificamos que os dois sistemas apresentam grandes similaridades com as atividades sísmicas terrestres. Em muitos casos, uma similaridade quantitativa pode ser observada e, em alguns casos, discrepâncias foram observadas e relacionadas às condições físicas dos processos em investigação.

Palavras-chave: Sistemas Complexos. Física Estatística. Terremotos. Ruídos Crepitantes. Fraturas. Carvão. Plástico.

Abstract

We present two studies about the acoustic emissions in systems that produce crackling noise: charcoal and crumpled plastic sheets. The aim of our studies is finding statistical similarities between the dynamics of these systems and the seismic activity of Earth. In order to achieve a complete parallel, we revisited the most important seismic laws that rule the statistics of earthquakes; specifically, we review: the Gutenberg-Richter law, that describes the probability distributions of earthquake magnitudes; Omori's Law, that explains the occurrence of secondary earthquakes (aftershocks) after an intense earthquake (mainshock); the laws related to the probability distribution of time interval between earthquakes; the Productivity Law, that relates the number of aftershocks with the magnitude of the mainshock; and, finally, Båth's Law, that states that the difference between the magnitude of a mainshock and its largest aftershocks is 1.2 on average. By focusing on these five laws, we analyze the statistical patterns of the acoustic emissions produced by charcoal. We show that samples of charcoal dampened with ethanol emit crackling noises due to the increase of the sample internal pressure caused by the ethanol evaporation. Similarly, we characterize the main seismic laws in the crackling noises emitted during the relaxation process of crumpled plastic sheets. We verify that the two systems exhibit striking similarities with the seismic activity of Earth. In several cases, we report a quantitative similarity and, for some cases, discrepancies are observed and related to the physical conditions of process under investigation.

Key words: Complex Systems. Statistical Physics. Earthquakes. Crackling Noise. Fracture. Charcoal. Plastic.

Introdução	10
1 As principais leis da estatística de terremotos	14
1.1 A Lei de Gutenberg-Richter	14
1.2 A Lei de Omori	18
1.3 Leis sobre o tempo entre eventos	22
1.4 Lei de Produtividade e Lei de Bâth	30
2 Ruídos crepitantes emitidos por carvão vegetal umedecido em etanol	37
2.1 Introdução ao problema	37
2.2 Experimentos e aquisição de dados	38
2.3 Análise dos dados	39
2.4 Conclusões e perspectivas	59
3 Ruídos crepitantes emitidos por folhas plásticas amassadas	60
3.1 Introdução ao problema	60
3.2 Experimentos e aquisição de dados	61
3.3 Análise dos dados	63
3.4 Conclusões e perspectivas	73
Panorama geral, conclusões e perspectivas	77
A Função de correlação	79
B Teste de hipótese de Kolmogorov-Smirnov	82
C Método <i>bootstrapping</i>	85
D Método de máxima verossimilhança	86

E	Teste da razão de verossimilhança	88
F	Método de Clauset <i>et al.</i> para ajuste de leis de potência	90
	Referências bibliográficas	98

As ciências, de modo geral, tem experimentado uma tendência multidisciplinar muito intensa desde o final do século 20. Nesse contexto, a Física não foi exceção, especialmente a Mecânica Estatística. Sobre essa última, muitos desses novos estudos podem ser enquadrados no campo dos estudos sobre sistemas complexos [1–7]. É nesse campo de pesquisa que o presente trabalho se enquadra.

Em geral, é muito complicado definir (por meio de propriedades matemáticas) o que é um sistema complexo. Essa dificuldade reflete a ausência de uma definição precisa do conceito complexidade, o que pode ser observado nas palavras do laureado com o Prêmio Nobel em Física, Murray Gell-Mann, proferidas numa entrevista [8]:

“Probably no single concept of complexity can adequately capture our intuitive notions of what the word ought to mean. Several different kinds of complexity may have to be defined, some of which may not yet have been conceived.”

Apesar dessa inerente dificuldade, os sistemas complexos compartilham de propriedades comuns típicas. Usualmente, um sistema complexo é um sistema composto de muitas partes interagentes, cuja dinâmica só faz sentido quando tratada de modo coletivo. Ainda que seja possível aplicar a abordagem reducionista e buscar pela dinâmica individual das partes, esse conhecimento, em geral, não contribui muito para prever ou modelar a dinâmica do sistema complexo como um todo. Costumamos dizer que os sistemas complexos apresentam comportamentos coletivos emergentes e auto-organizados que são extremamente difíceis de prever apenas a partir da dinâmica de suas partes. Em geral, sistemas complexos manifestam padrões autossimilares no tempo e no espaço e distribuições de probabilidade não gaussianas. Esse último ponto, usualmente, reflete a distante condição de equilíbrio (no sentido termodinâmico) que esses sistemas apresentam. Além disso, muitas vezes, tal como um sistema físico próximo de uma transição de fase (ou próximo à criticalidade), esses sistemas complexos apresentam correlações do longo alcance (seja no espaço ou no tempo) e flutuações caracterizadas por distribuições de cauda longa, principalmente as leis de potência.

Podemos afirmar, assim, que os sistemas complexos representam uma classe muito ampla de problemas que envolvem Física, Química, Engenharias, Ciências Biológicas e Sociais. Ilustrações importantes sobre sistemas complexos estão espalhadas pela sociedade. Nesse caso, diferentemente dos sistemas físicos, as partes (seres humanos) exibem ampla diversidade de interações, muitas delas difíceis de quantificar. Entretanto e, a despeito dessa dificuldade, observamos que modelos simples baseados em situações típicas de física estatística podem ser aplicados para descrever propriedades “macroscópicas” de sistemas complexos sociais [7]. Tal como um sistema físico próximo à criticalidade [9], muitos sistemas complexos exibem comportamentos dinâmicos universais.

Para um exemplo típico dessa universalidade nos padrões de tais sistemas, consideremos os terremotos. Esses podem ser definidos como a súbita liberação de energia na crosta terrestre, a qual é proveniente de tensões elásticas criadas pela movimentação das placas tectônicas. Veremos, mais adiante, que esse sistema apresenta diversas características que, de algum modo, lembram aquelas de sistemas físicos na criticalidade. Ocorre que muitos dos padrões observados em terremotos, também têm sido reportados em sistemas aparentemente muito diferentes. Um exemplo concreto desse aspecto diz respeito à distribuição de energia dos terremotos. Conforme será detalhado mais adiante, as energias dos eventos sísmicos seguem uma distribuição de probabilidade lei de potência (a chamada Lei de Gutenberg-Richter). Por outro lado, essa mesma distribuição (num contexto similar de tensão e relaxação) tem sido encontrada em sistemas extremamente diversos, como movimento de animais [10], inflar de pulmões [11], indicadores de mercado financeiro [12, 13], conflitos violentos [14, 15], erupções de raios gama em estrelas de nêutrons [16], erupções vulcânicas [17], flutuações na magnetização de materiais ferromagnéticos [18] e no colapso de espumas [19, 20].

A despeito desses mais variados estudos, é no contexto de fraturas de materiais (e também nos processos de amassar, desamassar e rasgar papel ou plástico [21–24]) que analogias com a dinâmica de terremotos tem sido amplamente investigadas [25–37]. Todos esses trabalhos apresentam uma grande variedade de aplicações em engenharia (no contexto da caracterização de materiais) e também podem servir como experimentos em laboratório para modelagem de terremotos. Além disso, apesar das diferenças de escala (espacial ou temporal) todos esses sistemas podem ser agrupados sob a ideia de *crackling noise* [38, 39] (ou ruídos crepitantes). Essa ideia agrupa o conjunto de sistemas que, ao serem perturbados lentamente, respondem de maneira abrupta e por meio de eventos discretos com tamanhos muito variados. Nesse contexto, podemos pensar que a Terra responde com terremotos intermitentes ao lento movimento de duas placas tectônicas que se encontram, assim como folhas plásticas amassadas emitem ruídos intermitentes em resposta ao lento processo de relaxação desses materiais ou, num contexto mais social, que o número de mortos intermitentes num conflito ocorre em resposta ao aumento de “tensões sociais”.

Apesar do amplo interesse em buscar por similaridades entre sistemas de pequena escala que emitem ruídos crepitantes e terremotos, a maioria das investigações não analisa essa analogia de forma completa. De fato, a maioria desses estudos se limita a caracterizar

apenas a distribuição de energia associada a esses ruídos crepitantes, ainda que a estatística de terremotos seja muito mais rica. Conforme veremos detalhadamente no decorrer deste texto, cinco são as principais leis sobre a estatística de terremotos: *i*) a (já mencionada) Lei de Gutenberg-Richter, a qual descreve a distribuição de probabilidade das magnitudes de terremotos; *ii*) a Lei de Omori, que trata da dinâmica de ocorrência de tremores secundários após um grande terremoto; *iii*) as leis relacionadas às distribuições de probabilidade dos tempos entre um terremoto e outro; *iv*) a Lei de Produtividade, que relaciona a energia do tremor principal (*mainshock*) com o número de tremores secundários (*aftershocks*) que são desencadeados e *v*) a Lei de Bâth, a qual afirma que a diferença entre a magnitude de um terremoto e o maior tremor secundário é, em média, 1,2. Nesse contexto, a literatura carece de investigações que busquem por similaridades mais profundas, isto é, de trabalhos científicos que visem a caracterizar as cinco principais leis sísmicas no contexto de fraturas de materiais e nos processos de amassar ou desamassar folhas plásticas.

Uma exceção importante é o trabalho de Jordi A. Baró *et al.* [40] em 2013. Nele, os autores estudaram o processo de fragmentação de um material poroso sujeito a uma compressão constante. Utilizando as emissões acústicas produzidas ao longo desse processo, das cinco principais leis sísmicas, Baró *et al.* só não analisaram a Lei de Bâth. Em seu trabalho, os autores reportaram uma grande semelhança entre as experiências em laboratório com esses materiais e a atividade sísmica da Terra. Nesse sentido, podemos afirmar que nosso trabalho segue essa mesma linha proposta por Baró e colaboradores. Especificamente, neste trabalho iremos apresentar um estudo empírico que envolve uma caracterização ampla das principais leis sísmicas em dois sistemas: *i*) fraturas em carvão vegetal [41] e *ii*) a relaxação de folhas plásticas depois de amassadas [42].

No primeiro caso, veremos que, após serem umedecidas em etanol, as amostras de carvão vegetal experimentam uma tensão interna causada pela evaporação desse álcool no interior das amostras. Essa tensão promove fraturas no material que são analisadas por meio das emissões acústicas produzidas por essas fraturas. Vamos discutir que esse processo é mais complexo do que aqueles usualmente estudados em fraturas de materiais, no sentido que as tensões são internas e irregularmente distribuídas no tempo e no espaço. De fato, essa configuração é mais parecida com o caso das atividades sísmicas provocadas pela injeção de fluidos no solo para mineração e extração de petróleo [28, 43] e também com os chamados *gas-rock outbursts*, que são eventos de expulsão súbita e violenta de gás e rochas que ocorrem em minas de carvão [44].

Em nosso segundo estudo, investigaremos o processo de relaxação de folhas plásticas após terem sido amassadas. Investigando, novamente, as emissões acústicas características desse processo, veremos que as cinco principais leis sísmicas também surgem nesse processo de desamassar folhas plásticas. Entretanto, os parâmetros associados à essas leis (na maioria dos casos) são diferentes daqueles reportados para terremotos ou para experimentos com fraturas de materiais, o que indica que esse processo de relaxação apresenta características únicas. Esse último fato mostra que a investigação desses padrões sísmicos pode, eventu-

almente, encontrar aplicações para a caracterização de materiais plásticos e também para testar modelos usualmente empregados na descrição de terremotos em condições diferentes.

O restante desse texto está estruturado da seguinte maneira. No capítulo 1, apresentamos uma revisão das principais leis sísmicas que regem a estatística de terremotos. Em seguida, no capítulo 2, apresentamos nosso estudo sobre as emissões acústicas em carvão vegetal umedecido em etanol. Finalmente, no capítulo 3, descrevemos as análises sobre as emissões acústicas de folhas plásticas. Na tentativa de manter o foco principal no resultados, vários dos métodos empregados em nossas análises foram concebidos na forma de apêndices. Além disso, ao final das investigações dos dois problemas tratados nesse texto, apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

As principais leis da estatística de terremotos

Neste capítulo, apresentaremos as principais leis que regem a estatística de terremotos visando a sua posterior aplicação a sistemas que produzem ruídos crepitantes (*crackling noises*). Discutiremos, especificamente: *i*) a Lei de Gutenberg-Richter, a qual descreve a distribuição de probabilidade das magnitudes de terremotos; *ii*) a Lei de Omori, que trata da dinâmica de ocorrência de tremores secundários (ou *aftershocks*) após um grande terremoto (ou *mainshock*); *iii*) as leis relacionadas às distribuições de probabilidade dos tempos entre um terremoto e outro; *iv*) a Lei de Produtividade, que relaciona o número de tremores secundários à energia do *mainshock* que os desencadeou e, finalmente, *v*) a Lei de Bâth, a qual afirma que a diferença entre a magnitude de um *mainshock* e o seu maior *aftershock* é, em média, 1,2.

1.1 A Lei de Gutenberg-Richter

Definido como o movimento abrupto de placas tectônicas que se encontram sobre falhas geológicas, o terremoto é caracterizado pela súbita liberação de energia na crosta terrestre. Essa energia é transportada na forma de ondas sísmicas, podendo atingir a ordem de megatons (aproximadamente 10^{15} Joules).

Embora a previsão desses fenômenos ainda seja muito complexa [45], sua detecção em tempo real vem se aperfeiçoando com o desenvolvimento de tecnologias sensíveis a abalos da ordem de microssismos, os quais são usualmente medidos por meio de sismógrafos e convertidos em sismogramas, conforme ilustrado na figura 1.1 [46]. A primeira fase de um sismograma corresponde à chegada das chamadas ondas *P*. Em seguida, chegam as ondas *S* que, habitualmente, têm uma amplitude superior às ondas *P*. Logo após, chegam as perturbações associadas às ondas superficiais (ondas com comprimento de onda muito

superior), cuja amplitude é bem mais elevada. Essas características formam um registro sísmico típico e, por meio dele, podemos calcular a intensidade ou magnitude dos eventos sísmicos e também o seu tempo de ocorrência.

Especificamente, a magnitude m de um evento sísmico pode ser calculada usando a seguinte relação [47]

$$m = \log(A/T) + Q(D, h), \quad (1.1)$$

sendo A a amplitude das ondas de superfície, T o período dessas ondas e $Q(D, h)$ um fator de correção que é função da distância D entre a estação de medida e o epicentro do evento, e da profundidade h desse epicentro. Nessa expressão e ao longo de todo texto, o logaritmo está expresso na base 10. Usando a magnitude m , podemos escrever também a energia E irradiada por um terremoto como [47]

$$\log E = A + B m. \quad (1.2)$$

Nessa expressão, as constantes A e B relacionando a energia e magnitude de um terremoto são obtidas empiricamente [48]. Os valores usualmente empregados são $A = 11,8$ e $B = 3/2$ [47], com E expresso em ergs ($1\text{erg} = 10^{-7}$ Joules)¹.

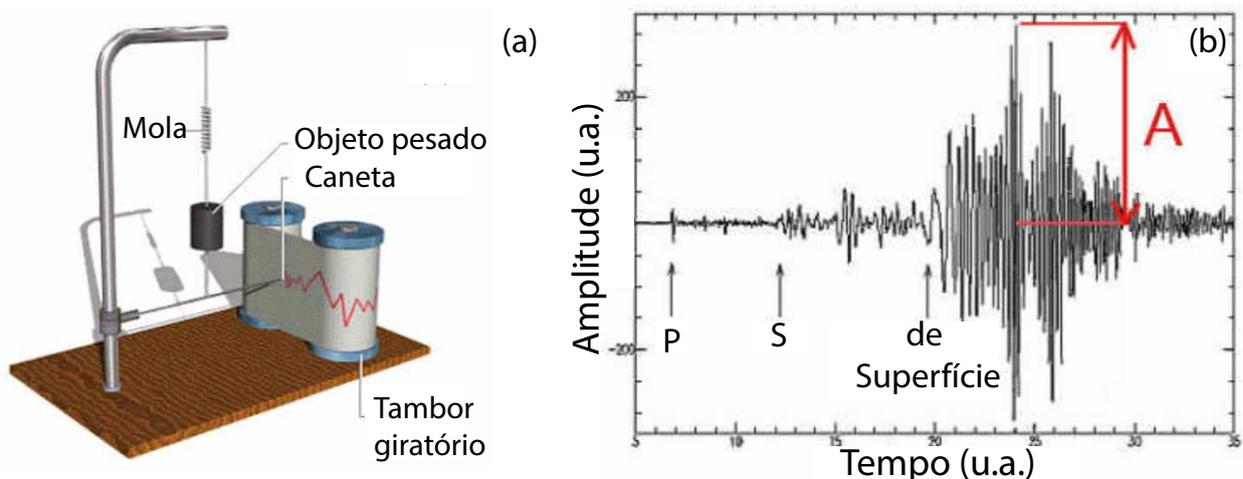


Figura 1.1: (a) Exemplo de sismógrafo constituído de um sistema massa-mola. (b) Exemplo de sismograma que representa a conversão do sinal do sismógrafo para um registro temporal do evento sísmico. Sendo u.a. a abreviação de unidade arbitrária. Adaptado da referência [46].

Naturalmente, cada evento sísmico (terremoto) é caracterizado por uma magnitude m variável, como mostra a figura 1.2a. Nesse contexto, uma pergunta natural diz respeito a como essas magnitudes estão distribuídas. Uma das respostas mais aceitas para essa pergunta é a chamada Lei de Gutenberg-Richter [49]. Para uma dada região, essa lei estabelece

¹A relação equivalente para para o caso de experimentos relacionados à fratura de materiais não está bem estabelecida, ou seja, não existe uma definição para a magnitude m de um evento acústico. Ao longo dos capítulos 2 e 3 desse trabalho, vamos assumir que $B = 1$ e $A = 0$ para eventos acústicos. Assim, a magnitude de um evento acústico é definida como $m = \log(E)$.

uma relação entre a magnitude m e o número de eventos N cuja magnitude é maior que m . Matematicamente, escrevemos

$$\log N(m) = a - b m, \quad (1.3)$$

sendo $N(m)$ o número de terremotos com magnitude maior ou igual a m , a um parâmetro que indica a taxa total de atividade sísmica (logaritmo do número de terremotos com magnitude maior que zero) e b outro parâmetro que poder relacionado ao expoente da distribuição de energia dos terremotos (conforme descrito mais adiante). Vale notar que a expressão 1.3 está relacionada à distribuição acumulada do número de terremotos com magnitude m . De fato,

$$\int_m^\infty P(m') dm' \propto N(m), \quad (1.4)$$

sendo $P(m)$ a distribuição de probabilidade das magnitudes m . Comparando 1.3 e 1.4, podemos escrever

$$P(m) \sim 10^{-bm}, \quad (1.5)$$

uma expressão que é equivalente a 1.3. Imaginando que equação 1.2 define uma mudança de variáveis aleatórias, podemos encontrar a distribuição de energia $P(E)$ dos terremotos fazendo

$$P(m) dm = P(E) dE. \quad (1.6)$$

De fato, após alguns cálculos podemos escrever

$$P(E) \sim E^{-\beta}, \quad (1.7)$$

com

$$\beta = \frac{b}{B} - 1. \quad (1.8)$$

Assim como a , os valores do expoente b podem variar de região para região [50]; entretanto, usualmente temos $b \approx 1$. Supondo $b = 1$, notamos que a Lei de Gutenberg-Richter estabelece que os eventos de magnitude m são dez vezes mais frequentes do que os de magnitude $(m + 1)$. Do ponto de vista da energia, se $b = 1$ e $B = 3/2$, temos $\beta = 5/3 \cong 1,67$. A figura 1.2b ilustra como a Lei de Gutenberg-Richter é costumeiramente apresentada. Nesse gráfico, no qual o eixo y está em escala logarítmica, a equação 1.3 é linearizada, o que facilita a visualização do padrão. Similarmente, a Lei de Gutenberg-Richter expressa em termos da energia (equação 1.7) é linearizada ao empregar um gráfico em escala log-log. As expressões 1.3 e 1.7 para a Lei de Gutenberg-Richter são completamente equivalentes. Entretanto, como veremos mais adiante, a forma da equação 1.7 é mais comum no estudo de emissões acústicas em materiais.

Embora tenhamos assumido anteriormente que o valor de b é próximo da unidade, na realidade, esse valor não é universal e costuma depender da região de ocorrência dos terremotos. No estudo recente de Godano, Lippello e Arcangelis [51], os autores relatam sobre a

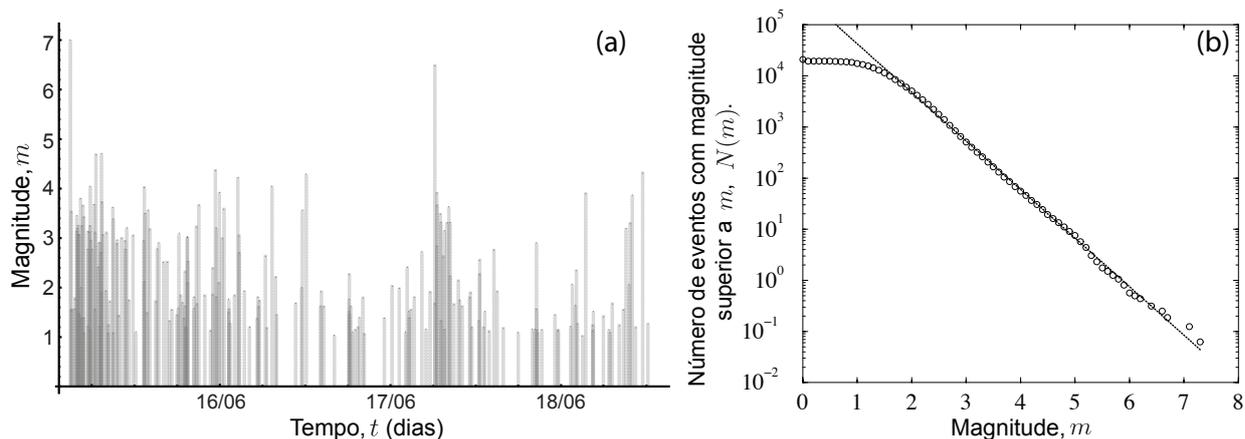


Figura 1.2: (a) Exemplo de série temporal para as magnitudes m dos terremotos ocorridos na falha de San Andreas (localizada na Califórnia, Estados Unidos) entre 15/06/2005 e 18/06/2005. (b) Número de terremotos N com magnitude maior ou igual a m para a falha de San Andreas (círculos abertos). A linha contínua é a Lei de Gutenberg-Richter (equação 1.3) com $b = 0,95$. Adaptado da referência [50].

dependência do valor de b em seis diferentes regiões (catálogo de terremotos): Norte e Sul da Califórnia, Grécia, Japão, Itália e Suíça. A tabela 1.1 apresenta mais detalhes dos dados empregados nesse estudo e também o valor médio de b ($\langle b \rangle$) encontrado para cada região. Assim, para esse estudo, observamos que o valor de b varia entre 0,95 (para o Japão) e 1,58 (para Grécia). De fato, é bem aceito entre os pesquisadores de terremotos que o valor de b varie entre 0,8 e 1,6 (β entre 1,5 e 2,1) [51, 52].

Tabela 1.1: Variação do valor médio do parâmetro b ($\langle b \rangle$) para diferentes regiões do mundo. Dados extraídos da referência [51].

<i>Catálogo</i>	<i>Período</i>	<i>Latitude</i>	<i>Longitude</i>	$\langle b \rangle$	<i>Total de eventos</i>
Sul da Califórnia	1984 a 2002	31,47 a 37,03	-121,51 a -114,04	1,13	289385
Norte da Califórnia	1984 a 2005	35,30 a 42,45	-126,00 a 116,34	1,06	298551
Grécia	2003 a 2012	33,10 a 43,68	14,81 a 35,03	1,58	90255
Japão	1985 a 1996	25,73 a 47,96	128,02 a 148,00	0,95	159346
Itália	2005 a 2012	35,00 a 47,99	6,08 a 18,98	1,01	85772
Suíça	1991 a 2008	45,40 a 48,30	5,60 a 11,10	1,39	9728

Além de variar entre diferentes regiões geográficas, o valor de b também depende da magnitude dos terremotos. Por isso, anteriormente, havíamos mencionado o valor médio de b . Essa média é calculada sobre diferentes limiares m^* para as magnitudes m . Para compreender melhor esse procedimento, consideremos novamente o gráfico da figura 1.2. Suponha que refaçamos essa figura, selecionando apenas os eventos com magnitude maior que m^* . Com esses dados, podemos estimar o valor de b (usando, por exemplo, o método da máxima verossimilhança – apêndice F) relacionado à magnitude limiar m^* . A figura 1.3 mostra o comportamento de b em função de m^* obtido por Godano, Lippiello e Arcangelis [51] para os mesmos dados descritos na tabela 1.1. Observamos um comportamento similar para

todas as regiões, isto é, o valor de b tende inicialmente a aumentar com m^* até saturar, aproximadamente, num certo valor que depende da região geográfica. Na tabela 1.1 o valor médio de $b(\langle b \rangle)$ foi calculado sobre os valores de m^* mostrados na figura 1.3.

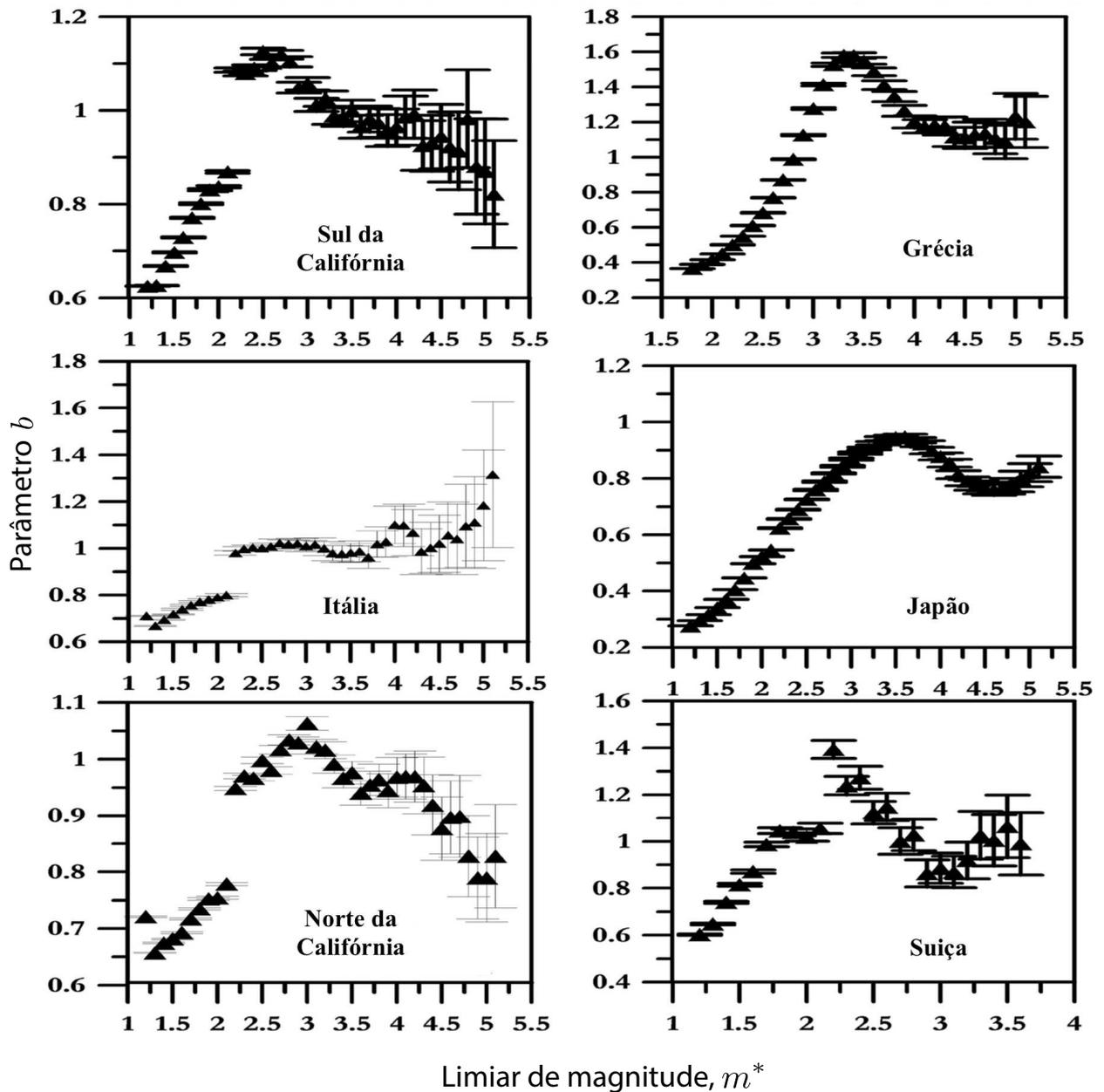


Figura 1.3: Dependência do parâmetro b da Lei de Gutenberg-Richter como função da magnitude limiar m^* para o Sul da Califórnia (EUA), Grécia, Itália, Japão, Norte da Califórnia (EUA) e Suíça. Adaptado da referência [51].

1.2 A Lei de Omori

Uma importante característica relacionada a terremotos diz respeito à ocorrência de tremores secundários (*aftershocks*) após o acontecimento de um terremoto de grande magnitude

(*mainshock*). Uma primeira e ingênua tentativa para descrever esses eventos secundários seria supor que suas ocorrências não apresentam nenhuma relação com os eventos do passado. Entretanto, essa descrição é completamente equivocada. De fato, sabemos que eventos de grande magnitude desencadeiam muitos outros eventos de magnitude inferior, mas que podem ser bastante perigosos. Nesse sentido, entender como se dá a ocorrência desses tremores secundários é muito importante.

Essa questão foi inicialmente abordada por Fusakichi Omori [53] em 1894. Especificamente, Omori estudou os eventos desencadeados por um terremoto que ocorreu nas antigas províncias de Mino e Owari (localizadas na região central do Japão) em 1891. O principal resultado empírico de Omori foi verificar que a taxa de ocorrência de tremores secundários (isto é, número de eventos por unidade de tempo) decai com o inverso da distância temporal (intervalo de tempo) que separa o tremor secundário do tremor principal. Tomando t para representar a distância temporal e $R(t)$ sendo o número de eventos secundários por unidade de tempo, podemos expressar os resultados de Omori como

$$R(t) = \frac{K}{t + c}, \quad (1.9)$$

sendo K e c constantes a serem ajustadas aos dados; especificamente, K é conhecido como coeficiente de produtividade dos *aftershocks* e o valor de c é o deslocamento temporal relacionado à taxa de decaimento no início da sequência de tremores secundários (tipicamente entre 0,5 e 20 horas [54]). Essa expressão é conhecida como Lei de Omori.

A figura 1.4 mostra o comportamento empírico da taxa de *aftershocks* desencadeados pelo *mainshock* estudado por Omori [53]. Observamos que, nesse gráfico log-log (muitas vezes chamado de *Omori Plot*), o comportamento lei de potência da Lei de Omori é linearizado (supondo $t \gg c$). Assim, um comportamento linear dos dados nesse gráfico é um indicativo para a Lei de Omori. De fato, notamos que o comportamento dos dados é bem aproximado por uma reta (no gráfico log-log). Mais do que isso, percebemos que a expressão 1.9 fornece um bom ajuste aos dados com $K = 532,16$ e $c = 0,797$ (dia).

Apesar do bom acordo mostrado anteriormente, Omori observou que para outros dados (por exemplo, para o *mainshock* ocorrido na cidade de Kumamoto em 1889), um ajuste melhor é obtido usando a expressão

$$R(t) = K(t + c)^{-1} + K'(t + c)^{-2} + \dots \quad (1.10)$$

sendo K, K', \dots constantes. Notamos que essa expressão é uma generalização da equação 1.9, a qual é recuperada considerando apenas o primeiro termo da expressão 1.10. Ao usar essa generalização, devemos escolher o número de termos a ser considerado. Normalmente, levamos em conta apenas uns poucos termos (por exemplo, para o terremoto em Kumamoto, Omori considerou os dois primeiros termos de 1.10).

A Lei de Omori foi também generalizada por Tokuji Utsu em 1961 [55]. Visando a um

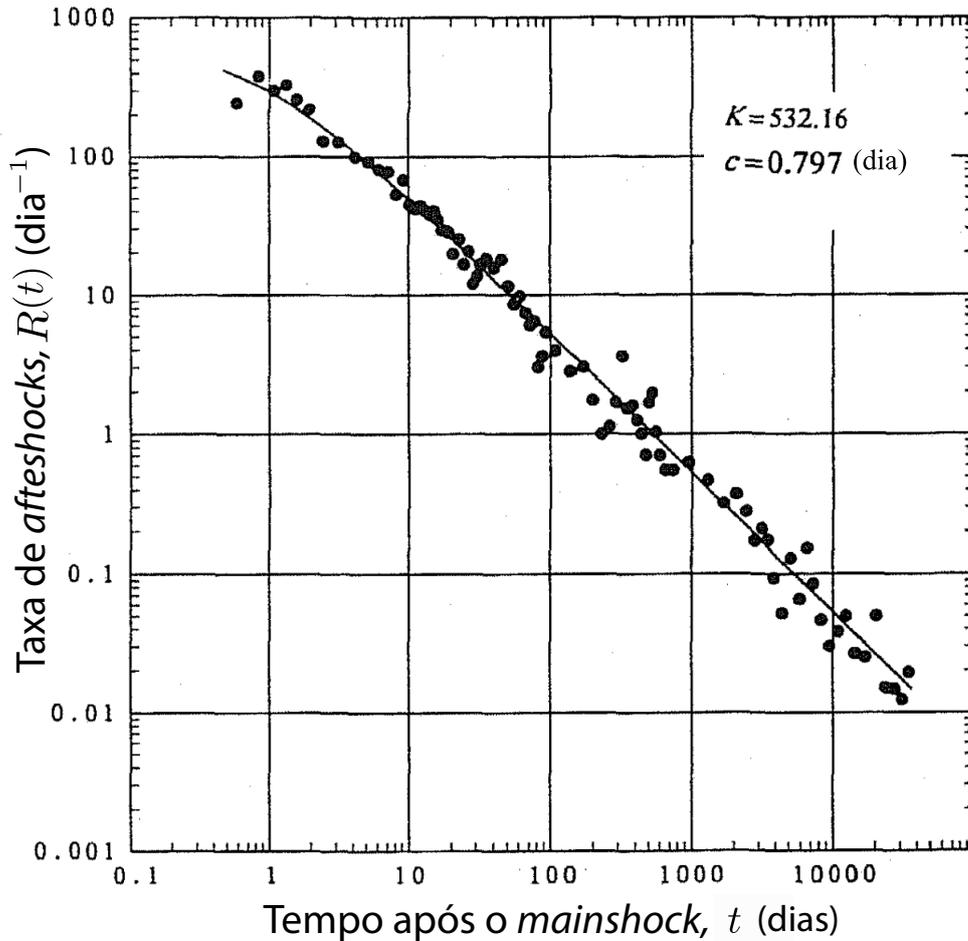


Figura 1.4: Taxa de ocorrência dos *aftershocks* $n(t)$ em função do tempo t após o *mainshock* ocorrido nas províncias de Mino e Owari (Japão). A linha contínua representa a Lei de Omori com parâmetros $K = 532,16$ e $c = 0,797$ (dia). Adaptado da referência [55].

melhor acordo com os dados, Utsu considerou o expoente da lei de potência na expressão 1.9 (que é fixo em 1) como um parâmetro de ajuste, isto é,

$$R(t) = \frac{K}{(t+c)^p} \quad (1.11)$$

sendo p o expoente da lei de potência (assintótica). Essa expressão é conhecida como Lei de Omori-Utsu (embora, muitas vezes, seja apenas chamada de Lei de Omori).

A expressão 1.11 se tornou o padrão nas análises de sequências de *aftershocks* e foi aplicada a inúmeros estudos sobre terremotos [40,41]. Para esses casos o valor de p costuma ser próximo da unidade. Entretanto, estudos mais detalhados mostram que os valores de p variam aproximadamente entre 0,9 e 1,5 [55], sendo essa variação possivelmente causada por diferentes condições tectônicas. Além disso, o valor de p também depende da magnitude do *mainshock* que desencadeia a sequência de *aftershocks* [56].

Um aspecto importante da Lei de Omori diz respeito à definição dos *mainshocks* e das sequências de *aftershocks*. De uma maneira mais direta, podemos perguntar: dada uma série

temporal de eventos sísmicos (como aquela da figura 1.2a), quais são os *mainshocks* e quais os *aftershocks* desencadeados por eles?

A resposta para essa pergunta não é única, isto é, existem várias maneiras de definir *mainshocks* e *aftershocks* [57]. Entretanto, é bastante comum o emprego de uma definição relativa, na qual, a depender de alguns parâmetros, um mesmo evento sísmico pode ser classificado como *mainshock* ou *aftershock*. Apesar de, a primeira vista, uma definição como essa parecer estranha, ela é superior a qualquer outra que seja absoluta (por exemplo, *mainshocks* são eventos com magnitude maiores que 6 graus), visto que esse tipo de definição acaba por introduzir vieses na análise.

Nesse contexto, a definição relativa que vamos descrever está entre as mais usadas em estudos relacionados à Lei de Omori [50]. A primeira etapa consiste em definir os *mainshocks* como os eventos cuja magnitude esteja no intervalo $[\epsilon_i, \epsilon_{i+1}]$, sendo os $\{\epsilon_i\}$ elementos de um conjunto predefinido com w elementos. Para cada um dos $w - 1$ intervalos, as sequências de *aftershocks* são definidas como os eventos que seguem um *mainshock*, até que um evento com energia superior a do *mainshock* seja encontrado.

Para ilustrar essa definição por meio de um exemplo, consideremos os eventos ocorridos na falha de San Andreas (falha geológica no norte da Califórnia, EUA) no período de 15/06/2005 a 18/06/2005, conforme mostrado na figura 1.2a. Por simplicidade, vamos tomar para o conjunto dos elementos de ϵ_i os seguintes valores: 3, 4, 5, 6 e 7. Assim, temos 4 intervalos para definir os *mainshocks*. As figuras 1.5a, b, c e d mostram os *mainshocks* (identificados pelos pontos vermelhos) e as respectivas sequências de *aftershocks* (identificadas por linhas coloridas) obtidas ao empregar a definição anterior.

Notamos que, a depender das janelas de magnitude, o comprimento e o número de sequências de *aftershocks* varia. Por exemplo, para o intervalo $[6, 7]$ (figura 1.5a) temos duas sequências de *aftershocks*. Observamos que a primeira sequência (cor azul) leva em conta todos os eventos da série temporal, excluindo o primeiro. Por outro lado, para o intervalo $[5, 6]$ (figura 1.5b) não há sequências de *aftershocks* (naturalmente, para séries mais longas essa possibilidade é bastante pequena).

Desse modo, para cada janela que define os *mainshocks*, teremos um gráfico de Omori. Normalmente, o comportamento observado não depende das janelas, o que justifica a preferência por esse tipo de definição de *mainshock* e *aftershock*.

Uma outra possibilidade no contexto da Lei de Omori é estudar a sequência de eventos que antecedem um *mainshock*, as chamadas sequências *foreshocks*. Para essa análise também é comum o uso de uma versão adaptada das definições de *mainshocks* e *aftershocks* descritas anteriormente. Especificamente, definimos os *mainshocks* da mesma maneira, porém, os *foreshocks* são tomados como os eventos que antecedem um *mainshock*, até que um evento com magnitude superior a do *mainshock* seja encontrado. As taxas de ocorrência de *foreshocks* são calculadas da mesma maneira descrita para os *aftershocks*.

As sequências de *foreshocks* costumam apresentar um comportamento muito similar ao obtido para as sequências de *aftershocks*, ou seja, elas seguem a Lei de Omori com t repre-

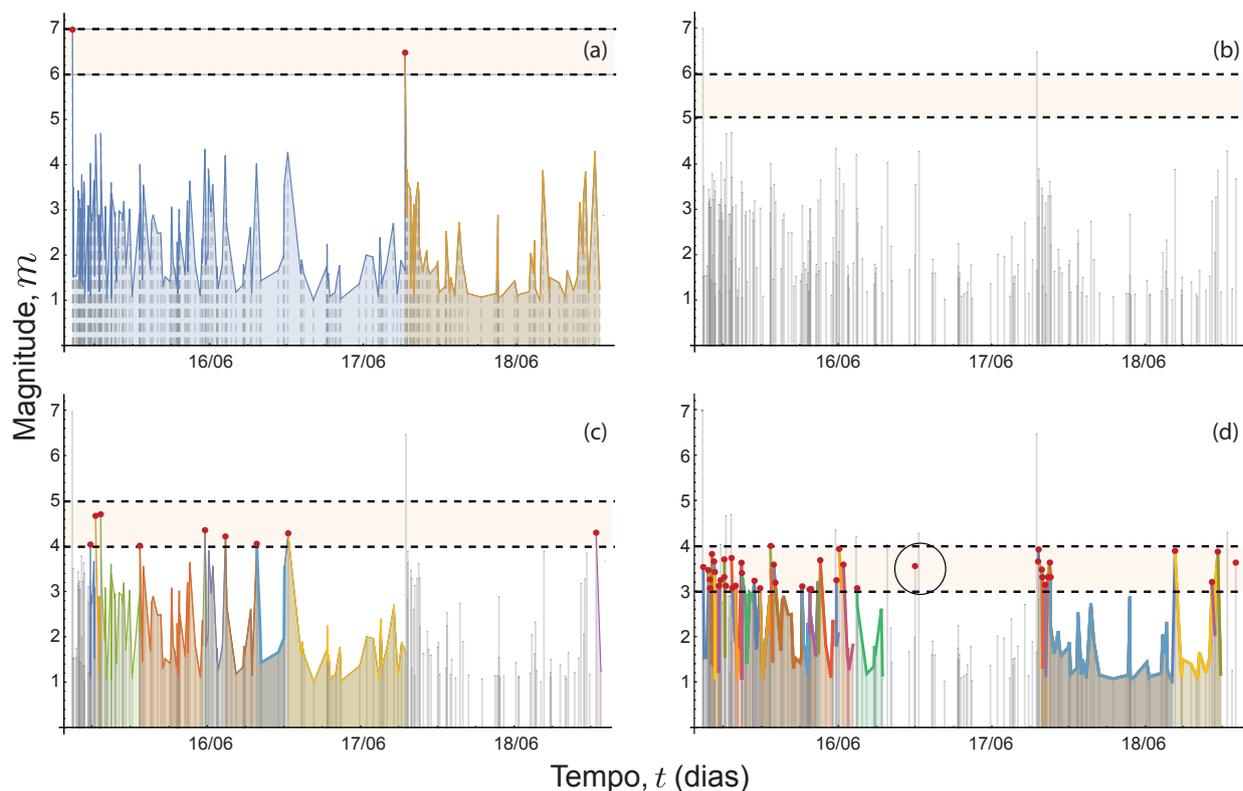


Figura 1.5: Ilustração da seleção de *aftershocks* referente à Lei de Omori. Todas as figuras representam 221 terremotos da falha de San Andreas ocorridos entre 15/06/2005 e 18/06/2005. (a) Mostra a seleção dos *aftershocks* desencadeados pelos eventos (*mainshocks*) com magnitude dentro da janela de seleção, nesse caso, entre 6 e 7 graus na escala Richter. Observamos duas seqüências de *aftershocks*: a primeira com 220 eventos (curva azul) e a segunda 64 eventos (curva alaranjada). (b) Mostra a seleção de *aftershocks* para a janela de magnitude entre 5 e 6 graus, nesse caso, nenhuma seqüência é observada. (c) Mostra as 9 seqüências de *aftershocks* para a janela de magnitude entre 4 e 5 graus. (d) Mostra um conjunto de 40 seqüências de *aftershocks* para a janela de magnitude entre 3 e 4 graus. Notamos que podem ocorrer seqüências de *aftershocks* com comprimento nulo, como a indicada pelo círculo. Na prática, costumamos selecionar apenas seqüências maiores que um certo comprimento (usualmente 5).

sentando o tempo até o *mainshock*. Isso indica que essas seqüências podem ser consideradas como reversíveis no tempo, ou seja, se a série dos eventos sísmicos for analisada invertida temporalmente, o mesmo padrão para as seqüências de *aftershocks* será observado.

1.3 Leis sobre o tempo entre eventos

Nas seções anteriores, apresentamos as leis de Gutenberg-Richter e Omori. Vimos que a Lei Gutenberg-Richter descreve a distribuição de probabilidade das magnitudes dos terremotos e, portanto, não diz nada sobre a dinâmica temporal desses eventos. Por outro lado, a Lei de Omori, apesar de ser uma lei sobre a dinâmica dos *aftershocks*, não discute diretamente como os terremotos estão distribuídos ao longo do tempo. Uma maneira de investigar essa questão é analisar a distribuição de probabilidade dos tempos entre terremotos.

Nesse contexto, a abordagem mais comum (devida a Alvaro Corral e colaboradores [58]) consiste em dividir o globo terrestre em janelas espaciais e, para cada uma dessas janelas, obter uma série temporal das magnitudes dos terremotos. Vamos denotar por $m_{xy}(t_i)$ uma dessas séries temporais de magnitudes, em que o subscrito xy refere-se à localização espacial da série temporal e t_i o tempo de ocorrência do i -ésimo evento (de um total de N). Para cada uma dessas séries temporais, consideramos um limiar de magnitude m_{\min} e selecionamos os eventos maiores ou iguais a m_{\min} , isto é, todos os elementos da série temporal para os quais a condição $m_{xy}(t_i) \geq m_{\min}$ é satisfeita. Finalmente, para essa série temporal, definimos os tempos entre eventos de magnitude superior a m_{\min} como

$$\tau_i = t_{i+1} - t_i, \quad (1.12)$$

com $i = 1, 2, \dots, N(m_{\min}) - 1$ e $N(m_{\min})$ sendo o número de eventos da série temporal que satisfazem a condição $m_{xy}(t_i) \geq m_{\min}$. Os tempos entre eventos também são chamados de tempos de retorno, intervalos de recorrência ou tempos de recorrência. É importante notar que não estamos misturando diferentes janelas espaciais nessa análise, ainda que elas sejam grandes (por exemplo, todo o globo) ou pequenas (como um pequeno intervalo de latitude e longitude), os τ_i são relacionados apenas a uma região particular.

Para compreendermos melhor esse conceito, consideremos a ilustração da figura 1.6. Nessa figura, as linhas verticais indicam as magnitudes de uma hipotética série temporal $m_{xy}(t_i)$ e as duas linhas horizontais representam dois valores para m_{\min} . Da maneira como está representado, vemos que os tempos entre eventos podem ser pensados como os comprimentos (medidos na horizontal) das interseções entre as linhas verticais e horizontais, conforme está indicado pelas setas.

Naturalmente, devido às características da série temporal $m_{xy}(t_i)$, ao aumentarmos o limiar m_{\min} , esperamos que os tempos entre eventos sejam (em média) cada vez maiores. Assim, é intuitivo supor que a distribuição de probabilidade $P(\tau)$ dos valores de τ_i dependa da magnitude limiar m_{\min} . De fato, isso é o que acontece com dados reais. Na figura 1.7, mostramos a distribuição dos tempos entre eventos para um catálogo mundial de terremotos que foi estudado por Corral [59]. Claramente, podemos observar que a distribuição $P(\tau)$ se desloca para valores maiores de τ conforme o limiar m_{\min} aumenta. Entretanto, a forma da distribuição parece não mudar muito.

O fato da forma da distribuição $P(\tau)$ não variar muito sugere a possibilidade de que, talvez, elas pertençam a uma mesma classe. Para deixar mais claro esse ponto, podemos imaginar o caso da distribuição gaussiana. Várias quantidades são distribuídas normalmente, cada uma podendo apresentar sua média e desvio padrão característicos; entretanto, todas elas são descritas por uma mesma função. Mais do que isso, é possível fazer uma operação de reescala (subtrair a média e dividir pelo desvio padrão), de modo que todas as distribuições sejam descritas por uma única função (a gaussiana padrão), isto é, as distribuições colapsam numa mesma curva.

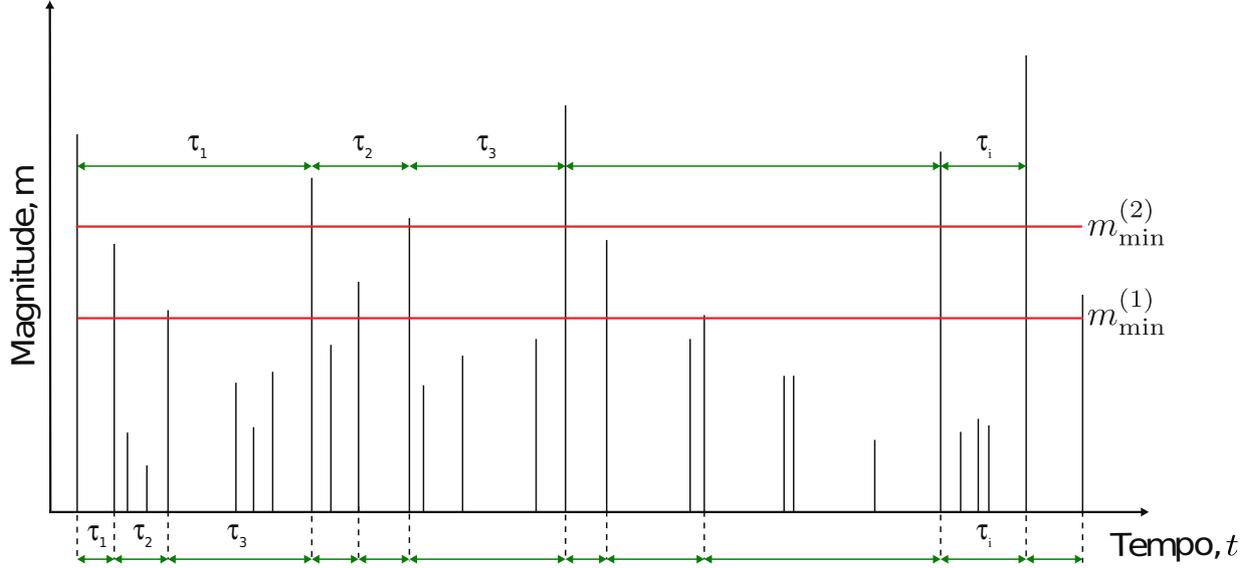


Figura 1.6: Ilustração da definição da série dos tempos entre eventos. As barras verticais mostram uma hipotética série temporal de magnitudes de terremotos e as linhas vermelhas horizontais indicam duas magnitudes limiares ($m_{\min}^{(1)}$ e $m_{\min}^{(2)}$). As setas horizontais em verde representam os tempos entre eventos para as duas magnitudes limiares.

Retomando o caso dos terremotos, se considerarmos a variável reescalada $\tau' = \langle r \rangle \tau$, com $\langle r \rangle$ sendo a taxa média de eventos sísmicos (número de eventos por unidade de tempo) numa dada região e para um limiar m_{\min} , a distribuição de probabilidade $P(\tau')$ se torna independente de m_{\min} [58–61]. Esse resultado mostra que deve haver uma função $f(\dots)$, tal que

$$P(\tau) = \langle r \rangle f(\langle r \rangle \tau), \quad (1.13)$$

sendo essa função muitas vezes chamada de função escala (*scaling function*). Similarmente, podemos pensar que as curvas mostradas na figura 1.7a devem colapsar sobre uma única curva ao reescalar o eixo x como $\langle r \rangle \tau$ e o eixo y como $P(\tau)/\langle r \rangle$. A figura 1.7b mostra essa análise, em que notamos um bom colapso das distribuições.

A forma empírica das distribuições colapsadas costuma ser bem descrita por uma distribuição gama [58], isto é,

$$f(\tau') = \frac{1}{a^\gamma \Gamma(\gamma)} (\tau')^{\gamma-1} \exp(-\tau'/a), \quad (1.14)$$

sendo γ e a parâmetros de ajuste, e $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty y^{\gamma-1} \exp(-y) dy$ a função gama. Observamos que a distribuição gama pode ser pensada como uma lei de potência (com expoente $\gamma - 1$) seguida por um *cutoff* exponencial. Na figura 1.7b, a linha contínua mostra o melhor ajuste dessa distribuição aos dados, com $\gamma = 0,7$ e $a = 1,4$. Conforme podemos observar, o acordo entre a distribuição gama e os dados empíricos é muito bom.

Resultados similares também são observados para outros catálogos de terremotos de diversas regiões do mundo. Na figura 1.8, mostramos um outro estudo [61] para o qual a

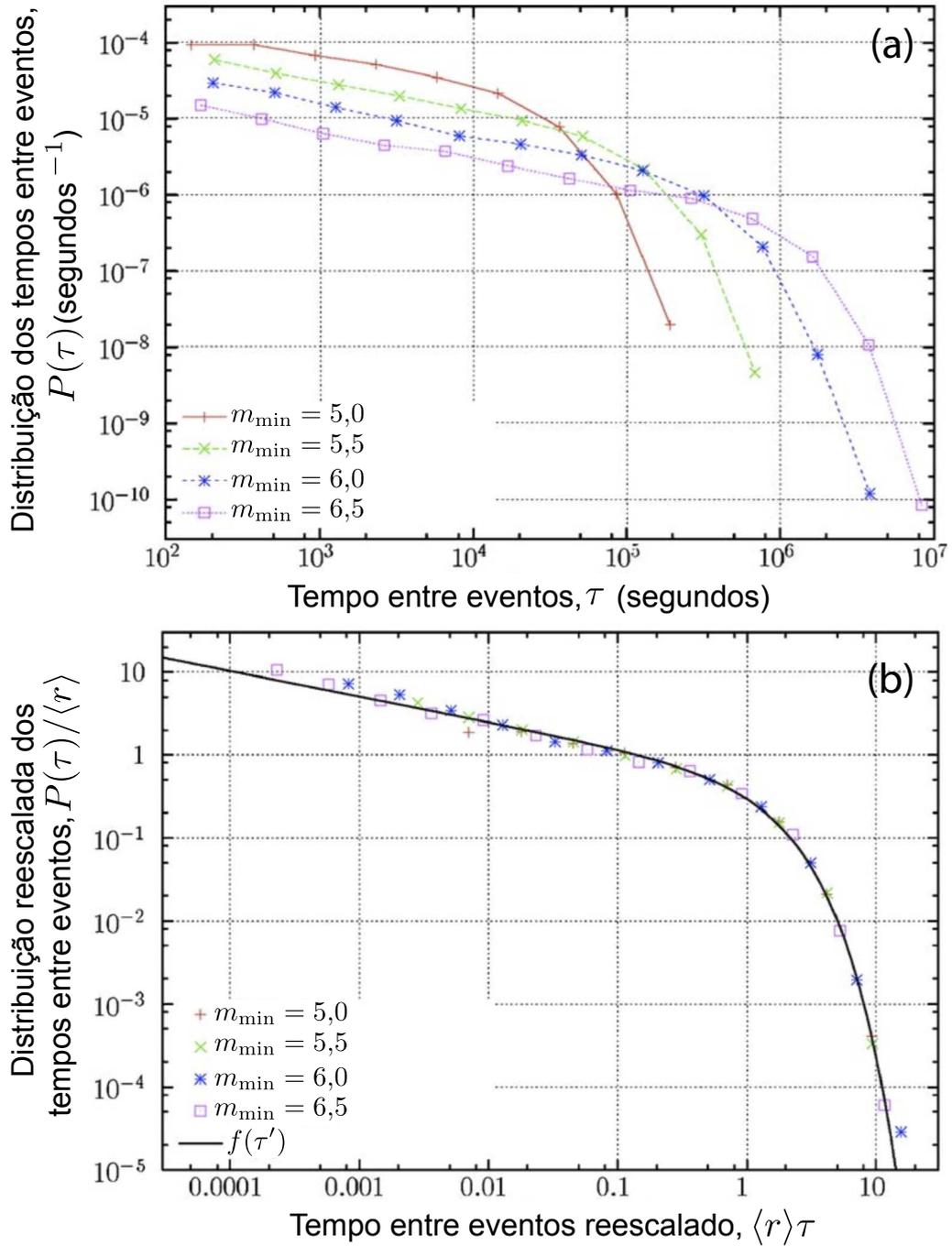


Figura 1.7: (a) Distribuições de probabilidade dos tempos entre eventos para o catálogo mundial de terremotos NEIC (mantido pelo *National Earthquake Information Center*) no período de 1973 a 2002 (30 anos). Cada curva é uma distribuição para as magnitudes limiares $m_{\min} = 5,0$, $m_{\min} = 5,5$, $m_{\min} = 6,0$ e $m_{\min} = 6,5$. (b) As mesmas distribuições após a operação de escala, isto é, $P(\tau)/\langle r \rangle$ versus $\langle r \rangle \tau$. A linha contínua mostra o melhor ajuste da distribuição gama (equação 1.14) com parâmetros $\gamma = 0,7$ e $a = 1,4$. Adaptado da referência [59].

distribuição dos tempos entre eventos reescalada foi obtida para 6 catálogos distintos de terremotos (incluindo o catálogo mundial mostrado na figura 1.7). Em todos esses casos, observamos um bom colapso das distribuições e também um bom acordo com a distribuição gama da equação 1.14 com os mesmos parâmetros ($\gamma = 0,7$ e $a = 1,4$).

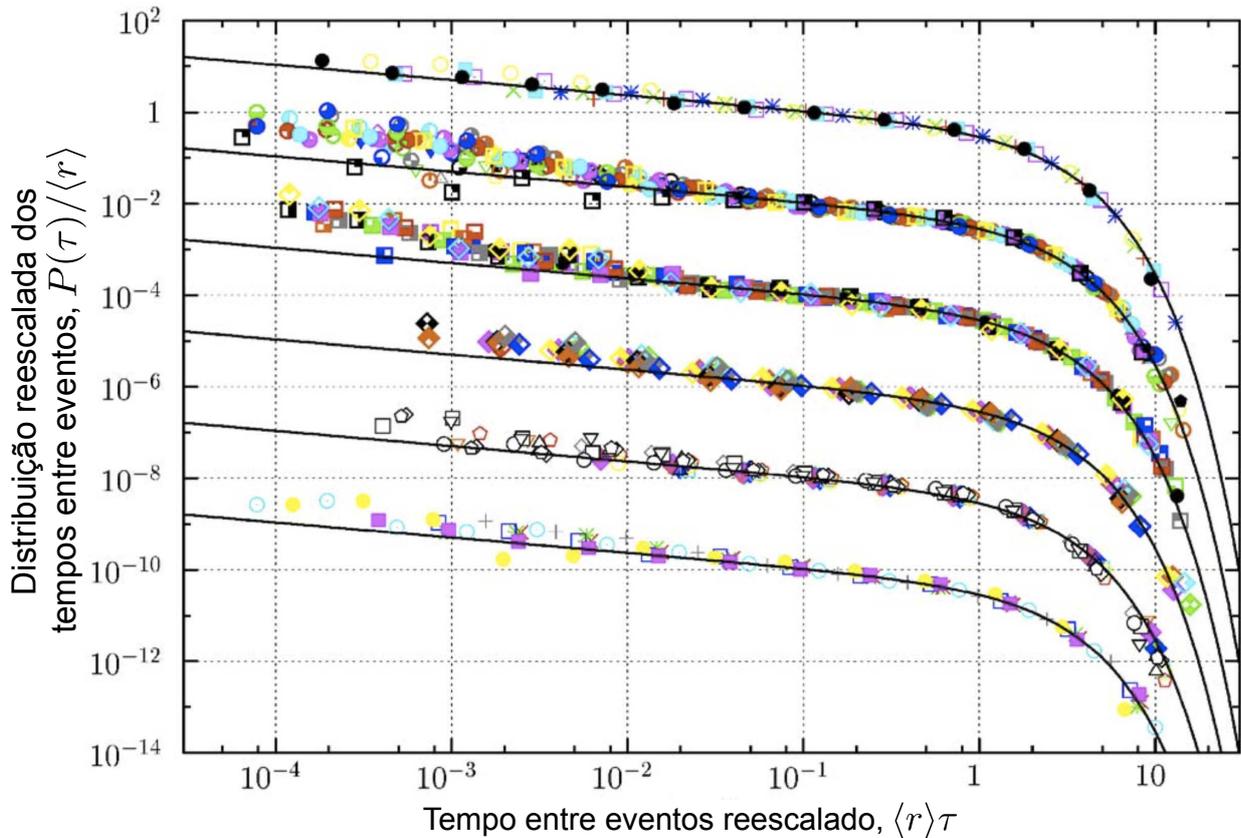


Figura 1.8: Distribuições de probabilidade reescaladas dos tempos entre eventos para seis conjuntos de dados. Temos, do topo à base da figura: catálogo mundial NEIC no período de 1973 a 2002; catálogo mundial NEIC no período de 1973 a 2002 e dividido em regiões espaciais de 90° de latitude por 90° de longitude; catálogo do Sul da Califórnia para os períodos de 1984 a 1991 e 1995 a 1998; catálogo do Norte da Califórnia para o período de 1998 a 2002; catálogo do Japão para o período de 1995 a 1998 e Nova Zelândia para o período 1996 a 2001; e, finalmente, catálogos da Espanha (de 1993 a 1997), Nova Madri (de 1975 a 2002) e Grã Bretanha (de 1991 a 2001). As distribuições foram deslocadas verticalmente para melhor visualização. As linhas contínuas mostram a distribuição gama (equação 1.14), todas com parâmetros $\gamma = 0,7$ e $a = 1,4$. Adaptado da referência [61].

A aparente universalidade desses resultados esconde, entretanto, um detalhe muito importante. De fato, sobre os resultados mencionados até agora, omitimos que a taxa de atividade sísmica $\langle r \rangle$ deve ser aproximadamente constante para que a distribuição gama represente bem os tempos entre eventos reescalados. No caso do catálogo mundial, a taxa de atividade sísmica é bem próxima de um valor constante, já para outros catálogos, como os do Norte e Sul da Califórnia (EUA), essa taxa é reconhecidamente não estacionária. A figura 1.9 mostra a fração acumulada de terremotos (isto é, número de eventos dividido pelo número total) em função do tempo para o caso do catálogo mundial e para o Sul da Califór-

nia. Observamos que, para o caso mundial, essa fração aumenta como uma função linear do tempo, enquanto para o Sul da Califórnia, a fração apresenta variações abruptas no tempo.

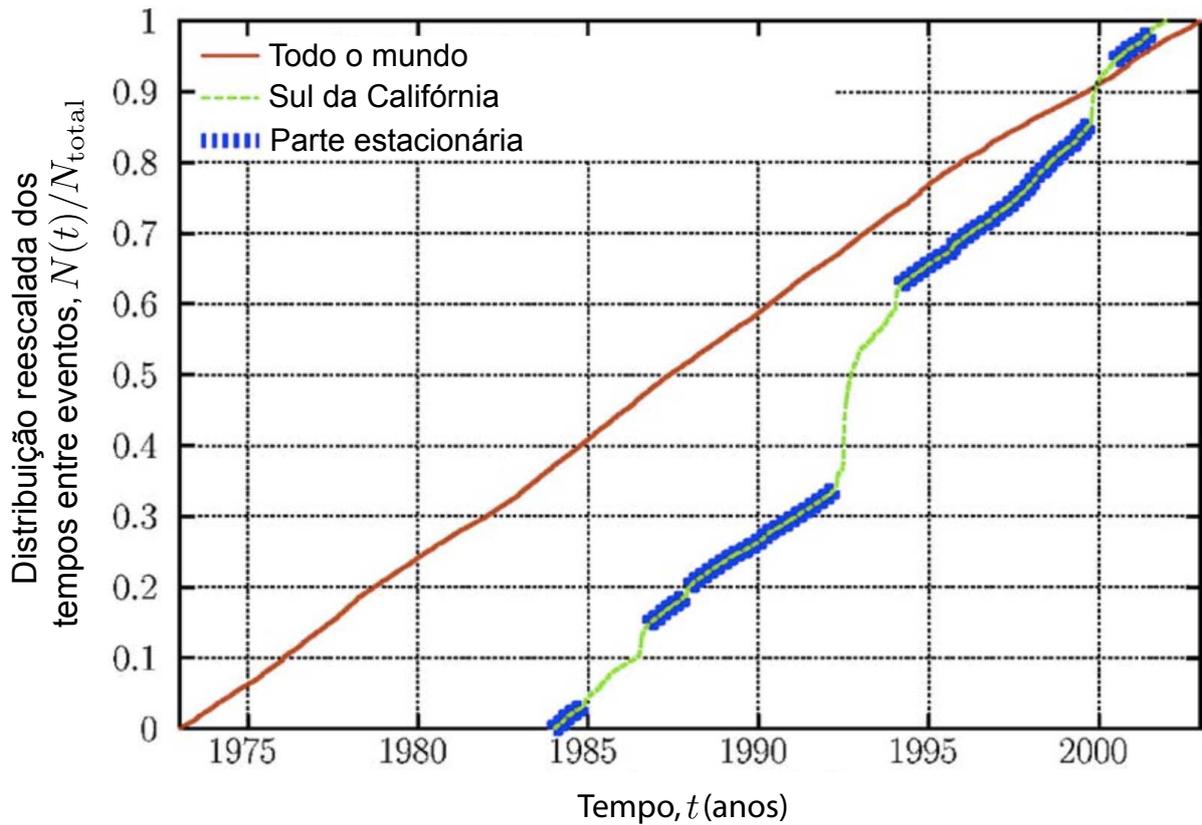


Figura 1.9: Fração acumulada de terremotos em função do tempo, isto é, número de terremotos $N(t)$ ocorridos até o tempo t , dividido pelo número total de eventos N_{total} em todo o período considerado. A linha vermelha mostra os dados para o catálogo mundial NEIC (considerando apenas magnitudes maiores que 5) e a linha verde para o catálogo do Sul da Califórnia (para magnitudes superiores a 2). O comportamento aproximadamente linear observado para a evolução de $N(t)/N_{total}$, no caso do catálogo mundial, indica que a taxa de ocorrência de terremotos é aproximadamente constante. Em contraste, para o Sul da Califórnia, observamos um comportamento global não linear para a evolução de $N(t)/N_{total}$, o que indica que a taxa de ocorrência de terremotos não é constante. Entretanto, podemos encontrar períodos de tempo no qual $N(t)/N_{total}$ se comporta aproximadamente de maneira linear e, conseqüentemente, a taxa de ocorrência é aproximadamente constante ao longo desses períodos. As regiões em azul indicam esses períodos. Adaptado da referência [59].

Assim, uma vez que a taxa $\langle r \rangle$ é a derivada dessa fração, seu valor é muito próximo de uma constante para o catálogo mundial e vai depender do tempo para o Sul da Califórnia. Entretanto, mesmo para casos não estacionários como o do Sul da Califórnia, é possível definir intervalos de tempo para os quais o valor de $\langle r \rangle$ seja aproximadamente constante. Esses períodos estacionários estão indicados por marcas azuis na figura 1.9 para o caso do Sul da Califórnia. Além disso, as análises dos tempos entre eventos mostradas na figura 1.8 levam em conta apenas esses períodos, justificando o bom acordo com a distribuição gama. Similarmente, para os outros catálogos mostrados na figura 1.8, apenas períodos nos quais

$\langle r \rangle$ é aproximadamente constante foram considerados.

Uma vez que as taxas de atividade sísmica não são constantes para a maioria dos catálogos de terremotos, o que acontece se calcularmos os tempos entre eventos incluindo períodos nos quais essas quantidades não são estacionárias? Para responder essa pergunta, Corral [59] analisou os tempos entre eventos para terremotos do catálogo do Sul da Califórnia que ocorreram entre os anos de 1984 e 2001. Já vimos na figura 1.9 que os valores de $\langle r \rangle$ não são constantes ao longo desse período. Entretanto, ainda é possível definir o seu valor médio e tentar aplicar o mesmo procedimento usado para os períodos nos quais a taxa $\langle r \rangle$ é estacionária. A figura 1.10 mostra essa análise. Observamos que um bom colapso é novamente obtido. Porém, o valor do expoente $\gamma = 0,2$ que ajusta esses dados é muito menor que o obtido no caso estacionário (para o qual $\gamma = 0,7$). Similarmente, ao levar em conta períodos não estacionários, obtemos valores muito próximos de zero para o expoente γ em outros catálogos.

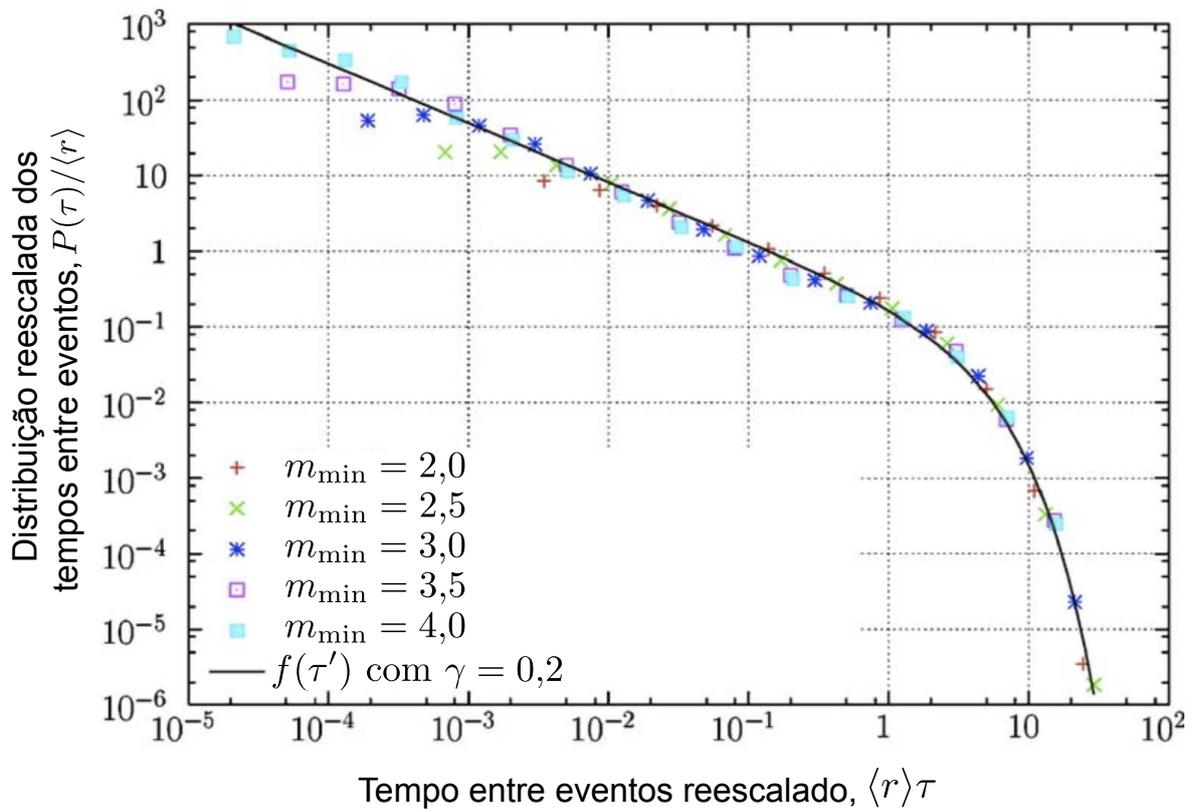


Figura 1.10: Distribuições de probabilidade reescaladas dos tempos entre eventos para o catálogo do Sul da Califórnia no período de 1984 a 2001 e para diferentes limiares de magnitude m_{\min} (indicados na figura). Vale observar que a taxa de ocorrência de terremotos não é constante ao longo do período considerado. Observamos, ainda assim, um bom colapso dos dados sobre uma única curva. Isso indica que a lei de escala é válida para períodos não estacionários, embora os parâmetros da distribuição gama sejam diferentes dos casos estacionários. A linha contínua mostra a distribuição gama (equação 1.14) ajustada aos dados com $\gamma = 0,2$ e $a = 1,0$. Adaptado da referência [59].

O fato de $\gamma \approx 0$ mostra que a distribuição reescalada dos tempos entre eventos decai

(inicialmente) como uma lei de potência com expoente próximo da unidade, isto é,

$$P(\tau') \sim (1/\tau') \exp(-\tau'), \quad (1.15)$$

um comportamento que lembra o obtido para Lei de Omori. De fato, para o caso dos dados mostrados na figura 1.10, é conhecido que vários terremotos de grande magnitude ocorreram ao longo do período selecionado, favorecendo o aumento da taxa de atividade sísmica e conduzindo o sistema para um estado não estacionário. Vale lembrar que esses grandes terremotos desencadeiam muitos outros menores, daí seguem o aumento na atividade sísmica e a quebra da estacionariedade.

Nesse contexto, supondo que taxa de atividade sísmica seja influenciada apenas pela Lei de Omori (ou seja, analisando os tempos entre eventos dentro de uma única sequência de *aftershocks*), é possível mostrar que [58]

$$P(\tau') \sim \frac{1}{(\tau')^{2-1/p}} \quad (1.16)$$

para tempos τ' pequenos (comparados ao comprimento da sequência de *aftershocks*). Aqui, p é o expoente da Lei de Omori (equação 1.11). Assim, comparando esse resultado com o da equação 1.14, percebemos que $\gamma = 1/p - 1$, um resultado que concorda com o fato de γ ser próximo de zero ao considerar regimes não estacionários; pois, conforme já vimos, $p \approx 1$.

Ainda sobre o caso não estacionário, podemos reescalar os tempos entre eventos de uma outra maneira. Especificamente, podemos definir a taxa (aproximadamente) instantânea de atividade sísmica $r(t, m_{\min})$ como sendo o número de eventos de magnitude superior a m_{\min} ocorridos dentro de uma janela temporal, dividido pelo total de eventos. Essa mesma quantidade pode também ser obtida estimando a derivada do número acumulado de eventos em função do tempo, isto é, a derivada das curvas mostradas na figura 1.9. Usando essa taxa instantânea, podemos fazer uma operação de reescala local nos tempos entre eventos, isto é,

$$\tau'_i = r(t_i, m_{\min})\tau_i, \quad (1.17)$$

e calcular novamente a distribuição de probabilidade dos τ'_i para diferentes valores de m_{\min} .

A figura 1.11 mostra uma análise como essa (feita por Corral [58]) para os tempos entre eventos ocorridos após um grande terremoto (terremoto de Landers, de magnitude 7,3 que ocorreu em junho de 1992) do catálogo do Sul da Califórnia. Em seu trabalho, Corral ainda considerou três diferentes janelas espaciais. Na figura 1.11a, temos a taxa instantânea de eventos $r(t, m_{\min})$, a qual é dominada pela ocorrência de *aftershocks* e decai como uma lei de potência com expoente próximo da unidade (isto é, essencialmente a Lei de Omori) em todas as janelas espaciais. Já na figura 1.11b, temos os tempos entre eventos reescalados por meio da expressão 1.17. Observamos, novamente, um bom colapso dos dados e que a distribuição gama (equação 1.14) descreve muito bem a distribuição empírica de τ'_i , com parâmetros $\gamma = 0,70$ e $a = 1,38$ muito próximos daqueles obtidos para o caso estacionário (figura 1.8).

Por essa razão, essa descrição dos tempos entre eventos é, muitas vezes, chamada de lei (local) universal para tempos entre eventos.

Conforme dissemos no início de nossa discussão, a abordagem de Corral não leva em conta misturas de tempos entre eventos calculados em diferentes regiões espaciais. Entretanto, essa proposta foi considerada por Per Bak e colaboradores [9, 50] cronologicamente antes dos trabalhos de Corral e colaboradores. Nessa abordagem, calculam-se os tempos entre eventos τ_i em cada região espacial ($n(L)$ regiões espaciais de tamanho $L \times L$) do mesmo modo como fizemos anteriormente. Porém, diferentemente do caso anterior, agregamos os valores de τ_i para todas regiões espaciais em consideração e calculamos a distribuição de probabilidade $P(\tau)$ dos τ_i . Em contraste com as distribuições de probabilidade anteriores, notamos que essa distribuição deve ser considerada global. Per Bak e colaboradores [50] propuseram que essa distribuição $P(\tau)$ (que depende de L e m_{\min}) pode ser reescalada como

$$P(\tau) = \langle r \rangle_L G(\langle r \rangle_L \tau), \quad (1.18)$$

sendo $G(\dots)$ a função escala e $\langle r \rangle_L$ o valor médio da taxa de atividade sísmica calculado sobre as $n(L)$ regiões espaciais. A figura 1.12 mostra as distribuições dos intervalos de tempo reescaladas (para diferentes L e m_{\min}) calculadas para vários catálogos de terremotos. Observamos que o colapso das distribuições é muito bom e que a forma das distribuições de probabilidade apresentam dois comportamentos lei de potência. Para tempos reescalados $\tau' = \langle r \rangle_L \tau$ menores que a unidade, temos um comportamento lei de potência com um expoente próximo da unidade, isto é, $G(\tau') \sim (\tau')^{-1}$. Já para $\tau' > 1$, temos um decaimento lei de potência mais rápido com um expoente próximo de 2,2, isto é, $G(\tau') \sim (\tau')^{-2,2}$. Essa descrição é chamada de lei unificada para o tempo entre eventos.

1.4 Lei de Produtividade e Lei de Båth

No contexto das sequências de *aftershocks*, além da Lei de Omori, existem ainda outras duas leis importantes. Nominalmente, a Lei de Produtividade e a Lei de Båth, as quais passaremos a discutir.

A Lei de Produtividade responde a seguinte pergunta: quantos *aftershocks* um *mainshock* desencadeia? É natural esperar que essa resposta dependa da magnitude do *mainshock*, isto é, esperamos que grandes *mainshocks* produzam mais *aftershocks* do que terremotos de magnitude menor. Esse aspecto das sequências de *aftershocks* foi investigado desde o final dos anos 60 por muitos pesquisadores [57, 62–75]. Entretanto, a resposta definitiva foi dada por Agnès Helmstetter [76] em um artigo relativamente recente, publicado em 2003. A resposta de Helmstetter pode ser expressa da seguinte maneira

$$N_a(m_{\text{ms}}) \propto 10^{\alpha m_{\text{ms}}}, \quad (1.19)$$

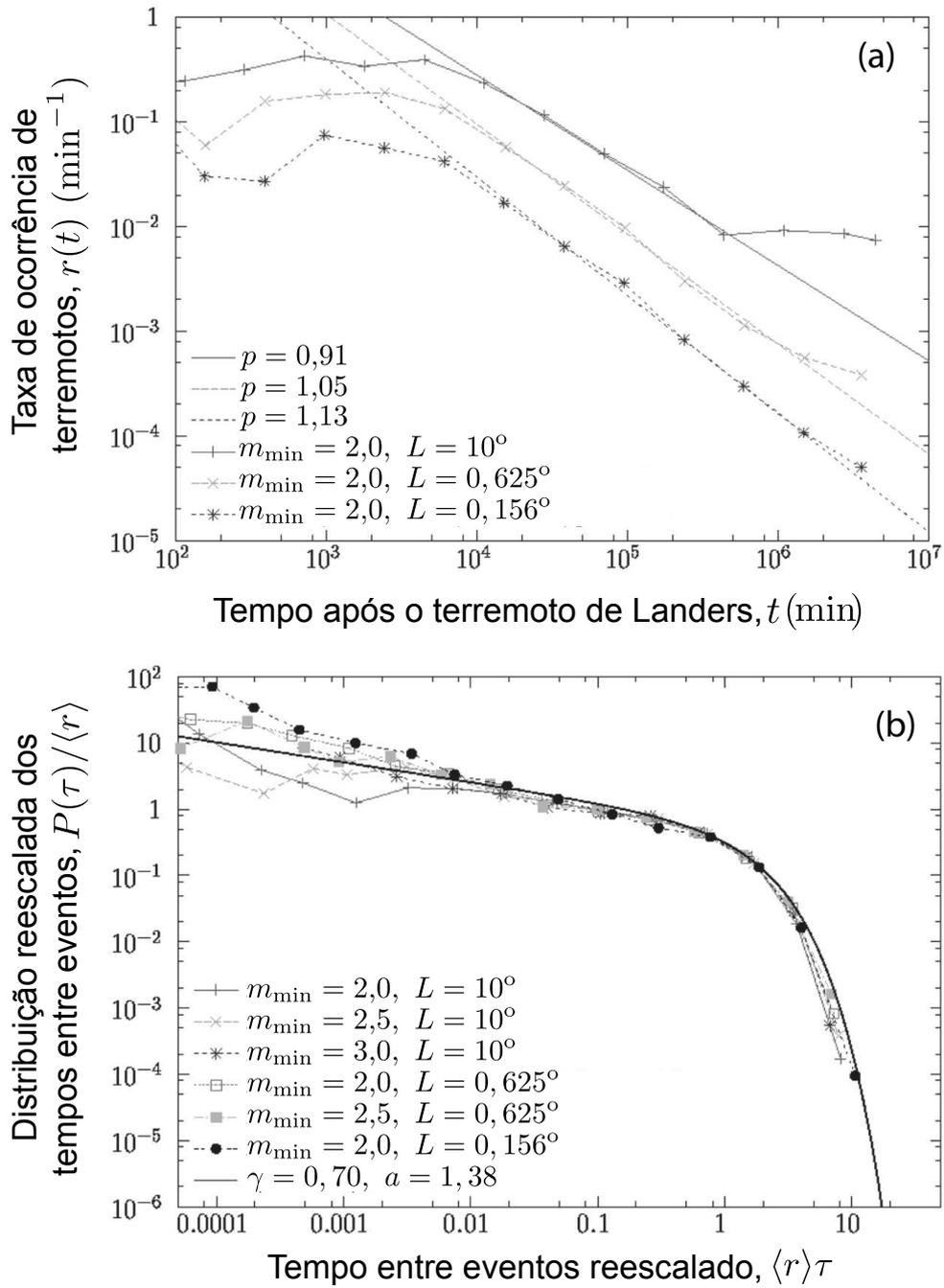


Figura 1.11: (a) Taxa de ocorrência de terremotos após o terremoto de Landers (de magnitude 7,3 que ocorreu em junho de 1992 na cidade de Landers no Sul da Califórnia). Nessa análise, apenas terremotos de magnitude superior a 2 foram considerados. As diferentes curvas representam diferentes regiões espaciais de tamanho $L \times L$ (latitude e longitude), conforme indicado no gráfico. As linhas tracejadas indicam o comportamento lei de potência previsto pela Lei de Omori (os valores de p são mostrados na figura). (b) Distribuições de probabilidade dos tempos entre eventos após o terremoto de Landers reescaladas pela taxa instantânea $r(t)$. As diferentes curvas estão relacionadas aos tamanhos das regiões espaciais e às magnitudes limiares m_{\min} . A linha contínua mostra a distribuição gama (equação 1.14) com os mesmos parâmetros obtidos no caso estacionário (figura 1.8), isto é, $\gamma = 0,70$ e $a = 1,38$. Adaptado da referência [58].

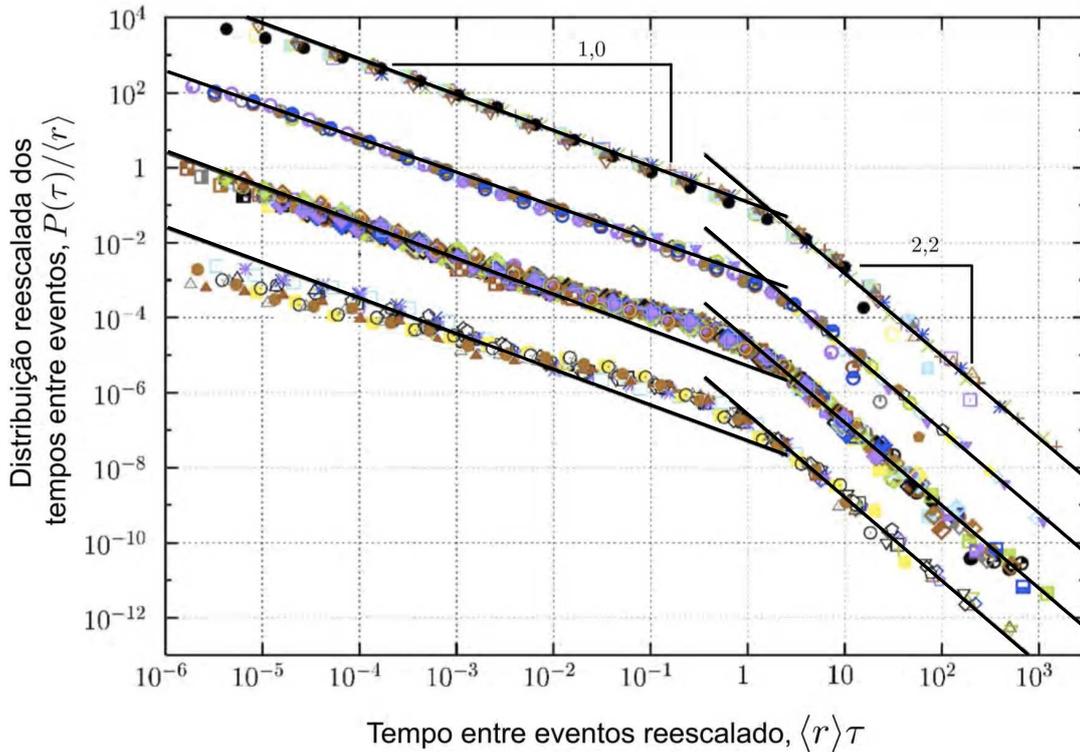


Figura 1.12: Distribuições de probabilidade reescaladas (pelo procedimento da equação 1.18) dos tempos entre eventos. Temos, do topo à base da figura: catálogo do Sul da Califórnia (de 1988 a 2001); catálogo do Norte da Califórnia (de 1985 a 2003); catálogos do Sul da Califórnia (de 1988 a 1991), NEIC mundial (de 1973 a 2002), Japão (de 1995 a 1998) e Espanha (de 1993 a 1997); e catálogos da Nova Zelândia e Nova Madri (de 1975 a 2002). As curvas foram deslocadas verticalmente para melhor visualização. As linhas contínuas indicam comportamentos lei de potência com expoentes indicados no gráfico. Nessa análise, os tamanhos L das regiões espaciais variam de $0,039^\circ$ a 45° e as magnitudes limiares variam no intervalo $1,5 \leq m_{\min} \leq 6,0$. Adaptado da referência [61].

na qual $N_a(m_{\text{ms}})$ é o número de *aftershocks* desencadeados por um *mainshock* de magnitude m_{ms} e α é o chamado expoente de produtividade. O valor de α calculado para terremotos costuma variar entre 0,7 e 0,9 [76].

Uma maneira de caracterizar a Lei de Produtividade em catálogos de terremotos é empregar as definições de *mainshocks* e *aftershocks* usadas na Lei de Omori (seção 1.2). Assim, teremos várias sequências de *aftershocks* e seus respectivos *mainshocks*. Usando esses dados, podemos estabelecer a relação entre $\log N_a(m_{\text{ms}})$ e m_{ms} . Em um gráfico como esse, esperamos encontrar um comportamento médio aproximadamente linear, cuja inclinação da reta ajustada aos dados seja numericamente igual ao expoente α . A figura 1.13 mostra uma análise desse tipo para dados de um catálogo de terremotos da Grécia. Para esse caso, o expoente de produtividade encontrado é próximo de 0,9, conforme indicado na figura.

Ainda sobre as sequências de *aftershocks*, vamos descrever a Lei de Båth, que data de 1965 e é devida a Markus Båth [77]. Para tal, consideramos uma sequência de *aftershocks* $m_a(t_i)$ desencadeada por um *mainshock* m_{ms} . Denotamos ainda por m_{la} a magnitude do maior *aftershock* da sequência e $\Delta m = m_{\text{ms}} - m_{\text{la}}$ a diferença entre as magnitudes do *mainshock* e

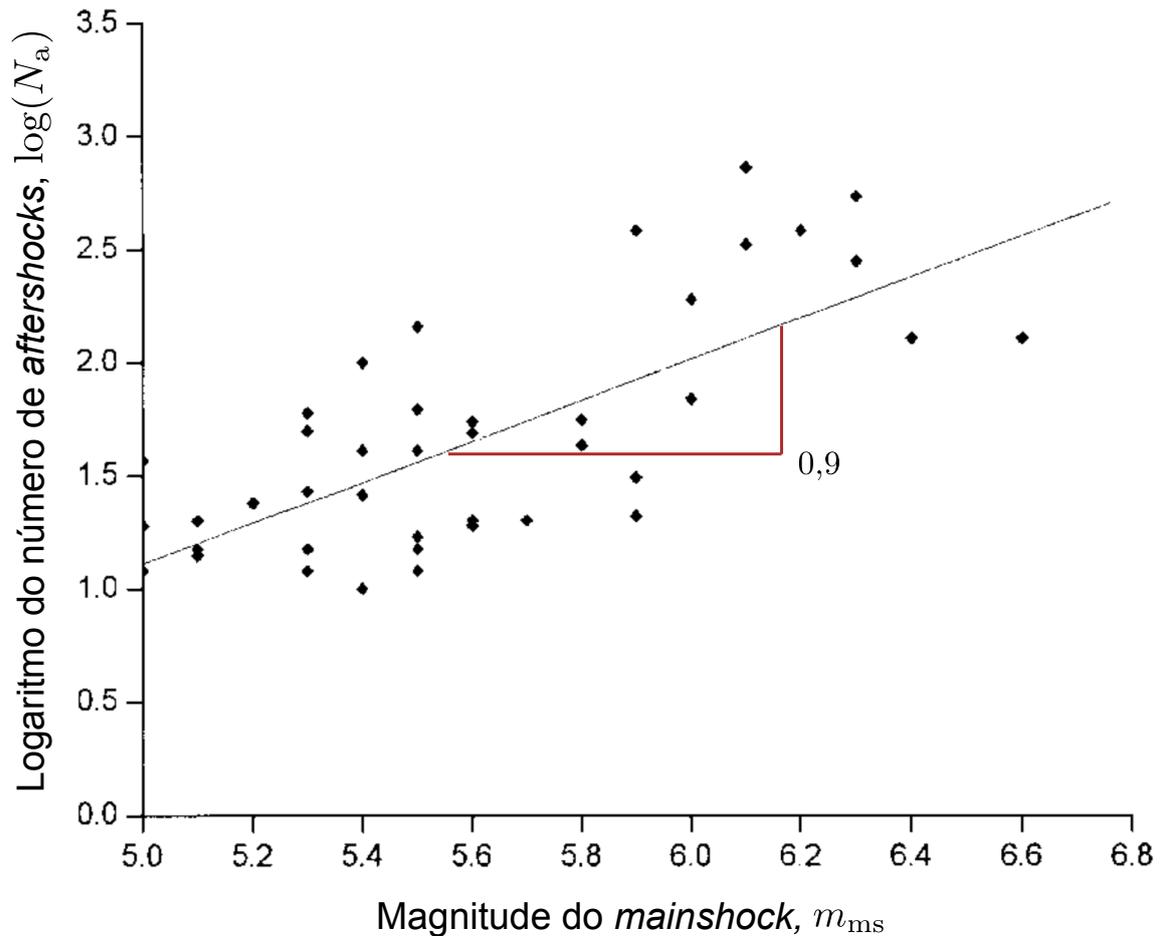


Figura 1.13: Relação entre o número de *aftershocks* $N_a(m_{ms})$ e magnitude m_{ms} dos *mainshocks* desencadeadores. Cada ponto representa uma sequência de *aftershocks* obtida para um catálogo de terremotos da Grécia, no período de 1971 a 1997. A linha contínua é um ajuste linear, cuja inclinação é $\alpha = 0,9$. Adaptado da referência [73].

do maior *aftershock*. Nessa notação, podemos expressar a Lei de Bâth como

$$\langle \Delta m \rangle \approx 1,2, \quad (1.20)$$

sendo que $\langle \dots \rangle$ representa o valor esperado sobre um conjunto grande de sequências de *aftershocks*. Assim, a Lei de Bâth afirma que a diferença entre a magnitude de um *mainshock* e a magnitude do maior *aftershock* desencadeado é, em média, próxima de 1,2 e independente da magnitude do *mainshock* desencadeador.

Uma maneira de analisar a Lei de Bâth em dados reais é, novamente, empregar as definições de *mainshocks* e *aftershocks* usadas na Lei de Omori e, para cada sequência de *aftershocks*, calcular a diferença Δm . Usando esses resultados, podemos construir um gráfico de Δm em função de m_{ms} , conforme mostrado na figura 1.14. Nessa figura, Shcherbakov e colaboradores [78] analisaram as sequências de *aftershocks* produzidos por setenta terremotos de grande magnitude ao redor do mundo, reportando o valor de Δm para cada uma delas. Podemos observar que Δm varia bastante (de muito próximo de zero a mais do que

dois) e que nenhuma dependência clara com m_{ms} é observada. Apesar da grande variação dos valores de Δm , seu valor médio sobre todos os *mainshocks* é $\langle \Delta m \rangle = 1,11$, ou seja, um valor próximo ao previsto pela Lei de Bâth (equação 1.20).

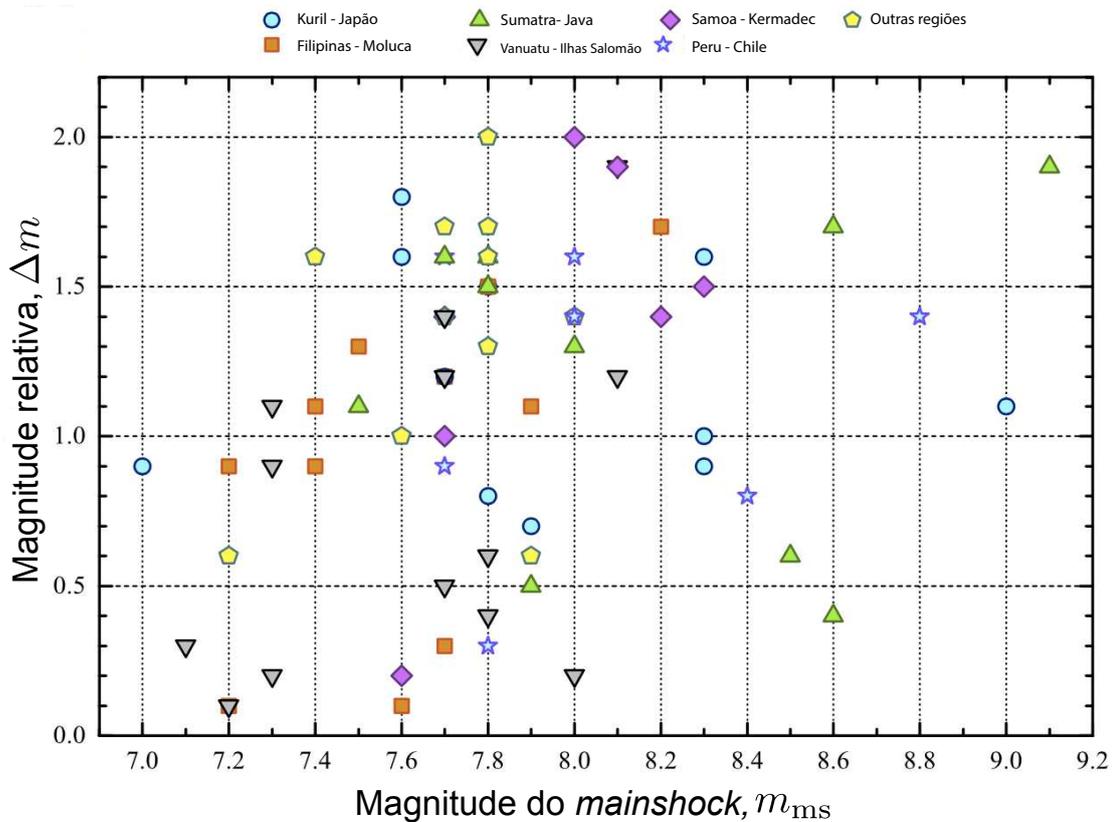


Figura 1.14: Diferença Δm entre a magnitude de um *mainshock* e a magnitude do maior *aftershock* desencadeado em função da magnitude do *mainshock* m_{ms} . Cada um dos setenta pontos está relacionado a uma sequência de *aftershocks* produzida por um grande terremoto ao redor do mundo. Os diferentes tipos de ponto indicam as regiões do mundo, conforme mostrado no gráfico. Adaptado da referência [78].

Uma outra possibilidade para investigar a Lei de Bâth é calcular Δm para as sequências de *aftershocks* e, em seguida, calcular a distribuição de probabilidade dos valores de Δm . A figura 1.15 mostra uma análise como essa para dados de um catálogo de terremotos da Grécia que cobrem o período de 1971 a 1997. Observamos que os valores de Δm estão entre 0,2 e 1,8; porém, a distribuição de probabilidade tem um pico ao redor do valor 1,2 conforme previsto pela Lei de Bâth. Nesse gráfico, a linha contínua mostra uma distribuição gaussiana ajustada aos dados, a qual tem média 0,9 e desvio padrão 0,3.

Existem diversas tentativas para explicar a Lei de Bâth em termos de outras leis mais fundamentais. Uma dessas tentativas é devida a David Vere-Jones [79] e data de 1969. Numa abordagem simplificada, Vere-Jones considerou que a Lei de Bâth pode ser obtida calculando a diferença entre o primeiro e segundo maiores valores de um conjunto de muitas variáveis aleatórias (independentes) distribuídas de acordo com a Lei de Gutenberg-Richter

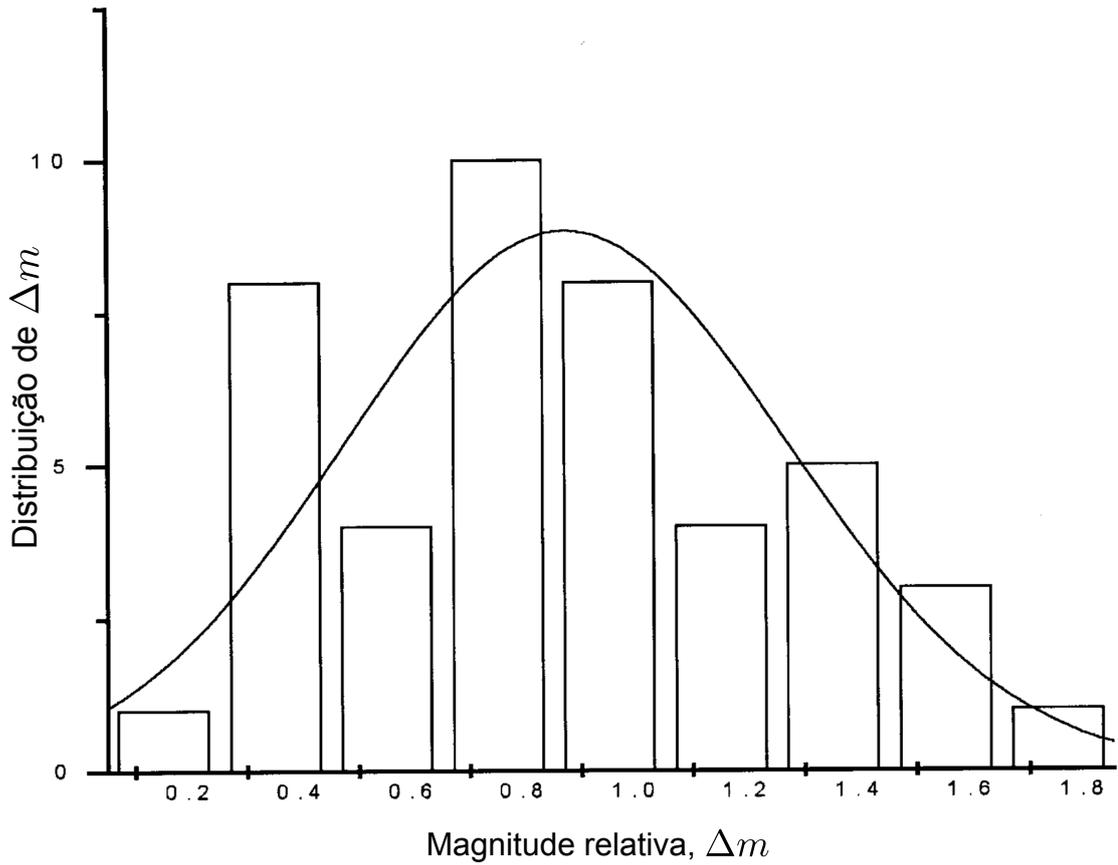


Figura 1.15: Distribuição de probabilidade dos valores de Δm calculada para um catálogo de terremotos da Grécia, no período de 1971 a 1997. A linha contínua mostra a distribuição gaussiana de média 0,9 e desvio padrão 0,3. Adaptado da referência [73].

($P(m) \sim 10^{-bm}$ ou equação 1.3). Nesse contexto, Vere-Jones obteve que

$$\langle \Delta m \rangle = \frac{1}{b \ln 10} \approx 0,43, \quad (1.21)$$

ou seja, um valor muito inferior ao esperado pela Lei de Bâth. O principal motivo dessa discrepância é que as sequências de *aftershocks* não podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes (basta lembrar da Lei de Omori – seção 1.2).

Mais recentemente, Agnès Helmstetter e Didier Sornette [80] propuseram uma explicação para a Lei de Bâth baseada no modelo ETAS (*epidemic type aftershock sequence*) [81]. Em seu trabalho, eles encontraram a expressão

$$\langle \Delta m \rangle \approx \frac{b - \alpha}{b} (m_{\text{ms}} - m^*) - \frac{1}{b} \log \left(\frac{k}{(1 - n)} \right), \quad (1.22)$$

em que b é o expoente da Lei de Gutenberg-Richter (equação 1.3), α o expoente da Lei de Produtividade (equação 1.19), m_{ms} a magnitude dos *mainshocks* desencadeadores, m^* a magnitude limiar usada para definir os *aftershocks* (seção 1.2), k é um parâmetro do modelo ETAS relacionado a produção de *aftershocks* e n outro parâmetro do modelo ETAS

(chamado de taxa de ramificação ou *branching ratio*) que representa o número médio de *aftershocks* desencadeados por terremoto. A partir desse modelo, notamos que o valor $\langle \Delta m \rangle$ é independente de m_{ms} apenas quando $b = \alpha$, o que nem sempre é verdade. De fato, normalmente $b > \alpha$ e, nesse caso, esperamos que $\langle \Delta m \rangle$ aumente com a magnitude m_{ms} dos *mainshocks*, o que costuma acontecer com dados reais (nos próximos capítulos veremos exemplos). Notamos, ainda, que esse modelo não prevê o valor 1,2 da Lei de Bâth. Por outro lado, para $b = \alpha$ esse valor pode ser obtido por meio de uma escolha conveniente dos parâmetros k e n .

Ruídos crepitantes emitidos por carvão vegetal umedecido em etanol

Neste capítulo, apresentaremos um estudo sobre os padrões estatísticos de emissões acústicas produzidas por carvão vegetal [41]. Veremos que amostras de carvão umedecidas com etanol emitem ruídos crepitantes devido ao aumento da pressão interna causada pela evaporação do etanol. Com base nas leis sísmicas descritas no capítulo 1, vamos mostrar que esse sistema simples apresenta várias características similares às atividades sísmicas terrestres. Especificamente, verificaremos que, apesar de aspectos específicos relacionados ao carvão, as leis de Gutenberg-Richter, Omori, dos tempos entre eventos, de Produtividade e Bâth também estão presentes na dinâmica desse sistema simples e de pequena escala.

2.1 Introdução ao problema

Conforme mencionado na introdução, terremotos e fraturas em materiais são fenômenos intimamente conectados pela ideia de ruídos crepitantes ou *crackling noise* [38,39]. Apesar da enorme diferença de escala que separam os sistemas sísmicos de experimento em laboratórios sobre fraturas de materiais, muitos estudos recentes mostraram que as leis sísmicas que regem a dinâmica de terremotos também emergem nessa escala muito menor de tempo e espaço. Os vários exemplos de estudos que mencionamos na introdução revelam, ao mesmo tempo, o interesse amplo em investigar essas analogias entre terremotos e fraturas em materiais, mas também o fato de que a maioria dessas investigações encontra-se focada na caracterização de poucas leis sísmicas (tipicamente apenas uma) nesses sistemas. Além disso, a quase totalidade desses estudos experimentais induz as fraturas no material considerando uma tensão externa (ou compressão) e constante.

A principal argumentação para essa restrição nas condições experimentais é de que uma compressão constante representa a melhor analogia com as características sísmicas de terre-

mentos, visto que a principal fonte de tensão entre placas tectônicas é considerada compressiva e estacionária [45]. Apesar disso, existem outras situações importantes relacionadas às atividades sísmicas naturais e induzidas que não se enquadram nessa hipótese. Exemplos incluem o caso das atividades sísmicas provocadas pela injeção de fluidos no solo para mineração e extração de petróleo [28, 43] e também os chamados *gas-rock outbursts*, que são eventos de expulsão súbita e violenta de gás e rochas que ocorrem em minas de carvão [44]. Em situações como essas, a tensão é interna, transiente e está irregularmente distribuída no espaço.

Para o melhor de nosso conhecimento, até o desenvolvimento do presente trabalho, não havia um paralelo completo entre as principais leis sísmicas e ruídos crepitantes provenientes da fratura de materiais em condições mais complexas de tensão. Visando a preencher essa lacuna existente na literatura, propusemos um experimento simples que é capaz de produzir fraturas e ruídos crepitantes num material sujeito a tensões internas e irregularmente distribuídas. Especificamente, investigamos as emissões acústicas de amostras de carvão vegetal após serem umedecidas (molhadas) com etanol. Em temperatura ambiente, observamos que o etanol é absorvido através dos poros da amostra, ficando inicialmente alojado em seu interior de maneira irregular devido às estruturas porosas do carvão. Após alguns minutos, o etanol começa a evaporar e, ao tentar escapar pelos poros da amostra, surge uma tensão interna distribuída de maneira irregular que promove a fragmentação da amostra e gera os ruídos crepitantes. No que segue, passaremos a descrever nossos experimentos e as análises desses ruídos crepitantes visando a obter um paralelo como as leis sísmicas descritas no capítulo 1.

2.2 Experimentos e aquisição de dados

Para nossos experimentos, adquirimos o carvão vegetal (de Eucalipto) para uso doméstico e selecionamos várias amostras com aproximadamente 200g. A figura 2.1a mostra um exemplo típico de amostra que foi selecionada. Vamos reportar, nessa investigação, resultados provenientes de seis amostras distintas e escolhidas ao acaso. Conforme veremos, os resultados são muito similares entre todas as amostras. Cada amostra foi estudada individualmente e umedecida com 30mL de etanol (para uso doméstico, hidratado com 7% de água) de maneira a fazer com que a maior parte do líquido fosse absorvida pelos poros da amostra. Depois de aproximadamente 5 minutos, as amostras começam a emitir um ruído característico, o qual foi gravado utilizando um microfone (marca Shure™, modelo Microflex™ MX202W/N) posicionado a aproximadamente 20cm das amostras. Nessas gravações, empregamos uma taxa de amostragem de 48kHz. Tipicamente, os processos de emissão acústica se estendem por mais de meia hora. Ao longo do processo, as amostras vão se fragmentando e, por vezes, pedaços são ejetados a centímetros de distância da amostra. A figura 2.1b exibe a mesma amostra da figura 2.1a após o término das emissões acústicas, na qual é possível observar várias rachaduras provocadas pelas tensões internas.

A figura 2.1c mostra uma gravação típica das amplitudes sonoras emitidas pelas amostras.

Em particular, mostramos a evolução da série temporal da amplitude sonora normalizada $A(t)$, que é simplesmente a amplitude original obtida pelo microfone dividida pelo desvio padrão de toda a série temporal. Nessa figura, notamos que as emissões sonoras ocorrem na forma de eventos discretos de diferentes amplitudes. A inserção da figura 2.1c mostra um desses eventos em maior detalhe.

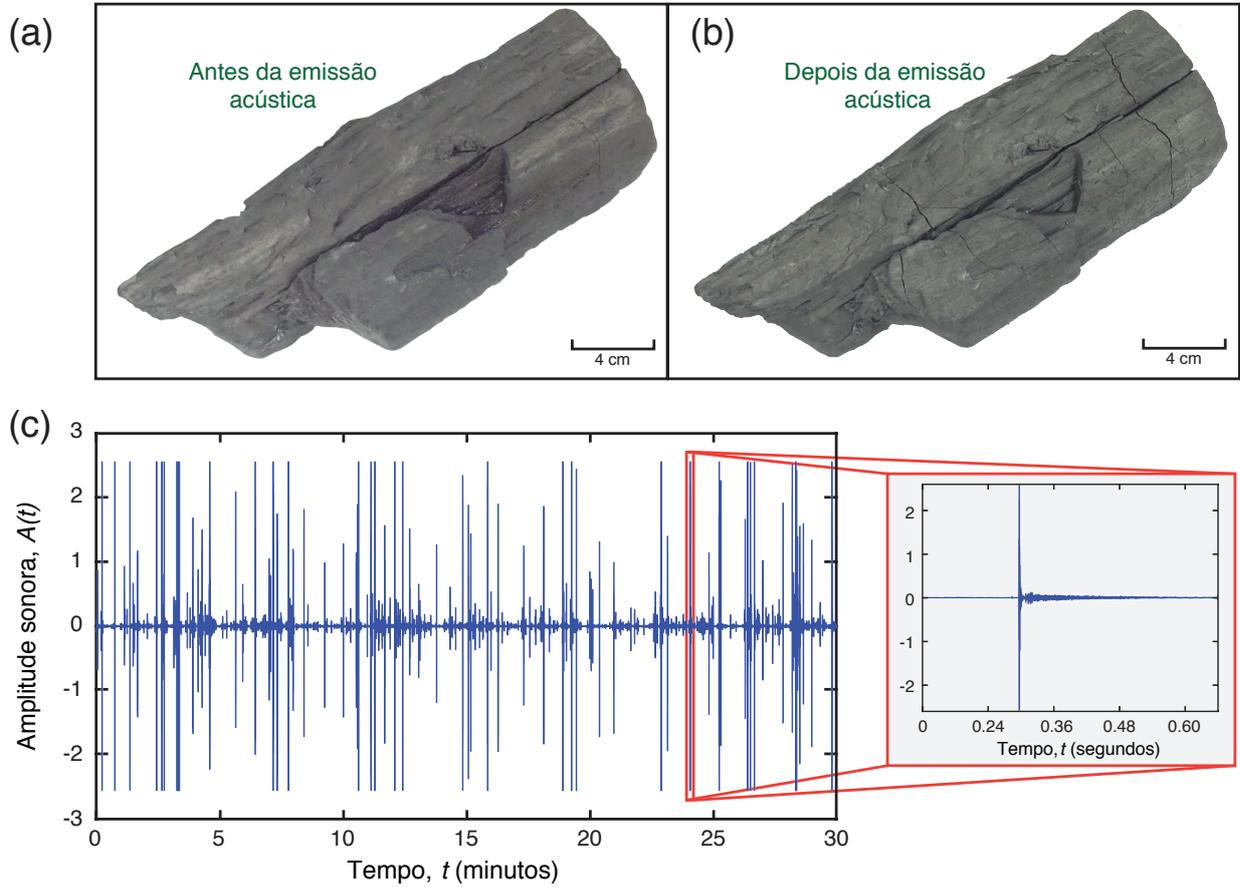


Figura 2.1: Descrição esquemática dos experimentos com as amostras de carvão. Os painéis (a) e (b) mostram fotos de uma amostra de carvão imediatamente antes e depois das emissões acústicas. Vale notar o surgimento de rachaduras na amostra após as emissões acústicas. O painel (c) mostra a evolução da série temporal das amplitudes sonoras normalizadas $A(t)$. Nesse último painel, a inserção mostra um evento acústico em maior detalhe.

2.3 Análise dos dados

De posse de todas as gravações das amplitudes sonoras, podemos iniciar as nossas análises dos dados. O primeiro passo nessa direção é identificar e calcular a energia associada a cada evento acústico (como aqueles mostrados na figura 2.1c). Para isso, vamos definir a série temporal das intensidades sonoras como

$$I(t) = \frac{A^2(t)}{\max[A^2(t)]}. \quad (2.1)$$

Agora, supondo conhecidos o tempo no qual um evento i se inicia (t_{ini_i}) e o tempo no qual ele termina (t_{end_i}), a energia associada ao evento pode ser calculada via [40]

$$E_i = \int_{t_{ini_i}}^{t_{end_i}} I(t) dt. \quad (2.2)$$

Na prática, essa integral é calculada numericamente usando, por exemplo, a regra do trapézio [82], isto é,

$$E_i = \int_{t_{ini_i}}^{t_{end_i}} I(t) dt \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_i-1} [I(t_{j+1}) + I(t_j)], \quad (2.3)$$

sendo t_j com $j = 1, 2, \dots, N_i$ os tempos que correspondem ao evento i e N_i o número de termos na série temporal desse evento.

Em nossa análise, definimos os valores de t_{ini_i} como sendo o tempo para o qual $I(t)$ excede inicialmente o limiar I_{min} e o tempo t_{end_i} como sendo o tempo para o qual $I(t)$ se mantém abaixo de I_{min} por mais de Δt segundos. Portanto, esse procedimento apresenta dois parâmetros: o limiar de intensidade I_{min} e o intervalo de tempo Δt . Todos os resultados que vamos apresentar foram obtidos considerando $I_{min} = 10^{-5}$ e $\Delta t = 0,1s$. Entretanto, numa análise separada, verificamos que a escolha de I_{min} e Δt não é crucial para nossas análises. Em particular, verificamos empiricamente que quando I_{min} está no intervalo $[10^{-5}, 6 \times 10^{-4}]$ e Δt está contido em $[0,025s, 0,5s]$, os resultados são praticamente inalterados, o que se deve principalmente ao fato dos eventos acústicos serem bem localizados no tempo.

Uma vez definido o tempo inicial e final de um evento, vamos considerar sua localização temporal como sendo o centro desse intervalo de tempo, ou seja,

$$t_i = \frac{t_{ini_i} + t_{end_i}}{2}. \quad (2.4)$$

Dessa maneira, podemos construir uma série temporal composta pela energia E_i e pelo tempo de ocorrência t_i de todos os eventos acústicos para cada amostra estudada. Esses dados representam o análogo dos dados disponíveis em catálogos de terremotos, nos quais temos a magnitude e o tempo de ocorrência do terremoto. Vale lembrar ainda que a magnitude do terremoto é proporcional ao logaritmo da energia liberada (equação 1.2).

A primeira pergunta que procuramos responder diz respeito ao comportamento da taxa de eventos (número de eventos por unidade de tempo) em função do tempo: essa taxa é estacionária? Para responder essa pergunta, dividimos a série temporal das energias em janelas de tempo e calculamos o número de eventos em cada janela dividido pelo número total, ou seja, a taxa de eventos $r(t)$. A figura 2.2 mostra o comportamento de $r(t)$ em função do tempo para uma de nossas amostras. Observamos, inicialmente, um decaimento lei de potência de $r(t)$ com o passar tempo; porém, após aproximadamente um minuto a taxa $r(t)$ é bem descrita por uma constante. Ajustando uma função lei de potência ao decaimento de $r(t)$ para $t < 1min$, encontramos que $r(t) \sim t^{0,6 \pm 0,1}$. Para tempos maiores que 1 minuto, encontramos que o número médio de eventos por minuto é 100 ± 5 . Comportamentos aná-

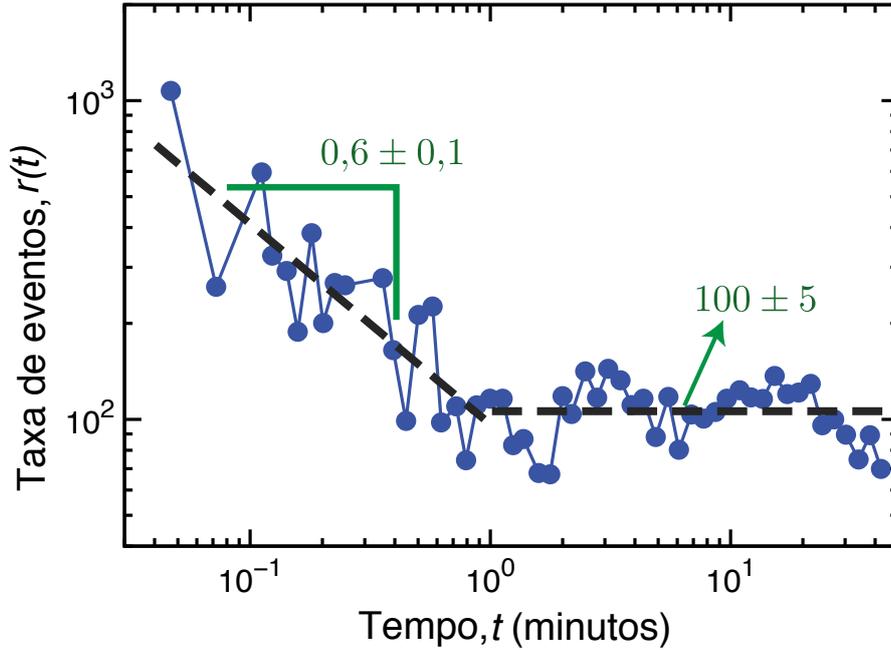


Figura 2.2: Evolução da taxa de eventos nas emissões acústicas de carvão. Os pontos azuis representam os dados empíricos para uma das amostras. O gráfico está em escala log-log. A linha tracejada representa um decaimento lei de potência com expoente $0,6 \pm 0,1$ ($r(t) \sim t^{-0,6 \pm 0,1}$, para $t < 1\text{min}$) e a linha tracejada horizontal mostra o comportamento aproximadamente estacionário da taxa para tempos maiores que 1 minuto. Nesse caso, observamos que a taxa média de eventos é $\langle r \rangle = 100 \pm 5$.

logos foram observados para as demais amostras. Assim, podemos afirmar que após um transiente inicial de alguns minutos, a taxa de eventos $r(t)$ é estacionária. Por conta desse comportamento, descartamos os primeiros 5% dos eventos na série das energias para manter a taxa de eventos aproximadamente constante nas demais análises que seguem. Recordamos, ainda, que o comportamento de $r(t)$ é importante para a análise dos tempos entre eventos, conforme explicado na seção 1.3.

Prosseguindo com a análise dos dados, calculamos as distribuições de probabilidade das energias, $P(E)$, para todas as amostras. A figura 2.3a mostra uma dessas distribuições, onde podemos observar um decaimento lei de potência que se estende por mais de 7 décadas no eixo horizontal e por mais de 9 décadas no eixo vertical. Esse comportamento é compatível com a Lei de Gutenberg-Richter (equação 1.7, na seção 1.1), isto é,

$$P(E) \sim E^{-\beta}, \quad (2.5)$$

sendo β o expoente da lei de potência. Para estimar o valor de β , selecionamos apenas os eventos de energia superior a E^* e empregamos o método de máxima verossimilhança (apêndice D) para estimar o valor de β . Além disso, também estimamos o intervalo de confiança de 95% para β usando o método *bootstrapping* (apêndice C). A figura 2.3b mostra os valores de β em função de E^* , na qual observamos um comportamento praticamente

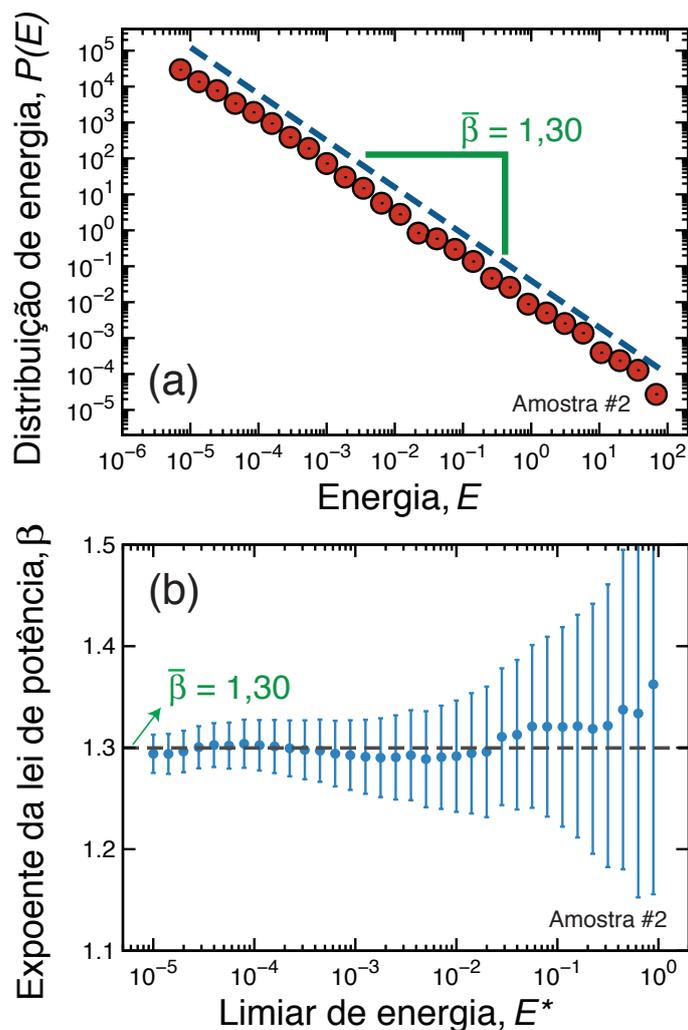


Figura 2.3: Caracterização da Lei de Gutenberg-Richter nas emissões acústicas de carvão. O painel (a) mostra a distribuição de probabilidade da energia E , $P(E)$, para uma das amostras (pontos vermelhos). A linha tracejada representa o decaimento lei de potência, em que $P(E) \sim 1/E^{-\beta}$ com $\bar{\beta} = 1,30$. O painel (b) mostra os valores do expoente β (obtidos via máxima verossimilhança) como função do limiar E^* , isto é, considerando somente os eventos com $E > E^*$. As barras de erro são intervalos de confiança de 95% obtidos via *bootstrapping*. O valor de $\bar{\beta}$ (indicado pela reta tracejada horizontal) é a média dos valores de β sobre E^* .

constante para β . Para atribuir um expoente característico para a lei de potência, calculamos o valor médio de β ($\bar{\beta}$) sobre todos os valores de E^* . Para essa amostra, encontramos $\bar{\beta} = 1,30$.

As demais amostras apresentam um comportamento muito similar. A figura 2.4 mostra as distribuições de probabilidade para as seis amostras, na qual é possível constatar a semelhança dos comportamentos lei de potência das distribuições de energia. Na figura 2.5, os valores estimados para β em função de E^* e também os valores médios $\bar{\beta}$ são mostrados para todas as amostras. Podemos verificar que $\bar{\beta}$ está no intervalo [1,27-1,33], um valor que é menor do que o encontrado para terremotos ($\beta \approx 1,67$ [51, 52, 83, 84], conforme discutido na seção 1.1). Além disso, esse valor é inferior ao obtido por Baró *et al.* [40] em seus

experimentos sobre a compressão de um material poroso, em que $\beta \approx 1,40$.

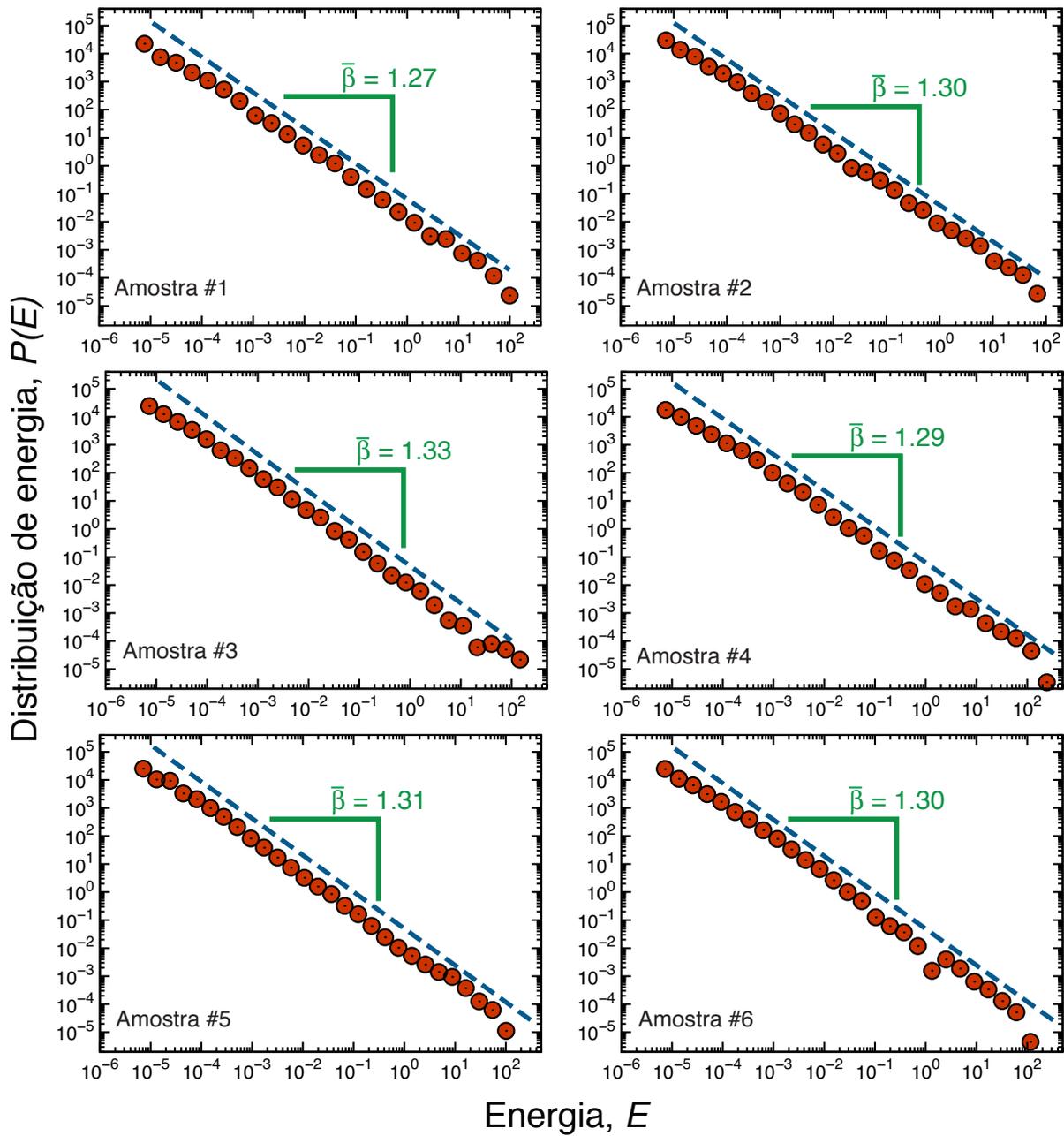


Figura 2.4: Distribuições de probabilidade das energias E para cada uma das seis amostras (pontos vermelhos). Cada linha tracejada representa o comportamento lei de potência com expoente $\bar{\beta}$ mostrado nos gráficos. Notamos que todas as amostras exibem um comportamento muito similar. Em particular, $\bar{\beta}$ varia entre 1,27 e 1,33.

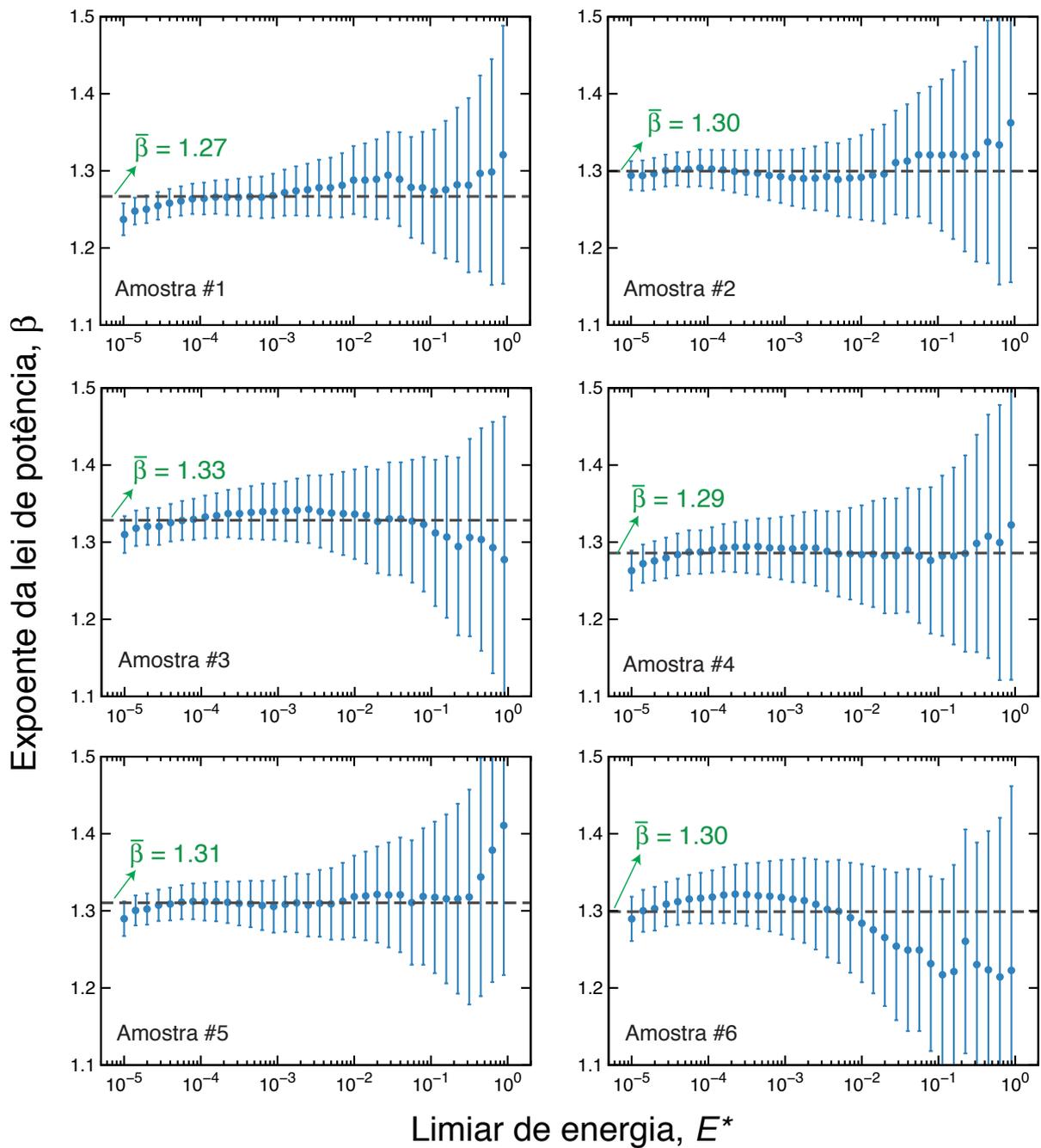


Figura 2.5: Valor estimado (via máxima verossimilhança) do expoente β em função do limiar de energia E^* para cada amostra. As barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. Os valores de $\bar{\beta}$ (representados por linhas horizontais tracejadas) são os valores médios de β sobre E^* . Notamos que o expoente β praticamente não depende de E^* em todas as amostras.

Um outro aspecto importante dos eventos acústicos que também pode ser relacionado ao estudo de terremotos é o intervalo de tempo τ entre eventos acima de um limiar de energia E_{min} . Isso corresponde ao estudo das leis sobre o tempo entre eventos sísmicos que apresentamos na seção 1.3. Conforme descrito naquela seção, a distribuição de probabilidade desses intervalos de tempo (daqui em diante denominados tempos de recorrência) depende do limiar de energia E_{min} . Entretanto, vimos que essa dependência pode ser eliminada reescalando os tempos de recorrência τ pela taxa de atividade média $\langle r \rangle$. Mais do que isso, verificamos que nos estudos sobre terremotos, a distribuição de probabilidade dos tempos de recorrência reescalados (isto é, $\tau' = \langle r \rangle \tau$) é bem descrita pela distribuição gama (equação 1.14)

$$P(\tau') \propto (\tau')^{\gamma-1} \exp(-\tau'/a). \quad (2.6)$$

Vimos também que, quando a taxa de atividade sísmica é constante, os parâmetros da distribuição assumem valores universais entre diferentes catálogos de terremotos, especificamente, $\gamma \approx 0,7$ e $a \approx 1,4$. Assim, estabelecendo um paralelo com os eventos acústicos ocorridos no carvão, é natural esperar que a distribuição dos tempos de recorrência sigam uma distribuição gama. Além disso, como a taxa de atividade acústica é constante no caso do carvão (após um transiente inicial que foi descartado - figura 2.2), devemos encontrar valores para os parâmetros da distribuição gama próximos aos valores universais reportados para terremotos, supondo que a similaridade seja completa entre as emissões acústicas no carvão e terremotos.

A figura 2.6a mostra as distribuições de probabilidade dos tempos de recorrência $P(\tau)$ para diferentes limiares de energia E_{min} para uma das amostras. Observamos que as distribuições se deslocam para maiores valores de τ conforme aumentamos o limiar E_{min} , assim como ocorre com terremotos (figura 1.7a). Já na figura 2.6b, mostramos as distribuições dos tempos de recorrência reescalados $P(\tau')$ para todas as amostras e para todos os limiares E_{min} mostrados na figura 2.6a. Aqui, cada curva cinza representa uma dessas distribuições, os pontos pretos são os valores médios dessas distribuições e as barras de erro indicam os intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping* (apêndice C). Dessa figura, notamos um bom colapso das distribuições, compatível com aqueles observados para terremotos (figura 1.8).

Além do bom colapso das distribuições dos tempos de recorrência, verificamos na figura 2.6b que as distribuições apresentam uma grande semelhança com a distribuição gama reportada para terremotos. De fato, ao ajustarmos a distribuição gama à média dessas distribuições de τ' (via método dos mínimos quadrados), encontramos $\gamma = 0,69 \pm 0,08$ e $a = 1,50 \pm 0,12$, valores muito próximos daqueles universalmente reportados para terremotos. Se levarmos em conta os erros obtidos nessas estimativas de γ e a , podemos afirmar que os valores são idênticos aos reportados para terremotos (figuras 1.7 e 1.8).

Ao investigar individualmente as mesmas distribuições $P(\tau)$ entre as amostras, um comportamento muito similar é observado. Na figura 2.7, mostramos as distribuições dos tempos

de recorrência para todas as amostras e diferentes valores de E_{min} . Já na figura 2.8, mostramos essas mesmas distribuições após a operação de reescala. Observamos que um bom colapso das distribuições é obtido em todos os casos. Ajustando a distribuição gama aos comportamentos médios dessas distribuições, obtemos valores para os parâmetros γ e a próximos dos encontrados ao agregar todas as distribuições. Fato que reforça a robustez de nossos resultados.

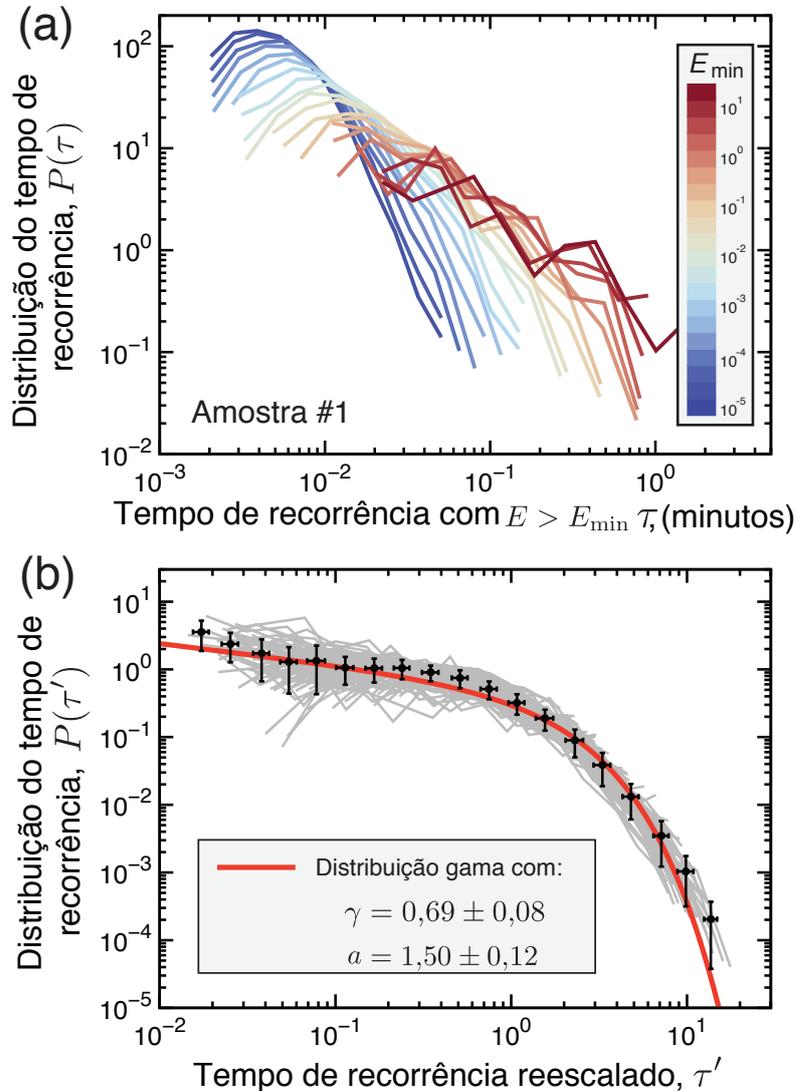


Figura 2.6: Distribuições dos tempos de recorrência e lei de escala universal. O painel (a) mostra as distribuições de probabilidade dos tempos de recorrência τ para diferentes valores de E_{min} (como indicado pelo código de cores) e para uma das amostras. O painel (b) mostra as distribuições dos tempos de recorrência reescalados pela taxa média de atividade acústica $\langle r \rangle$ (linhas cinzas) usando os dados de todas as amostras. Os pontos na cor preta são a média sobre todas as distribuições e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. A linha vermelha representa o ajuste da distribuição gama (equação 2.6) à distribuição empírica média (os parâmetros são mostrados no gráfico).

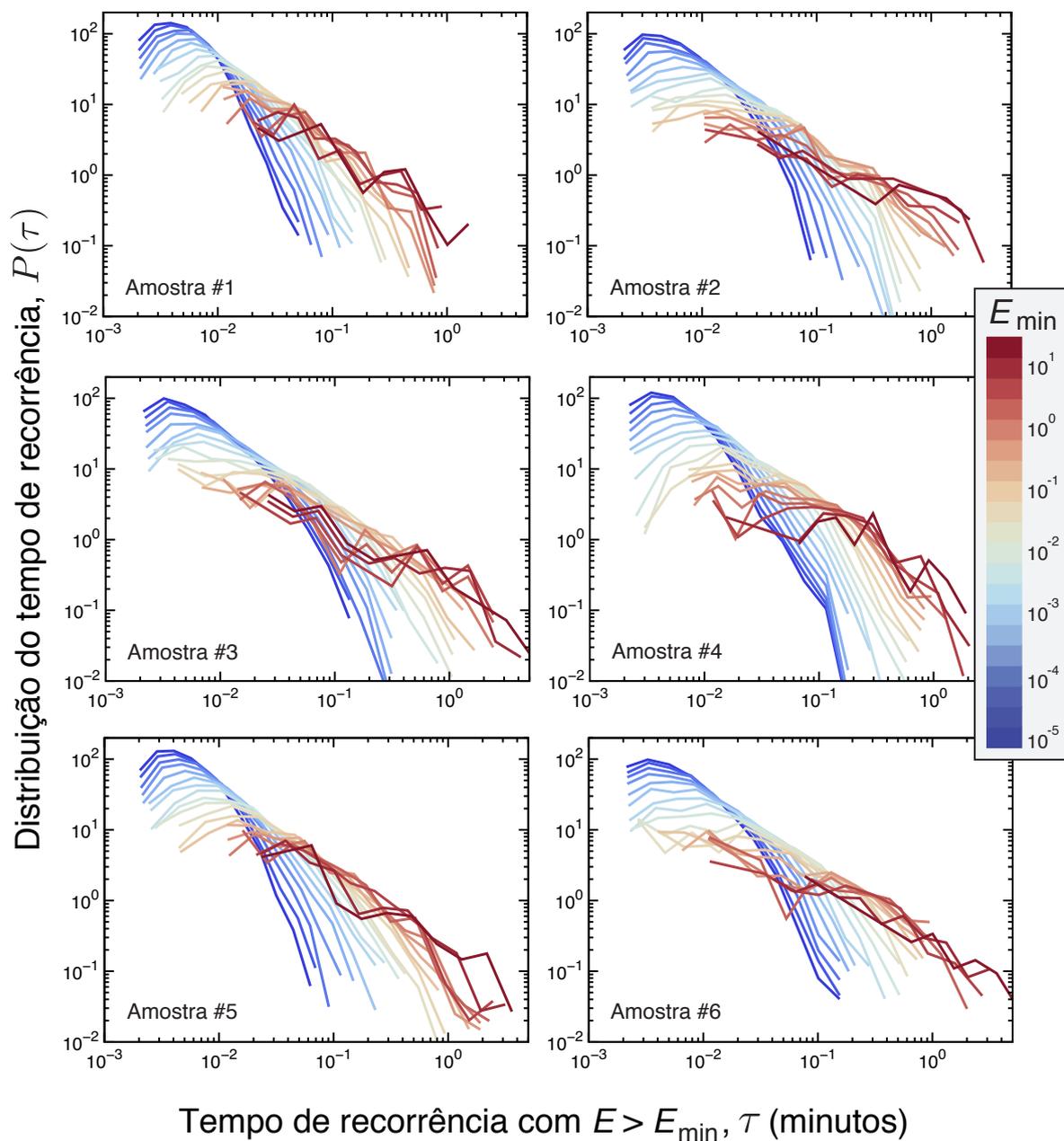


Figura 2.7: Distribuições de probabilidade para os tempos de recorrência considerando diferentes limiares E_{\min} (como indicado pelo código de cores) para cada amostra. Notamos que todas as amostras exibem, aproximadamente, o mesmo comportamento.

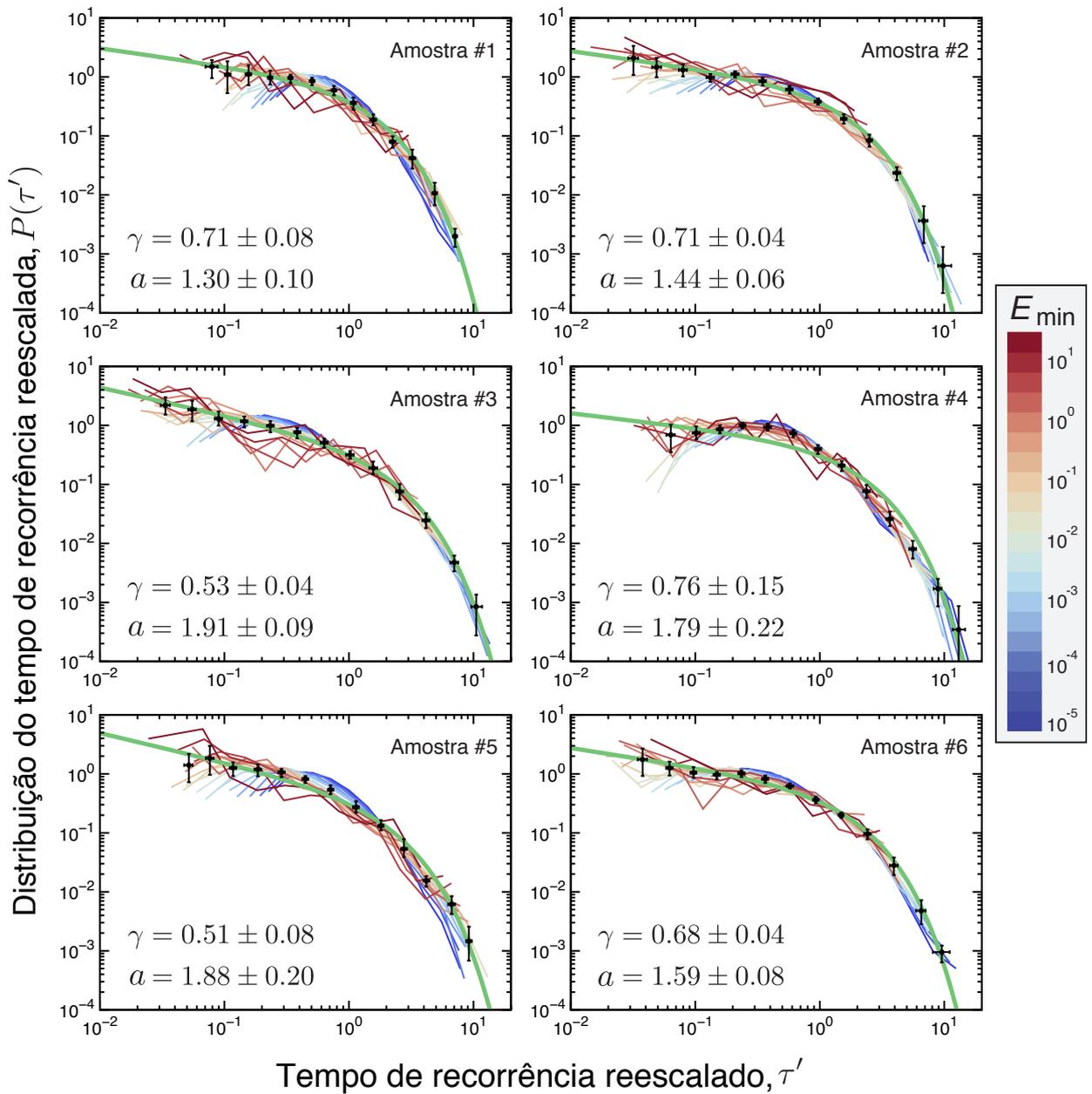


Figura 2.8: Distribuições de probabilidade dos tempos de recorrência rescalados pela taxa de atividade acústica média $\langle r \rangle$ para diferentes valores de E_{min} (como indicado pelo código de cores) e para cada amostra. Em todos os casos, observamos um bom colapso das distribuições. Os círculos na cor preta são as médias sobre todas as distribuições para cada amostra e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculado via *bootstrapping*. As linhas sólidas na cor verde são os ajustes da distribuição gama à cada amostra, sendo os parâmetros γ e a indicados em cada gráfico.

Dando seguimento à caracterização das principais leis sísmicas nas emissões acústicas de carvão, passaremos a investigar a Lei de Omori. Conforme descrito na seção 1.2, a Lei de Omori estabelece que o número de *aftershocks* por unidade de tempo, $R_a(t_{ms})$, decai como uma lei de potência em função do tempo após o *mainshock*, t_{ms} , isto é,

$$R_a(t_{ms}) \sim \frac{1}{t_{ms}^p}, \quad (2.7)$$

sendo p o expoente da lei de potência. Para terremotos, o valor p costuma ser entre 0,9 e 1,5. Já no caso de fratura em materiais, o trabalho de Baró *et al.* [40] reporta $p = 0,75 \pm 0,10$ para um material poroso sujeito a uma taxa de compressão constante. Outros trabalhos sobre fraturas em materiais têm mostrado que o valor de p pode variar no tempo, por exemplo, Hirata [25] mostrou que o valor de p diminui durante o processo de fragmentação de basalto.

Nesse contexto, nosso interesse é verificar se as emissões acústicas de carvão (que, lembrando, tem uma origem mais complexa do que as de experimentos com compressão constante) também seguem a Lei Omori. Visando a esse objetivo, adotamos a definição de *mainshock* e *aftershock* discutida na seção 1.2. Especificamente, definimos como *mainshocks* os eventos com energia E_{ms} entre 10^j e 10^{j+1} (com $j = -4, -3, \dots, 2$). Já as sequências de *aftershocks* são os eventos que seguem um *mainshock* até que um evento de energia superior a do *mainshock* seja encontrado. Similarmente, definimos as sequências de *foreshocks* como os eventos que antecedem um *mainshock* até que ocorra outro evento de energia superior.

Usando as sequências de *aftershocks*, calculamos a taxa de *aftershocks* $R_a(t_{ms})$ (número de eventos por unidade de tempo) como função do tempo após o *mainshock* t_{ms} para todas as amostras e considerando todos intervalos de energia que definem os *mainshocks*. A figura 2.9a mostra o comportamento de $R_a(t_{ms})$ em função de t_{ms} . Nessa figura, cada linha cinza representa $R_a(t_{ms})$ para um determinado intervalo de E_{ms} e para uma amostra. Já os pontos vermelhos são os valores médios dessas curvas e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping* (apêndice C). Observamos que o resultado é bem diferente daquele obtido para terremotos (figura 1.4). Especificamente, nossos resultados mostram que $R_a(t_{ms})$ exibe dois comportamentos: *i*) para tempos curtos ($t_{ms} \lesssim 0,1\text{min}$) temos um decaimento lei de potência com expoente $p = 0,87 \pm 0,01$; *ii*) para tempos longos ($t_{ms} \gtrsim 0,1\text{min}$) temos um comportamento estacionário. O primeiro regime é compatível com a Lei de Omori observada em terremotos, sendo o expoente p próximo ao limiar inferior usualmente obtido para terremotos e maior do que o reportado por Baró *et al.* [40] em seu experimento com um material poroso sendo comprimido a taxa constante. Por outro lado, o segundo regime, no qual temos $p \approx 0$, indica que a ocorrência de *aftershocks* tardios (isto é, separados por um tempo superior a $\approx 0,1\text{min}$ do *mainshock*) é aleatória.

Ao repetir a análise anterior para as sequências de *foreshocks*, encontramos um comportamento muito parecido. A figura 2.9b mostra essa análise. Nesse caso, as linhas cinzas representam as taxas de ocorrências de *foreshocks* $R_f(t_{ms})$ em função do tempo t_{ms} até o *mainshock*. Ainda nessa figura, os pontos azuis são os valores médios das curvas em cinza e as

barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. Como obtido para *aftershocks*, a taxa de ocorrência de *foreshocks* exhibe aproximadamente os mesmos dois regimes, sendo o expoente $p = 0,85 \pm 0,01$, estimado para tempos curtos, ligeiramente menor que o encontrado no caso dos *aftershocks*. Essa similaridade entre *aftershocks* e *foreshocks* também é observada em terremotos. As figuras 2.10 e 2.11 apresentam os resultados para cada experimento, nas quais observamos um comportamento muito similar para todas elas.

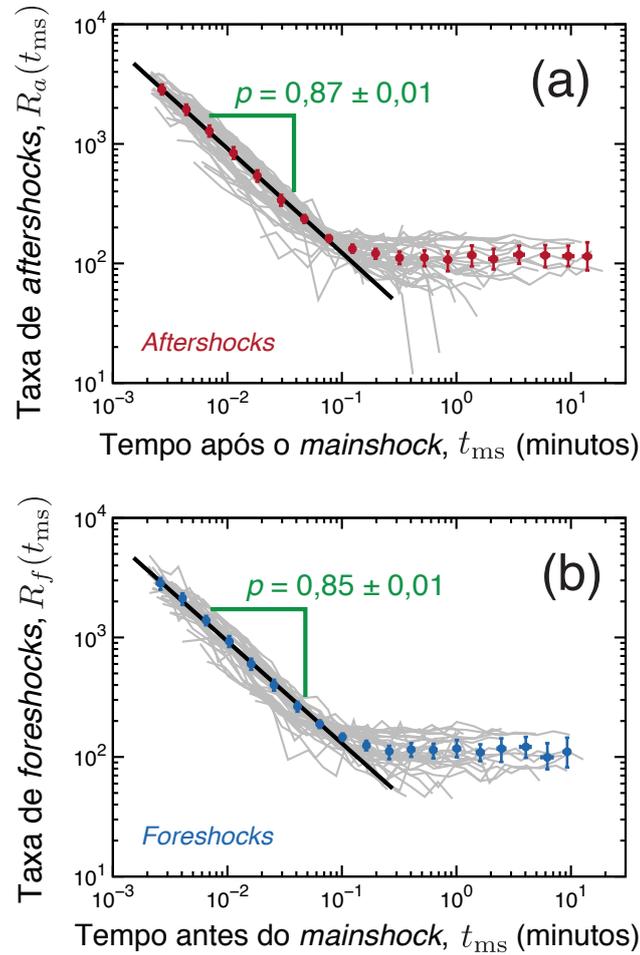


Figura 2.9: Lei de Omori para as taxa de *aftershocks* e *foreshocks* nas emissões acústicas de carvão. O painel (a) mostra o número de *aftershocks* por unidade de tempo $R_a(t_{ms})$ (taxa de *aftershocks*) como função do tempo a partir do *mainshock* t_{ms} . O painel (b) mostra a taxa de *foreshocks* $R_f(t_{ms})$ versus o tempo antes do *mainshock* t_{ms} . Nos dois casos, empregamos escala log-log. Cada curva cinza mostra um decaimento Omori para um dado intervalo de energia e para uma dada amostra. Os dados de todas as amostras estão incluídos nesses gráficos. Além disso, os círculos (vermelhos para *aftershocks* e azuis para os *foreshocks*) representam valores médios sobre as curvas cinzas, sendo que as barras de erro indicam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. Observamos um decaimento aproximadamente lei potência (sobre duas décadas) para $R_a(t_{ms})$ e $R_f(t_{ms})$ quando $t_{ms} < 0,1$ minutos, seguido por um comportamento estacionário. As linhas pretas são as funções lei de potência ($R_{\{a,f\}}(t_{ms}) \sim t_{ms}^{-p}$) ajustadas ao comportamento médio das taxas para $t_{ms} < 0,1$ minutos. Os expoentes p das leis de potência são indicados nos gráficos.

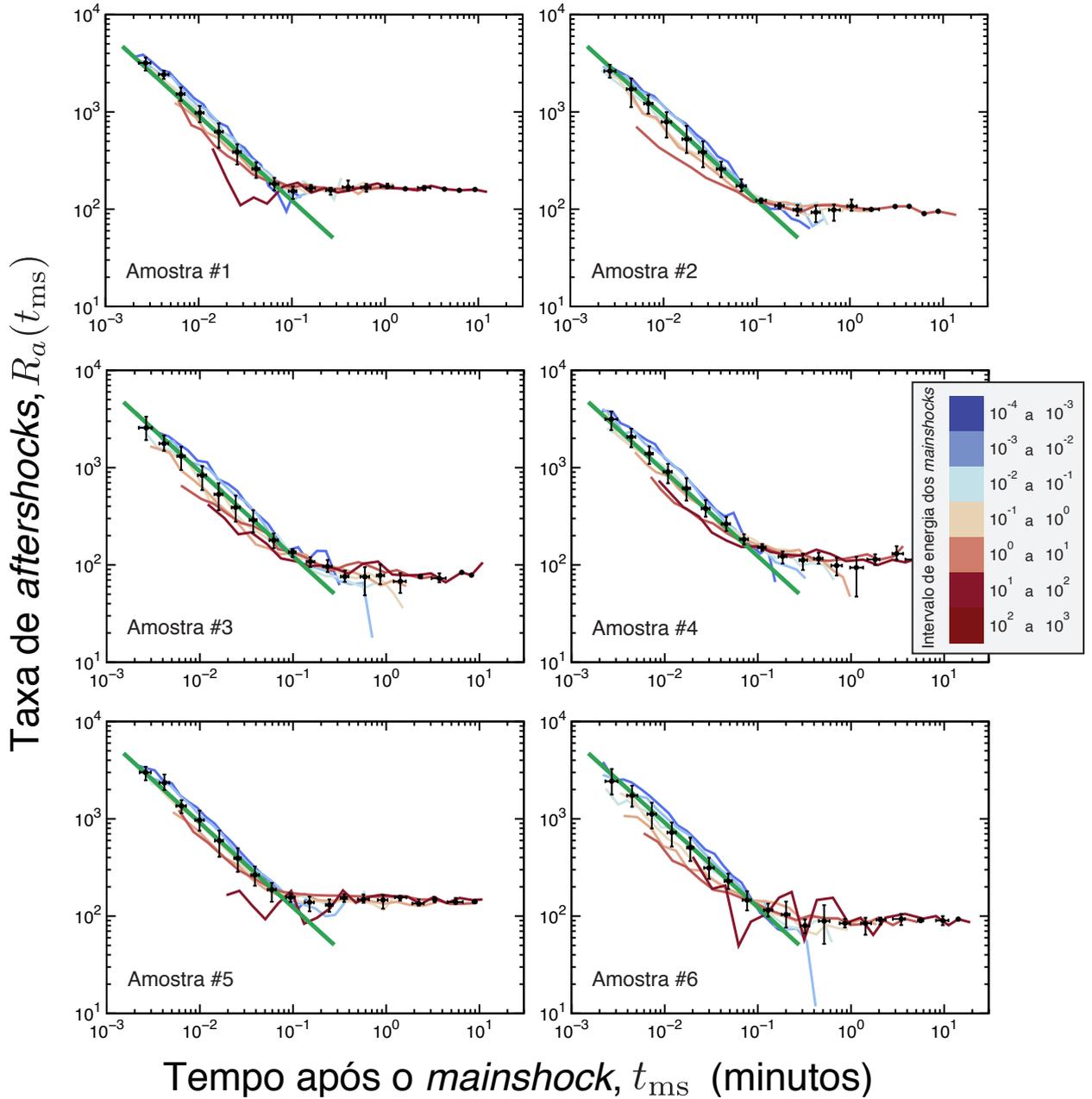


Figura 2.10: Número de *aftershocks* por unidade de tempo $R_a(t_{ms})$ como função do tempo t_{ms} após o *mainshock* para cada amostra. Os *mainshocks* foram definidos como eventos com energia no intervalo $10^j - 10^{j+1}$, com $j = -4, -3, \dots, 3$, e o código de cores indica a janela empregada para cada curva. Todos os gráficos estão em escala log-log, sendo que os círculos na cor preta são a média sobre todas as curvas para cada amostra e as barras de erro são intervalos confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. As linhas verdes mostram a mesma lei de potência, $R_a(t_{ms}) \sim t_{ms}^{-p}$ com $p = 0,87 \pm 0,01$, empregada na figura 2.9a.

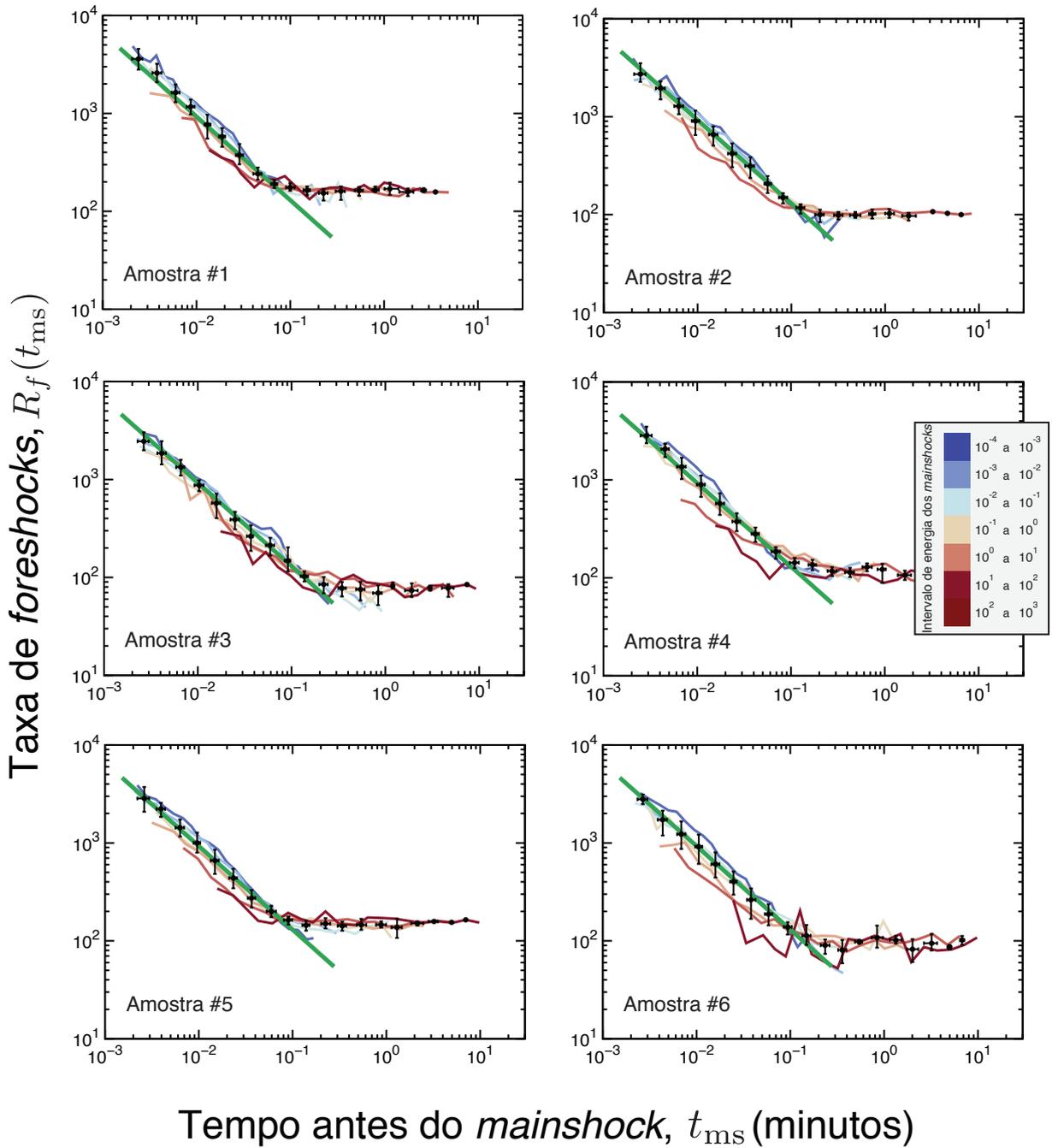


Figura 2.11: Número de *foreshocks* por unidade de tempo $R_f(t_{ms})$ como função do tempo t_{ms} até o *mainshock* para cada amostra. Os *mainshocks* foram definidos como eventos com energia no intervalo $10^j - 10^{j+1}$, com $j = -4, -3, \dots, 3$, e o código de cores indica a janela empregada para cada curva. Todos os gráficos estão em escala log-log, sendo que os círculos na cor preta são a média sobre todas as curvas para cada amostra e as barras de erro são intervalos confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. As linhas verdes mostram a mesma lei de potência, $R_f(t_{ms}) \sim t_{ms}^{-p}$ com $p = 0,85 \pm 0,01$, empregada na figura 2.9b.

Ainda no contexto das sequências de *aftershocks*, podemos caracterizar a Lei de Produtividade. Conforme descrevemos na seção 1.4, essa lei estabelece uma relação entre o número de *aftershocks* N_a e a energia E_{ms} do *mainshock* desencadeador. Especificamente, a Lei de Produtividade afirma que essas duas quantidades estão relacionadas por meio de uma relação lei de potência, isto é,

$$N_a(E_{ms}) \sim E_{ms}^\alpha, \quad (2.8)$$

sendo α o chamado expoente de produtividade. Nesse ponto, vale notar que a Lei de Produtividade também pode ser expressa em termos da magnitude do evento (equação 1.19), isto é, como $E_{ms} \sim 10^{m_{ms}}$ (equação 1.2), segue que $N_a(m_{ms}) \sim 10^{\alpha m_{ms}}$, em que m_{ms} é a magnitude do *mainshock*. Valores típicos de α estão entre 0,7 e 0,9 para terremotos [76], $\alpha \approx 0,33$ para o experimento de Baró *et al.* [40] sobre fratura de um material poroso e $\alpha \approx 0,6$ para a fragmentação de cristais de gelo [27].

Com o objetivo de quantificar a Lei de Produtividade em nosso experimento, contamos o número de *aftershocks* $N_a(E_{ms})$ que um *mainshock* de energia E_{ms} desencadeia. Fizemos isso para todas as sequências de *aftershocks* definidas como na análise da Lei de Omori levando em conta os resultados de todas as amostras. A figura 2.12 mostra o gráfico de N_a em função de E_{ms} para todas sequências de *aftershocks* em escala log-log. Notamos que, apesar da dispersão dos pontos, uma dependência significativa é observada. Por exemplo, medindo a intensidade da correlação entre N_a e $\log E_{ms}$ usando o coeficiente de correlação de Pearson (apêndice A), encontramos $r = 0,7 \pm 0,1$, ou seja, uma correlação positiva e estatisticamente significativa. Para contornar a flutuação dos dados e investigar a principal tendência da relação entre N_a e E_{ms} , calculamos a média desses pontos em janelas de energia, conforme indicado pelos círculos vermelhos da figura 2.12. O comportamento médio mostra que a relação entre N_a e E_{ms} apresenta dois comportamentos. Para $E_{ms} < 10$, temos $N_a(E_{ms}) \sim E_{ms}^\alpha$, com $\alpha = 0,28 \pm 0,01$, e para $E_{ms} > 10$, temos outra lei de potência com $\alpha = 0,81 \pm 0,06$. Assim, o expoente de produtividade α para energias menores é menor do que os obtidos para terremotos ($\alpha \in [0,7 - 0,9]$ [76]) e para fraturas de materiais ($\alpha \approx 0,33$ no experimento de Baró *et al.* [40] e $\alpha \approx 0,6$ para cristais de gelo [27]). Por outro lado, o expoente de produtividade α para energias maiores está no intervalo dos valores obtidos para terremotos. Apesar dessa similaridade quantitativa, devemos ter mais cuidado com essa segunda relação lei de potência, visto que ela representa apenas $\approx 3\%$ dos dados numa região onde a relação entre N_a e E_{ms} tem uma dispersão maior.

Analisamos, ainda, a Lei de Produtividade individualmente para todas as amostras de carvão. A figura 2.13 mostra a relação entre N_a e E_{ms} para cada amostra. Nesses gráficos, indicamos as mesmas leis potência ajustadas ao agregar todos os dados. Observamos que o comportamento individual das amostras é muito parecido com o comportamento dos dados agregados, especialmente o comportamento para energias menores ($E_{ms} < 10$). Para energias maiores ($E_{ms} > 10$), podemos observar que o comportamento médio apresenta grandes flutuações e, em alguns casos, é mais difícil identificar o segundo regime lei de potência da

figura 2.12.

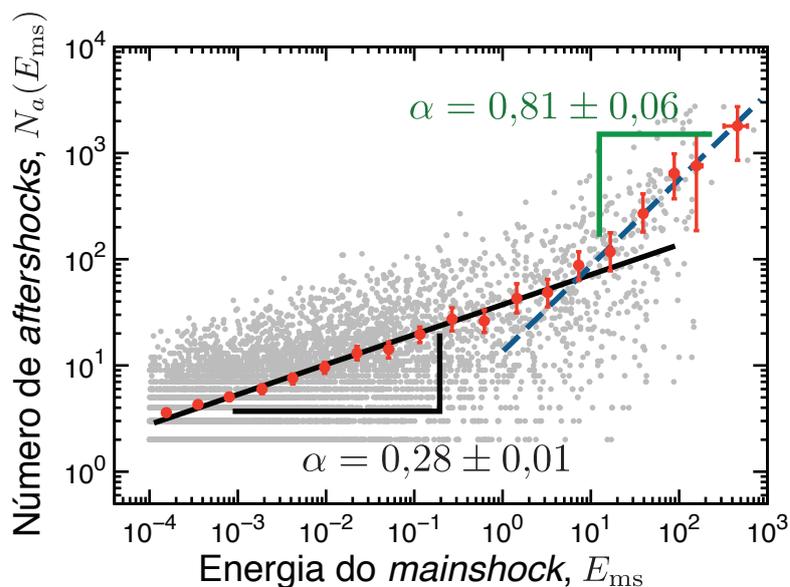


Figura 2.12: A Lei de Produtividade nas emissões acústicas de carvão. Os pontos em cinza mostram o número de *aftershocks* $N_a(E_{ms})$ desencadeados por um *mainshock* de energia E_{ms} (na escala log-log) para todas as janelas de energia que definem os *mainshocks* (as mesmas usadas para a Lei de Omori) e todas as amostras. Os pontos vermelhos são os valores médios calculados em 20 janelas da energia E_{ms} (igualmente espaçadas na escala logarítmica) e as barras de erro indicam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. Para $E_{ms} < 10$, o comportamento médio de $N_a(E_{ms})$ é ajustado (via método dos mínimos quadrados) pela lei de potência $N_a(E_{ms}) \sim E_{ms}^\alpha$, com $\alpha = 0,28 \pm 0,01$ (linha preta). Já para $E_{ms} > 10$, o comportamento médio também é ajustado por uma lei de potência, porém, com $\alpha = 0,81 \pm 0,06$ (linha tracejada azul).

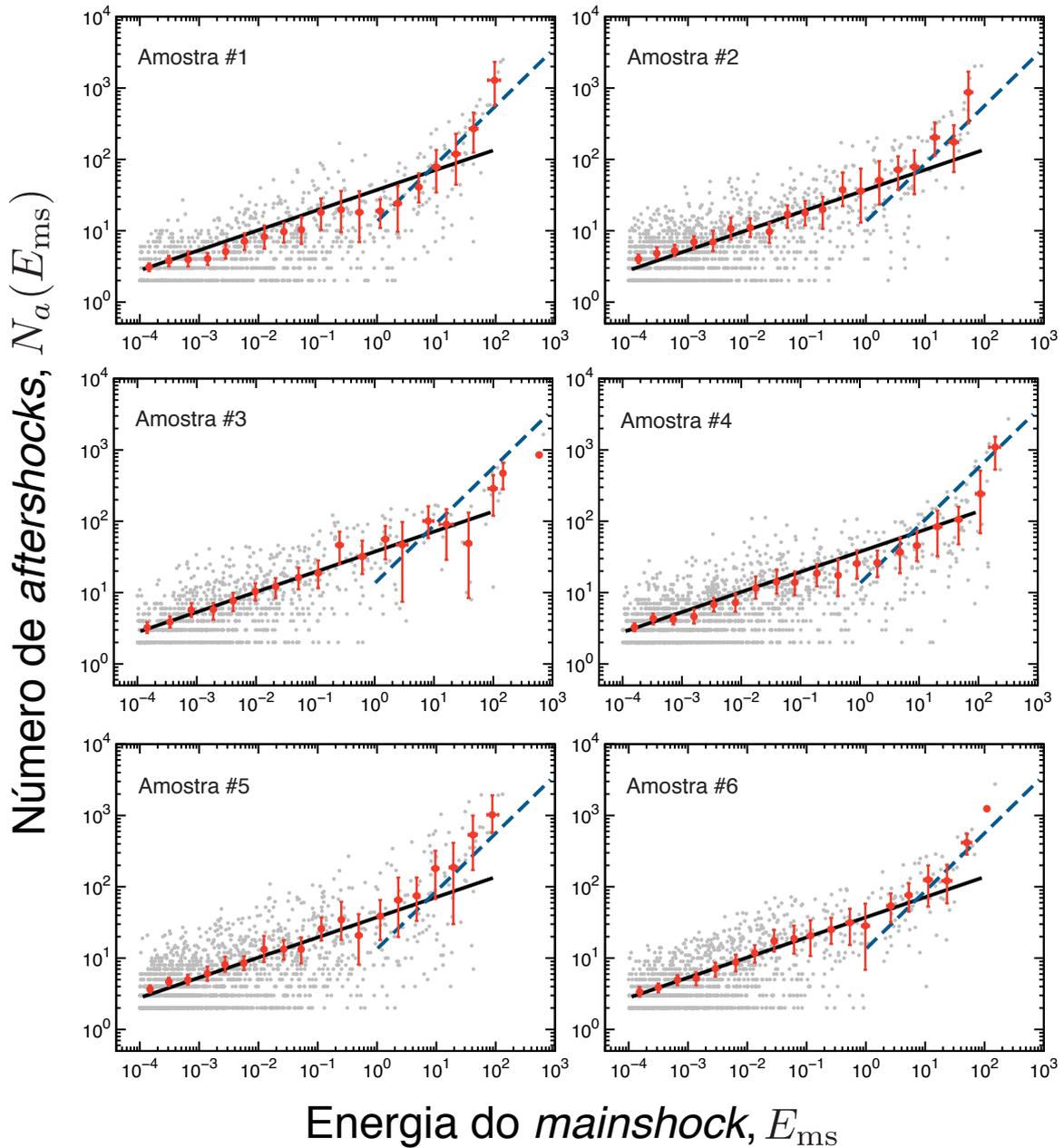


Figura 2.13: A Lei de Produtividade para cada amostra de carvão. Aqui, cada ponto cinza representa o número de *aftershocks* N_a desencadeado por um *mainshock* de energia E_{ms} numa sequência de *aftershocks*. Cada gráfico reporta os resultados para uma amostra e para todas as janelas de energia que definem os *mainshocks* (as mesmas usadas para a Lei de Omori). Além disso, os pontos na cor vermelha são os valores médios dos pontos em cinza, calculados em 20 janelas da energia E_{ms} (igualmente espaçadas na escala logarítmica). As barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. As linhas sólidas e tracejadas representam as mesmas leis de potência da figura 2.12.

Finalmente, mas ainda sobre as sequências de *aftershocks*, vamos analisar a Lei de Bâth. Conforme descrito na seção 1.4, a Lei de Bâth estabelece que a diferença entre a magnitude (isto é, $\log E$) de um *mainshock* e seu maior *aftershock* é (em média) aproximadamente 1,2, independentemente da magnitude do *mainshock*.

Para caracterizar essa lei nas emissões acústicas de carvão, empregamos as mesmas definições de *mainshock* e *aftershock* usadas na Lei de Omori e na Lei de Produtividade. De posse das sequências de *aftershocks* e seus respectivos *mainshocks*, vamos denotar por E_{ms} a energia do *mainshock* e por E_{la} a energia do maior *aftershock* desencadeado. Desse modo, calculamos a diferença

$$\Delta m = \log E_{ms} - \log E_{la} \quad (2.9)$$

em cada sequência de *aftershock* e, em seguida, calculamos o valor médio de Δm , $\langle \Delta m \rangle$, sobre todas as sequências (levando em conta todas as amostras e todas as janelas de energia) como função da energia E_{ms} . A figura 2.14 mostra a magnitude média relativa $\langle \Delta m \rangle$ como função de E_{ms} para todas as amostras. Notamos que, para valores de E_{ms} menores do que 10^{-1} , os valores de $\langle \Delta m \rangle$ são sistematicamente inferiores a 1,2. Por outro lado, os valores de $\langle \Delta m \rangle$ são estatisticamente indistinguíveis de 1,2 para $E_{ms} \gtrsim 10^{-1}$.

Visando a verificar a robustez de nossos resultados, estudamos o comportamento de $\langle \Delta m \rangle$ em cada amostra. A figura 2.15 mostra o análogo da figura 2.14, ao considerar os resultados de cada amostra individualmente. Observamos que o comportamento de cada amostra é muito parecido com o comportamento médio de todas, isto é, temos valores de $\langle \Delta m \rangle$ inferiores a 1,2 para $E_{ms} \lesssim 10^{-1}$ e, para $E_{ms} \gtrsim 10^{-1}$, os valores de $\langle \Delta m \rangle$ são indistinguíveis da previsão da Lei de Bâth.

No melhor de nosso conhecimento, essa foi a primeira vez que a Lei de Bâth foi caracterizada num experimento de fratura de materiais e por isso, não temos como comparar nossos resultados com outros materiais. Para terremotos, a Lei de Bâth é normalmente caracterizada levando em conta apenas grandes *mainshocks* e, ainda assim, os valores de $\langle \Delta m \rangle$ flutuam muito (como mostrado na figura 1.14), o que também dificulta uma comparação objetiva com os nossos resultados. O comportamento crescente de $\langle \Delta m \rangle$ em função de E_{ms} pode ser entendido dentro do contexto dos resultados obtidos para a Lei de Bâth usando o modelo ETAS (seção 1.4). Especificamente, discutimos que esse modelo prevê um valor de $\langle \Delta m \rangle$ independente de E_{ms} apenas quando o expoente b da Lei de Gutenberg-Richter (equação 1.3) coincide com valor do expoente de produtividade α (equação 1.19 ou 2.8), conforme mostrado na equação 1.22. No caso do carvão, vimos que $\beta \approx 1,3$ e, portanto, $b \approx 0,45$ (aqui usamos a relação 1.8), ou seja, um valor maior que o expoente de produtividade ($\alpha \approx 0,3$ para $E_{ms} \gtrsim 10^1$). Nesse caso, segundo o modelo ETAS (seção 1.4, equação 1.22), devemos esperar um comportamento crescente de $\langle \Delta m \rangle$ em função de E_{ms} , o que é observado.

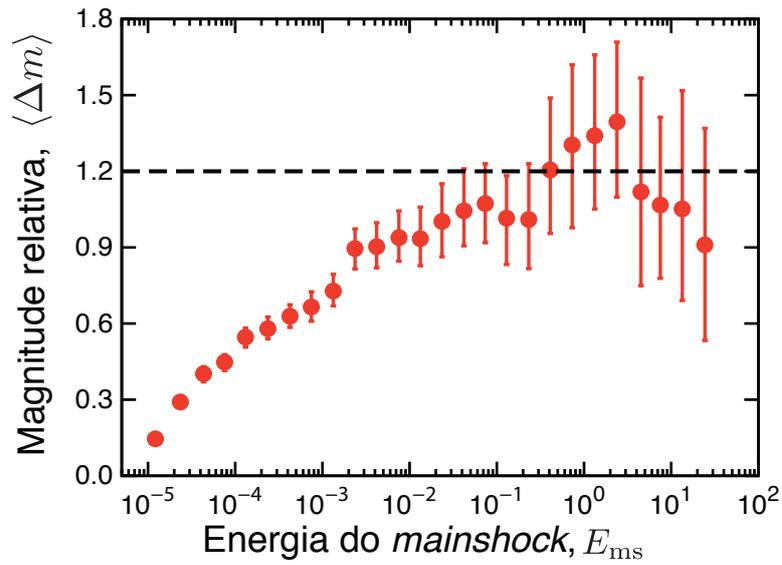


Figura 2.14: A Lei de Bâth nas emissões acústicas de carvão. Os círculos vermelhos mostram o valor médio da diferença $\langle \Delta m \rangle$ entre as magnitudes do *mainshock* ($\log E_{ms}$) e seu respectivo maior *aftershock* ($\log E_{la}$) como função da energia do *mainshock* E_{ms} . O eixo horizontal está em escala logarítmica. Esses valores médios foram calculados considerando dados de todas as amostras e para todas as janelas de energia que definem os *mainshock* (as mesmas usadas para a Lei de Omori). As barras de erro representam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping* e a linha horizontal tracejada indica a previsão da Lei de Bâth ($\langle \Delta m \rangle = 1,2$). Observamos que $\langle \Delta m \rangle$ se aproxima do valor previsto pela Lei de Bâth conforme a energia E_{ms} aumenta.

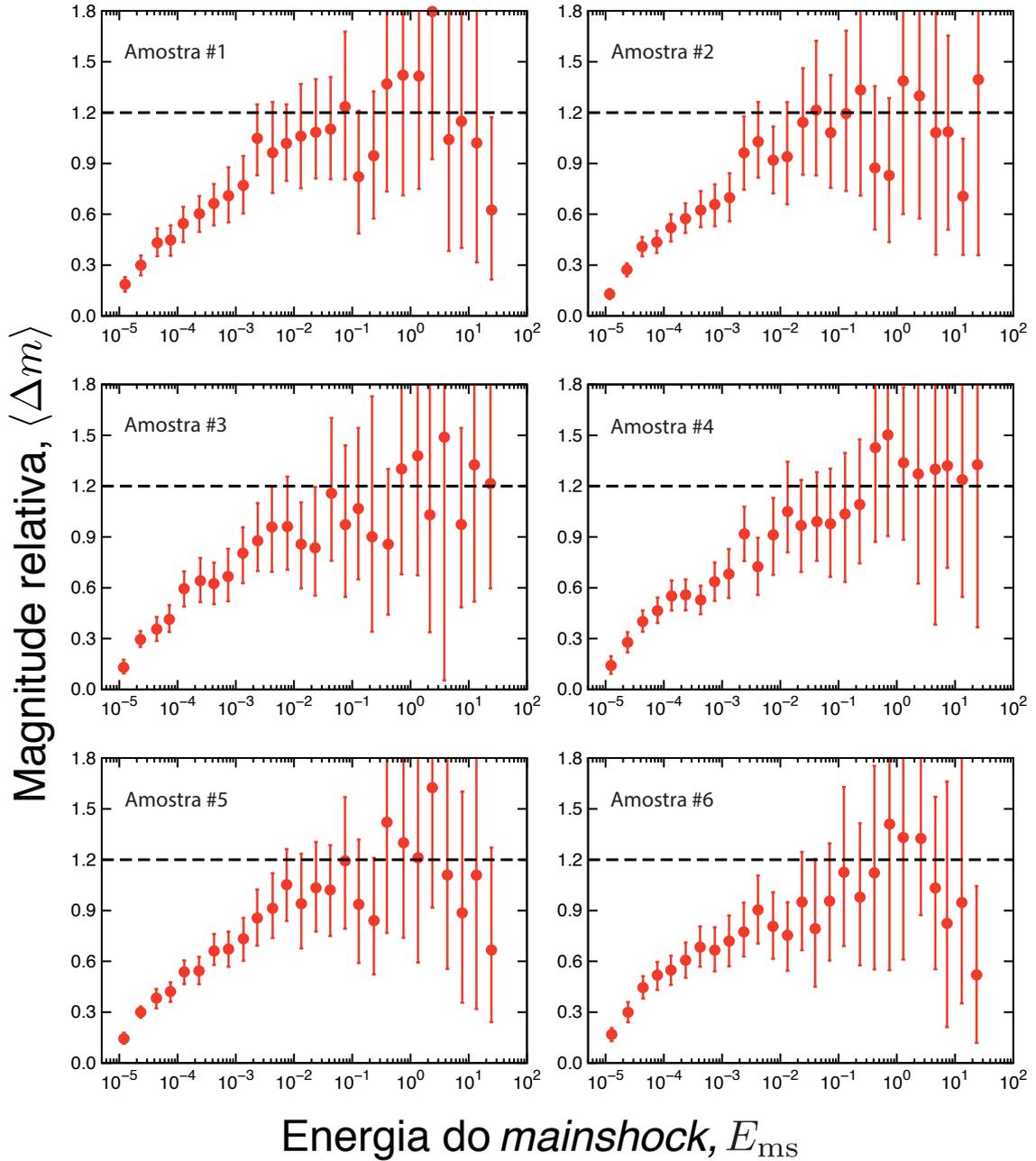


Figura 2.15: A Lei de Bâth para cada amostra de carvão. Os círculos vermelhos mostram o valor médio da diferença $\langle \Delta m \rangle$ calculados em função da energia do *mainshock* E_{ms} para cada amostra e com as mesmas janelas de energia usadas para definir os *mainshocks* na Lei de Omori. O eixo horizontal está em escala logarítmica. As barras de erro representam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping* e a linha horizontal tracejada indica a previsão da Lei de Bâth ($\langle \Delta m \rangle = 1,2$). Notamos que comportamento de cada amostra é similar ao comportamento médio mostrado na figura 2.14.

2.4 Conclusões e perspectivas

Nesse capítulo, apresentamos uma ampla caracterização das emissões acústicas ocorridas em carvão vegetal após ser umedecido com etanol. Nosso principal objetivo foi o de verificar se as principais leis sísmicas também estão presentes nessas emissões acústicas provocadas por uma tensão interna, transiente e irregular. Conforme já mencionado, existem muitos estudos que reportam similaridades (na maioria das vezes pontuais) entre experimentos de fratura de materiais e terremotos quando a tensão é externa e constante. Entretanto, uma situação mais complexa como a nossa não havia sido investigada.

Nossos resultados mostraram que as principais leis sísmicas estão presentes nessa dinâmica de emissões acústicas. Em alguns casos, como nos tempos de recorrência, encontramos um paralelo quantitativo com o caso de terremotos. Porém, também observamos diferenças, como o comportamento estacionário das taxas *aftershocks* e *foreshocks* para tempos longos e os dois regimes lei de potência para a Lei de Produtividade. Acreditamos que a principal origem para as diferenças observadas seja a diferente condição de tensão que o carvão experimenta. Essa tensão interna e irregular pode criar vários sítios de crepitação ao longo da amostra, os quais podem atuar de forma aproximadamente independentes. Essa hipótese explica parcialmente as diferenças que observamos. De fato, eventos simultâneos podem conduzir a valores maiores de energia, o que contribui para uma distribuição de energia de cauda mais longa e, conseqüentemente, um expoente β menor. Similarmente, esses possíveis sítios de crepitação independentes podem introduzir um comportamento mais aleatório na produção de *aftershocks*, o que corrobora com o comportamento estacionário observado para tempos longos na Lei de Omori. Finalmente, podemos relacionar os dois regimes lei de potência da Lei de Produtividade com uma possível superposição de eventos, também causada por esses possíveis sítios de crepitação.

Como perspectivas, acreditamos que a simplicidade desse experimento com carvão possa desencadear muitas outras investigações, entre elas podemos mencionar o estudo de outros solventes com diferentes taxas de evaporação, a investigação de amostras de carvão de diferentes tamanhos e também o uso de diferentes materiais de carvão (outras madeiras ou mesmo o uso de carvão mineral). Em uma outra direção mais aplicada, poderíamos buscar relacionar a estrutura física do carvão (rugosidade e porosidade, por exemplo) com o comportamento das leis sísmicas, visando a identificar possíveis características com potencial de prever a dinâmica das emissões acústicas.

Ruídos crepitantes emitidos por folhas plásticas amassadas

Neste capítulo, apresentaremos uma caracterização dos ruídos crepitantes emitidos ao longo do processo de relaxação de folhas plásticas amassadas [42]. Assim como no capítulo anterior, vamos caracterizar essas emissões acústicas buscando estabelecer um paralelo com as principais leis sísmicas de terremotos. Ainda que o processo de relaxação de folhas plásticas apresente características únicas, veremos que os dois sistemas exibem grandes similaridades.

3.1 Introdução ao problema

Além dos exemplos de sistemas que apresentam emissões acústicas crepitantes citados na introdução e de carvão umedecido em etanol que caracterizamos no capítulo anterior, um caso típico desses ruídos ocorre quando amassamos e soltamos folhas plásticas. Apesar de corriqueiro, esse fenômeno de amassar e desamassar (ou *crumpling* e *uncrumpling*) é bastante complexo do ponto de vista do acúmulo e da liberação de energia, bem como da perspectiva da geometria dessas folhas amassadas. Toda essa complexidade atrai pesquisadores de várias disciplinas, desde ciência dos materiais até matemática [85–89].

No contexto de emissões acústicas, para o melhor de nosso conhecimento, o primeiro trabalho sobre o processo de amassar folhas plásticas (*crumpling process*) data de 1996 e é devido a Eric M. Kramer e Alexander E. Lobkovsky [90]. Nesse trabalho, Kramer e Lobkovsky descobriram que a série temporal das energias relacionadas às emissões acústicas apresentam correlações temporais de longo alcance (especificamente, elas decaem como uma função exponencial *stretched* do tempo) e que as energias estão distribuídas como uma lei de potência com expoente próximo da unidade. Resultado que equivale a Lei de Gutenberg-Richter com $\beta \approx 1$. Aproximadamente 7 anos, Renio S. Mendes *et al.* [24] estudaram o processo de desamassar folhas plásticas (*uncrumpling process*) e também encontraram uma

distribuição lei de potência para as energias (porém, com um expoente muito maior: $\beta \approx 3$) e correlações de longo alcance na série temporal das energias. A mesma distribuição de energia também foi investigada por Paul A. Houle e James P. Sethna [21] ao amassar papel. Nesse artigo, Houle e Sethna encontraram um valor entre 1,3 e 1,6 para o expoente β ; porém, eles também observaram um decaimento mais rápido que o lei de potência para grandes energias. Num experimento onde uma folha de papel foi rasgada, Lauri I. Salminen *et al.* [22] reportaram que a distribuição de energia dos eventos acústicos é uma lei de potência com $\beta = 1,25 \pm 0,10$. Além disso, nesse mesmo estudo, Salminen *et al.* investigaram a distribuição dos tempos entre eventos (sem considerar nenhum limiar de energia) e encontraram uma distribuição lei de potência com expoente entre 1,00 e 1,25. Ao estudar o processo de descamação de papel (*paper peeling*), Jonna Koivisto *et al.* [23] também encontraram uma distribuição lei de potência para a energia dos eventos acústicos com $\beta = 1,25 \pm 0,10$. Entretanto, para o tempo entre eventos eles reportaram uma dinâmica mais complicada decorrente do chamado fenômeno *stick-slip* [91], o qual pode ser (grosseiramente) descrito como alternância complexa entre as forças de atrito estática e dinâmica num processo de deslocamento de uma superfície sobre outra.

Conforme podemos notar a partir dessa breve revisão da literatura sobre emissões acústicas relacionadas a processos de amassar, desamassar e descamar (*crumpling*, *uncrumpling* e *peeling*) de folhas (plásticas ou de papel), os estudos sobre esse tema estão concentrados, principalmente, em caracterizar as distribuições de energia, o que corresponde à Lei de Gutenberg-Richter para terremotos. Assim, a literatura carece de um paralelo mais completo entre as emissões acústicas nesses processos e as principais leis sísmicas, como foi reportado para o caso do experimento com carvão (descrito no capítulo anterior). O objetivo do trabalho descrito nesse capítulo é preencher parte dessa lacuna. Em particular, propusemos caracterizar as principais leis sísmicas (aquelas cinco descritas no capítulo 1) para os ruídos que folhas plásticas emitem depois de amassadas. Assim como reportado para o carvão, veremos que as principais leis sísmicas também emergem nesse sistema, ora mostrando similaridades quantitativas, ora revelando diferenças sistemáticas que permitem distinguir o processo de desamassar (*uncrumpling process*) da dinâmica de terremotos e do processo de fratura de materiais.

3.2 Experimentos e aquisição de dados

Para nossos experimentos, adquirimos uma bobina de um filme plástico (1 metro de largura por 100 metros de comprimento) composto de polipropileno bi-orientado. Esse filme tem espessura de $21,0 \pm 0,1 \mu\text{m}$ e densidade de $1,1 \pm 0,1 \text{ g/m}^2$. A partir dessa bobina, construímos dezesseis amostras de 1 metro de largura por 6 metros de comprimento. Cada amostra foi estudada individualmente empregando os seguintes passos: *i*) a folha plástica é amassada progressivamente (com as duas mãos) a partir do centro da amostra, até formar uma bola compacta de aproximadamente 8cm de raio; *ii*) essa configuração é mantida por 5 segundos;

iii) essa bola de plástico é liberada e deixada completamente livre para se desamassar e produzir as emissões acústicas; *iv*) finalmente, ao longo do processo, as emissões acústicas são gravadas utilizando um microfone (da marca Shure™, modelo Microflex™ MX202W/N) posicionado acima da folha e a 30cm da posição inicial da bola de plástico. Nessas gravações, empregamos uma taxa de amostragem de 48kHz. Amostras desse tamanho emitem ruídos por aproximadamente 40 minutos até a restauração parcial de sua forma original, que usualmente corresponde a 1/3 de sua área inicial.

A figura 3.1a mostra a bobina do filme plástico que empregamos e a figura 3.1b ilustra a configuração de uma amostra após ser amassada. Já a figura 3.1c descreve o comportamento típico da amplitude sonora reescalada $A(t)/A_{\max}$ com o passar do tempo t . Diferentemente do caso do carvão (figura 2.1), observamos claramente um comportamento transiente para as emissões acústicas de folhas plásticas. Por essa razão, as amplitudes sonoras foram reescaladas pelo limite de saturação do microfone ($A_{\max} = 2^{15} - 1$) e não pelo desvio padrão da série das amplitudes (como fizemos para o carvão), visto que o desvio padrão das amplitudes depende do tempo no caso do filme plástico. Da figura 3.1c, observamos que existem muitos eventos superpostos no início do processo (usualmente, esse comportamento ocorre nos 30 primeiros segundos de gravação) e que, em seguida, é possível identificar os eventos acústicos de maneira individual (tal como no carvão). A inserção nessa figura mostra o comportamento da amplitude sonora para um único evento.

Analogamente ao procedimento empregado para o estudo sobre emissões acústicas de carvão, definimos as séries temporais das amplitudes sonoras como

$$I(t) = \frac{A^2(t)}{\max[A^2(t)]}, \quad (3.1)$$

e as energias associadas a cada evento i são calculadas via

$$E_i = \int_{t_{ini_i}}^{t_{end_i}} I(t) dt, \quad (3.2)$$

sendo t_{ini_i} o tempo no qual o evento inicia e t_{end_i} o tempo no qual ele termina (lembramos que, na prática, empregamos a regra do trapézio para estimar essa integral – equação 2.3). Além disso, o valor de t_{ini_i} é definido como sendo o tempo para o qual $I(t)$ excede inicialmente o limiar I_{\min} e o tempo t_{end_i} é o tempo para o qual $I(t)$ se mantém abaixo de I_{\min} por mais de Δt segundos. Aqui, empregamos $I_{\min} = 5 \times 10^{-4}$, $\Delta t = 0,025s$ e descartamos os 30 segundos iniciais das gravação devido à dificuldade de identificar os eventos de maneira isolada. Numa análise separada, verificamos que a identificação dos eventos é igualmente boa se I_{\min} estiver entre 10^{-4} e 2×10^{-3} , e Δt de 0,025s a 0,2s. Também como no caso do carvão, definimos o tempo de ocorrência do evento i como

$$t_i = \frac{t_{ini_i} + t_{end_i}}{2}. \quad (3.3)$$

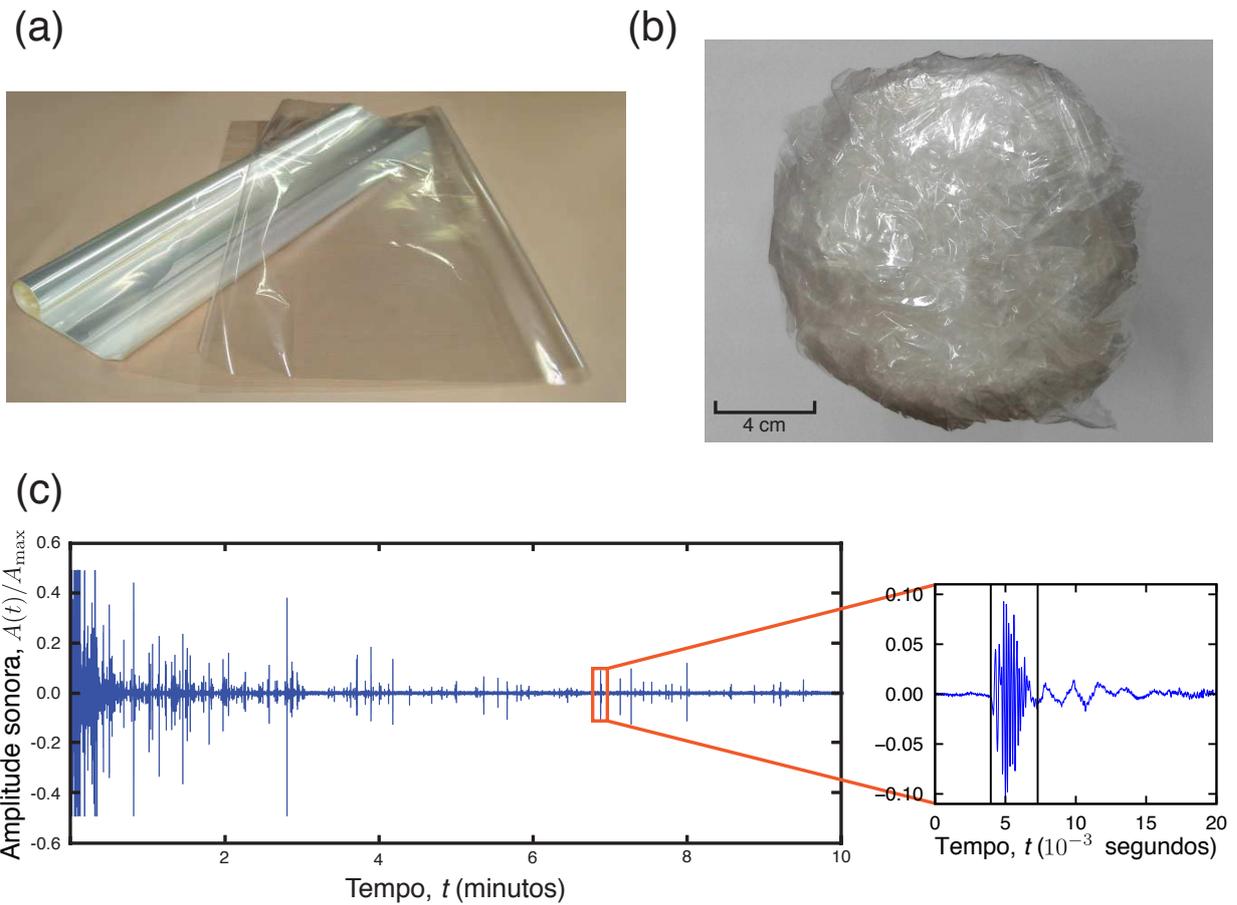


Figura 3.1: Descrição esquemática dos experimentos com as amostras de folhas plásticas. O painel (a) mostra a bobina do filme de polipropileno bi-orientado e o painel (b) ilustra uma bola de plástico típica que é formada ao amassar uma amostra de 1 metro de largura por 6 metros de comprimento. No painel (c), temos o comportamento típico das amplitudes sonoras normalizadas ($A(t)/A_{\max}$) provocadas pelas folhas plásticas amassadas. Notamos que após alguns segundos (aproximadamente 30s) é possível identificar os eventos acústicos de maneira isolada. A inserção mostra um desses eventos em detalhe.

Usando os tempos t_i e as energias E_i , compomos uma série temporal que representa o análogo dos catálogos de terremotos.

3.3 Análise dos dados

Conforme já observamos, as emissões acústicas dessas folhas plásticas têm um caráter transiente mais acentuado que aquele visto no caso do carvão (basta comparar a figura 3.1c com a figura 2.1c). Podemos analisar melhor essa diferença estudando a taxa de eventos $r(t)$ (número de eventos por unidade de tempo) ao longo do desamassar das folhas. Na figura 3.2, mostramos o comportamento médio (sobre todas as amostras) dessa taxa ao longo do tempo. Note que a taxa diminuiu sistematicamente com o tempo t . No início das emissões temos da ordem de 800 eventos por minuto e, ao final ($t \approx 40$ minutos), pouco mais de dois eventos por minuto. Além disso, nesse gráfico log-log podemos identificar um

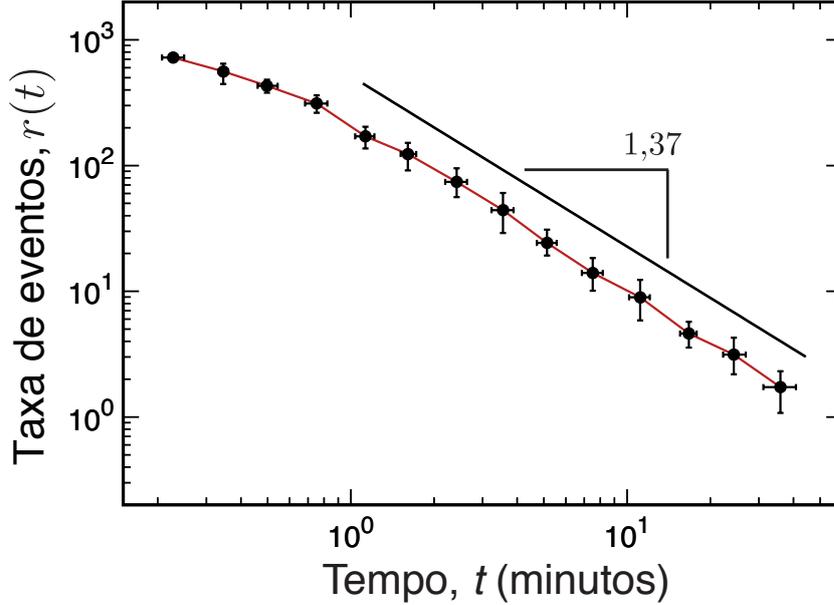


Figura 3.2: Evolução da taxa de eventos $r(t)$ (número de eventos por minuto) para as emissões acústicas de folhas plásticas. Os pontos pretos representam o valor médio de $r(t)$ calculado sobre todas as amostras e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% obtidos via *bootstrapping*. A linha contínua indica o comportamento lei de potência de $r(t)$ para $t > 1$ minuto, isto é, $r(t) \sim t^\eta$ com $\eta = 1,37 \pm 0,05$.

decaimento lei de potência para $r(t)$ a partir de $t \approx 1$ minuto. De fato, ao ajustar uma lei potência ($r(t) \sim t^\eta$) ao comportamento empírico da taxa de eventos para $t > 1$ minuto, encontramos um expoente $\eta = 1,37 \pm 0,05$. Assim, do ponto de vista da Lei de Omori, podemos imaginar (de maneira aproximada) o processo de relaxação de folhas plásticas como uma única sequência de *aftershocks*. Vale lembrar também que o comportamento não estacionário de $r(t)$ vai afetar a dinâmica dos tempos de recorrência.

Nosso próximo passo foi calcular as distribuições de energia para cada amostra. Conforme já mencionamos, esse aspecto foi investigado por outros pesquisadores em experimentos similares aos reportados aqui. Nesses trabalhos, leis de potência foram apontadas como boas descrições para a distribuição de energia, ou seja, um comportamento compatível com a Lei de Gutenberg-Richter. Por outro lado, no ano de 2015, Sun-Ting Tsai *et al.* [92] mostraram que a distribuição de Zipf-Mandelbrot fornece um ajuste melhor à distribuição de energia para folhas amassadas compostas de alumínio, polietileno e papel. Essa distribuição é definida como

$$P(E) = \frac{(\beta - 1)\varepsilon^{\beta-1}}{(E + \varepsilon)^\beta}, \quad (3.4)$$

em que β e ε são parâmetros de ajuste. Notamos que, para valores grandes de energia, temos $P(E) \sim E^{-\beta}$, que é o comportamento previsto pela Lei de Gutenberg-Richter.

Ajustamos a distribuição 3.4 aos dados empíricos obtidos para cada amostra. Na figura 3.3a, mostramos uma comparação entre a distribuição de Zipf-Mandelbrot e a dis-

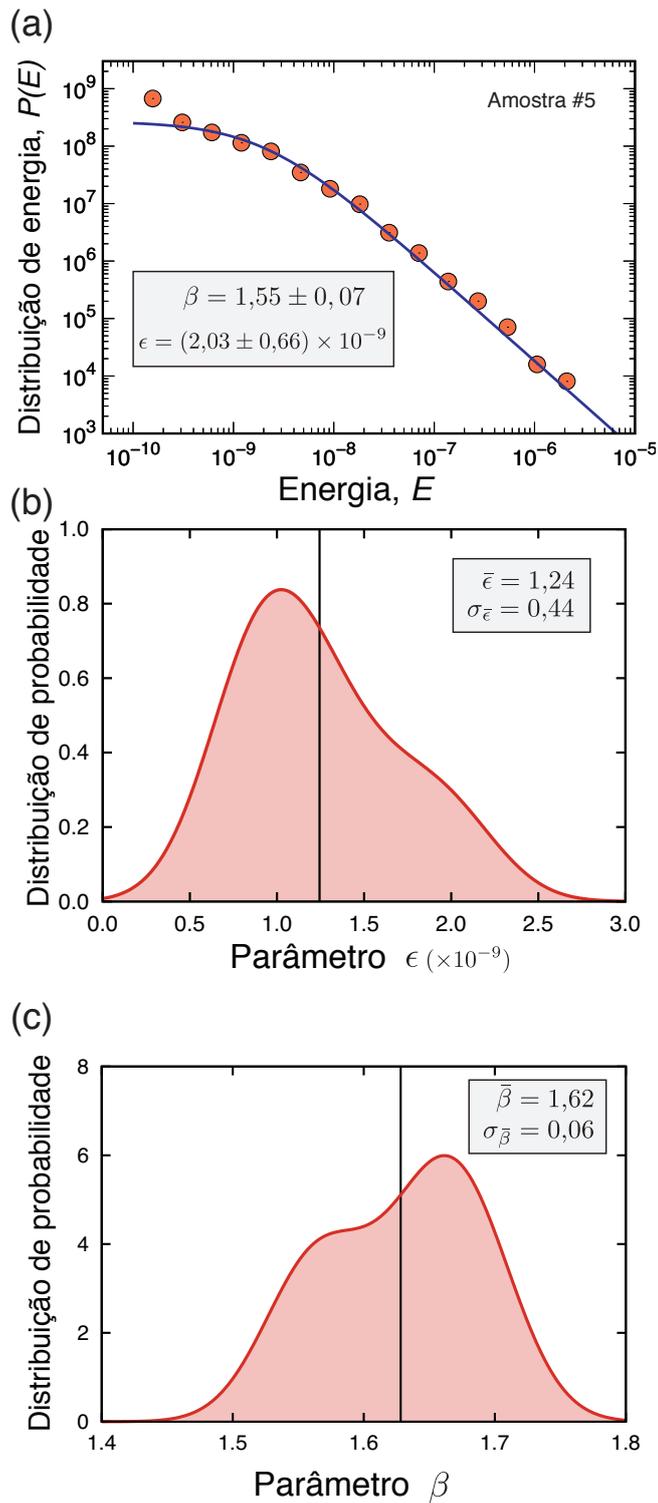


Figura 3.3: Distribuições de energia das emissões acústicas de folhas plásticas. O painel (a) mostra a distribuição de energia $P(E)$ de uma das amostras num gráfico log-log. Os pontos vermelhos representam os dados empíricos e a linha contínua é o ajuste pela distribuição de Zipf-Mandelbrot definida pela equação 3.4. Os parâmetros ϵ e β foram obtidos via máxima verossimilhança e estão indicados no gráfico. Os painéis (b) e (c) mostram as distribuições dos valores de ϵ e β obtidos para todas as amostras. Os valores médios (indicados por linhas verticais) e os desvios padrões são mostrados nos gráficos.

tribuição de energia para uma das amostras. Podemos observar que a distribuição dada pela equação 3.4 fornece um excelente resultado e, se empregarmos o teste de Kolmogorov-Smirnov (apêndice B), não podemos descartar a hipótese da distribuição de Zipf-Mandelbrot ser a verdadeira distribuição para as energias com 99% de confiança. Para a amostra da figura 3.3a, o p -valor do teste é 0,16 e para todas as demais o p -valor é superior a 0,01, indicando que a hipótese da distribuição de Zipf-Mandelbrot não pode ser rejeitada para nenhuma amostra com 99% de confiança.

Uma característica visual, que serve como indicativo do ajuste superior da distribuição de Zipf-Mandelbrot em comparação com uma lei de potência pura (isto é, $P(E) \propto E^{-\beta}$), é a curvatura para baixo das distribuições empíricas para pequenos valores de energia. Esse comportamento pode ser observado na figura 3.3a e é característico da distribuição de Zipf-Mandelbrot. Uma lei de potência pura tem apenas um comportamento linear nesse gráfico log-log e, portanto, não é capaz de descrever o comportamento dos dados para pequenas energias. Para uma comparação mais rigorosa entre uma lei de potência pura e a distribuição de Zipf-Mandelbrot, empregamos o teste da razão de verossimilhança (apêndice E). Os resultados mostram que a distribuição de Zipf-Mandelbrot fornece uma descrição superior a da lei de potência em todas as amostras, confirmando nossa argumentação visual e concordando com os resultados de Tsai *et al.* [92].

Nas figuras 3.3b e 3.3c, mostramos as distribuições de probabilidade dos parâmetros ε e β obtidos para cada amostra. Observamos que o parâmetro ε está distribuído ao redor de sua média $\bar{\varepsilon} = 1,24 \times 10^{-9}$ com desvio padrão $\sigma_{\varepsilon} = 0,44 \times 10^{-9}$. Já o parâmetro β apresenta valor médio $\bar{\beta} = 1,62$ e desvio padrão $\sigma_{\bar{\beta}} = 0,06$. Se considerarmos que o comportamento para grandes energias da distribuição de Zipf-Mandelbrot pode ser comparado diretamente ao da Lei de Gutenberg-Richter, podemos assumir que o valor de β na equação 3.4 é o mesmo que aparece na equação 1.7 da Lei de Gutenberg-Richter. Dessa maneira, o valor de médio de β está no intervalo dos valores encontrados para terremotos (β entre 1,5 e 2,1 – seção 1.1) e para o processo de amassar papel estudado por Houle e Sethna [21] (β entre 1,3 e 1,6).

Apesar da distribuição de Zipf-Mandelbrot fornecer um melhor ajuste para os dados da distribuição de energia, podemos obter uma comparação mais direta com a Lei de Gutenberg-Richter ajustando uma lei de potência à cauda das distribuições empíricas, ou seja, considerando apenas energias maiores do que um limiar E^* . Por sua vez, o melhor valor para E^* pode ser obtido empregando o método de Clauset *et al.* [93]. Conforme está descrito no apêndice F, esse método consiste em ajustar (via máxima verossimilhança) uma distribuição lei de potência ($P(E) \propto E^{-\beta'}$, sendo β' é o expoente da lei de potência) aos dados que satisfazem a condição $E > E^*$. O melhor valor para E^* , E_{min} , é aquele que minimiza a distância de Kolmogorov-Smirnov (apêndice B).

A figura 3.4a mostra a cauda da distribuição de energia (para os mesmos dados da figura 3.3a) estimada pelo método de Clauset *et al.*, em que $E_{min} = (1,32 \pm 0,02) \times 10^{-8}$ e $\beta' = 1,59 \pm 0,04$. A figura 3.4b mostra o comportamento de β' em função de E^* , em que observamos uma tendência sistemática de aumento do valor de β' com o valor E^* (comportamentos muito

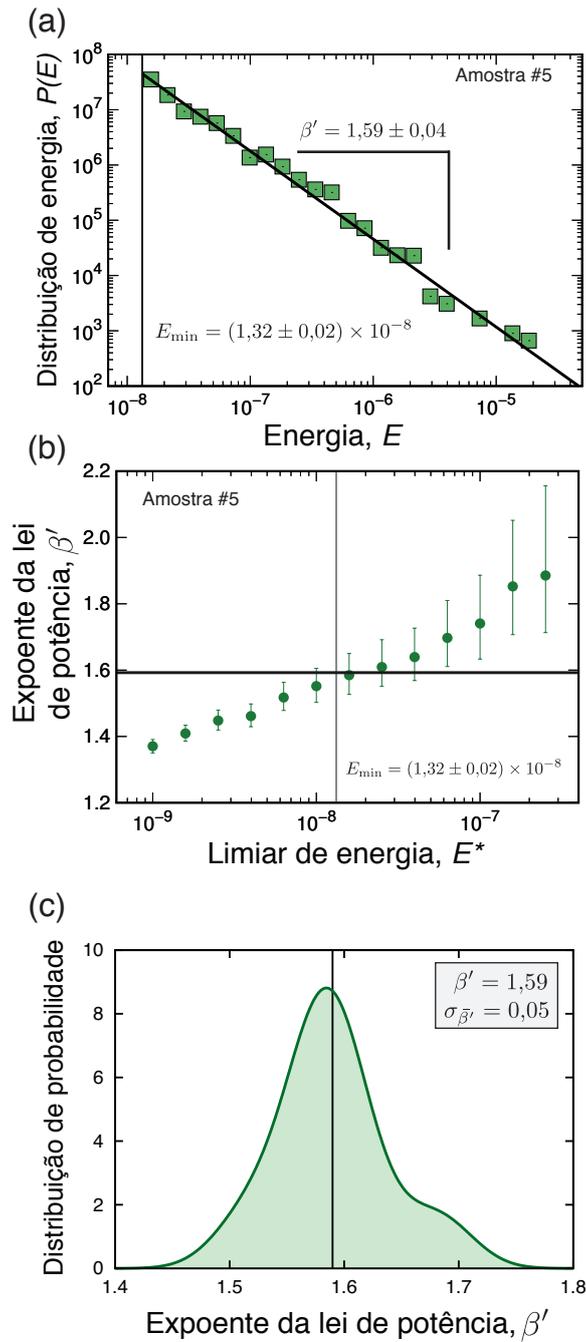


Figura 3.4: Comportamento de cauda das distribuições de energia. O painel (a) mostra a cauda da distribuição de energia considerando apenas energias superiores ao limiar E_{\min} para uma das amostras. Os valores de $E_{\min} = (1,32 \pm 0,02) \times 10^{-8}$ e $\beta' = 1,59 \pm 0,04$ foram obtidos pelo método de Clauset *et al.* [93] (apêndice F). Nesse gráfico, os quadrados em verde representam a distribuição empírica e a linha contínua mostra o ajuste pela lei de potência $P(E) \propto E^{-\beta'}$ (com $E > E_{\min}$). O painel (b) ilustra como o expoente β' depende do limiar de energia E^* . Nesse gráfico, a linha vertical indica o valor $E^* = E_{\min}$ que minimiza a distância de Kolmogorov-Smirnov e a linha horizontal representa o valor de β' correspondente. Além disso, as barras de erro indicam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. O painel (c) mostra a distribuição dos valores de β' obtidos para todas as amostras. Os valor médio (β' , indicado por uma linha vertical) e o desvio padrão de β' ($\sigma_{\beta'}$) são mostrados no gráfico.

similares ocorrem para todas as amostras). Esse aumento de β' com o limiar E^* também é um indicativo do melhor ajuste da distribuição de Zipf-Mandelbrot, visto que a equação 3.4 apresenta um comportamento côncavo. Por outro lado, esse aumento sistemático de E^* difere do comportamento observado para terremotos (figura 1.3) e para as emissões acústicas de carvão (figura 2.5). Com relação aos valores de β' , a figura 3.4c mostra a distribuição de β' considerando todas as amostras. Notamos que β' tem valor médio $\bar{\beta}' = 1,59$ e desvio padrão $\sigma_{\bar{\beta}'} = 0,04$, ou seja, valores muito próximos daqueles encontrados para β . Desse modo, podemos considerar a comparação do parâmetro β da distribuição de Zipf-Mandelbrot com os valores de β da Lei de Gutenberg-Richter equivalente à comparação com β' .

Passaremos a caracterizar os tempos de recorrência relacionados às séries temporais das energias. Conforme já apresentamos, o tempo de recorrência τ é o intervalo de tempo separando dois eventos acústicos com energia maior que E_{\min} . A figura 3.5a mostra as distribuições de probabilidade $P(\tau)$ dos tempos de recorrência calculadas para uma amostra e diferentes valores de E_{\min} (comportamentos análogos são observados para todas as amostras). Diferentemente do comportamento que observamos para o carvão (figura 2.7), a dependência da distribuição $P(\tau)$ com relação aos valores de E_{\min} é mais sutil, apesar de termos verificado que o valor médio de τ aumenta com E_{\min} . Esse comportamento reflete a não estacionariedade da taxa de eventos $r(t)$ que já verificamos na figura 3.2. Além disso, podemos notar que as distribuições assemelham-se a leis de potência.

Apesar dessa complexidade adicional introduzida pela não estacionariedade de $r(t)$, ainda podemos calcular a taxa média de eventos $\langle r \rangle$ e reescalar os tempos de recorrência usando $\tau' = \tau \langle r \rangle$. Na figura 3.5b mostramos a distribuição de τ' para os mesmos limiares E_{\min} empregados na figura 3.5a. Apesar da sutil dependência de $P(\tau)$ com E_{\min} , podemos afirmar que as distribuições dos tempos reescalados são praticamente idênticas, ou seja, um excelente colapso é observado. Entretanto, a forma da distribuição $P(\tau')$ não se parece com a distribuição gama reportada para terremotos e também para as emissões acústicas de carvão (figuras 1.8 e 2.8). De fato, as distribuições $P(\tau')$ tem a forma de uma lei de potência a partir de um certo valor de $\tau' = \tau'_{\min}$, isto é,

$$P(\tau') \propto (\tau')^{-\gamma} \quad (3.5)$$

para $\tau' > \tau'_{\min}$, com γ sendo o expoente dessa lei de potência. Para verificar essa hipótese de maneira mais rigorosa, agregamos os valores de τ' para todos valores de E_{\min} . Usando esses dados agregados, aplicamos o procedimento de Clauset *et al.* (apêndice F) para obter τ'_{\min} , γ e o p -valor do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada amostra. Todos os p -valores obtidos são maiores que 0,05, indicando que a hipótese lei de potência (para $\tau' > \tau'_{\min}$) não pode ser rejeitada. A linha tracejada na figura 3.5b mostra o comportamento lei de potência ajustado à distribuição $P(\tau')$, na qual encontramos $\tau'_{\min} = 0,013 \pm 0,002$ e $\gamma = 1,42 \pm 0,01$ para uma amostra. Um comportamento bastante similar é observado para todas as amostras. A distribuição dos valores de γ para todas as amostras está descrita na figura 3.5c, em que

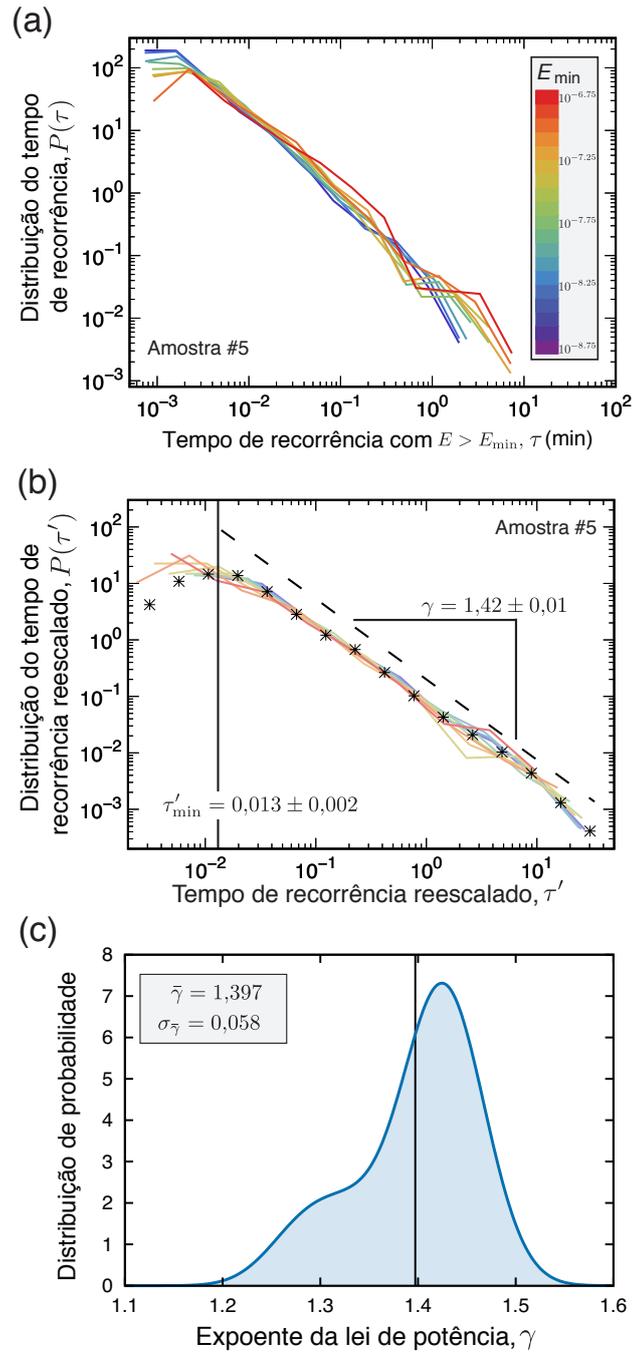


Figura 3.5: Distribuições dos tempos de recorrência para as emissões acústicas de folhas plásticas. Cada curva mostrada no painel (a) representa uma distribuição $P(\tau)$ para os tempos de recorrência τ (em minutos) para um limiar de energia E_{\min} (indicado pelo código de cores), considerando dados de uma das amostras. No painel (b) temos as distribuições dos tempos de recorrência reescalados $\tau' = \langle r \rangle \tau$ para os mesmos dados do painel (a). As marcas na forma de asterisco mostram a distribuição dos valores de τ' agregados para todos os limiares E_{\min} . A linha vertical indica o início do regime lei de potência ($\tau'_{\min} = 0,013 \pm 0,002$) e a linha tracejada mostra a lei de potência ajustada aos dados com $\gamma = 1,42 \pm 0,01$. O painel (c) mostra a distribuição de probabilidade dos valores de γ obtidos para todas as amostras. O valor médio de γ ($\bar{\gamma}$, indicado pela linha vertical) e seu desvio padrão ($\sigma_{\bar{\gamma}}$) são mostrados no gráfico.

encontramos o valor médio de γ igual 1,39 com desvio padrão de 0,06.

Do ponto de vista da equação 1.16, na qual a distribuição de tempos entre eventos é modelada apenas como uma consequência da Lei de Omori (isto é, assumindo que toda a série temporal das energias represente uma única sequência de *aftershocks*), devemos esperar que o expoente γ (da equação 3.5) esteja relacionado ao expoente p da Lei de Omori via $\gamma = 2 - 1/p$. Isso implica que o expoente p da Lei de Omori para as emissões acústicas de folhas plástica deve ser próximo 1,7. Conforme veremos logo adiante, essa previsão não é verdadeira, o que indica que a série temporal das energias é mais do que uma única sequência de *aftershocks*.

Dando seguimento à caracterização das emissões acústicas, vamos analisar a Lei de Omori. Similarmente ao caso do carvão, definimos os *mainshocks* como eventos de energia E_{ms} no intervalo $[10^{\epsilon_j}, 10^{\epsilon_{j+1}}]$, sendo $\epsilon_j = -8,75, -8,50, -8,25, \dots, -6,75$. Já as sequências de *aftershocks* são formadas pelos eventos que seguem um *mainshock* até que um evento de energia superior a do *mainshock* surja. De posse das sequências de *aftershocks*, calculamos a taxa de ocorrência de *aftershocks* $R_a(t_{\text{ms}})$ em função do tempo t_{ms} que separa um *aftershock* do *mainshock* correspondente. Na figura 3.6, mostramos o comportamento de $R_a(t_{\text{ms}})$ para uma dada amostra e para todas as janelas de energia. Observamos que $R_a(t_{\text{ms}})$ segue a Lei de Omori ($R_a(t_{\text{ms}}) \sim t_{\text{ms}}^{-p}$) por aproximadamente 4 décadas da escala logarítmica nos eixos horizontal e vertical. Para essa amostra encontramos $p = 0,88 \pm 0,03$ e um comportamento análogo é observado para as demais amostras. A figura 3.6b mostra a distribuição dos valores de p obtidos para todas as amostras, sendo que p tem uma média $\bar{p} = 0,87$ e desvio padrão $\sigma_{\bar{p}} = 0,03$. Esse valor médio é ligeiramente menor do que os reportados para terremotos ($p \in [0,9, 1,5]$) e coincide com o valor que encontramos para os experimentos com carvão (para $t_{\text{ms}} < 0,1$ minutos – figura 2.9).

Nesse mesmo contexto, analisamos também as taxas de *foreshocks*. A figura 3.7a mostra o comportamento da taxa de *foreshocks* $R_f(t_{\text{ms}})$ em função do tempo t_{ms} até o *mainshock* para a mesma amostra da figura 3.6a. Novamente um decaimento lei de potência compatível com a Lei de Omori é observado por mais de 4 décadas. Para essa amostra encontramos $p = 0,93 \pm 0,02$, sendo que a distribuição dos valores de p de todas as amostras é mostrada na figura 3.6a. O valor médio do expoente de Omori para os *foreshocks* é 0,85 com desvio padrão de 0,03, ou seja, um valor estatisticamente indistinguível daquele que encontramos para os *aftershocks*.

Ainda sobre as sequências de *aftershocks*, passaremos a caracterizar a Lei de Produtividade. Conforme já discutimos (seção 1.4), essa lei afirma que a relação entre o número de *aftershocks* N_a e a energia E_{ms} do *mainshock* é dada por (equação 1.19)

$$N_a \sim E_{\text{ms}}^\alpha, \quad (3.6)$$

sendo α o expoente de produtividade. Empregando as mesmas definições para *mainshock* e *aftershock* usadas na Lei de Omori, calculamos o número de *aftershocks* N_a desencadea-

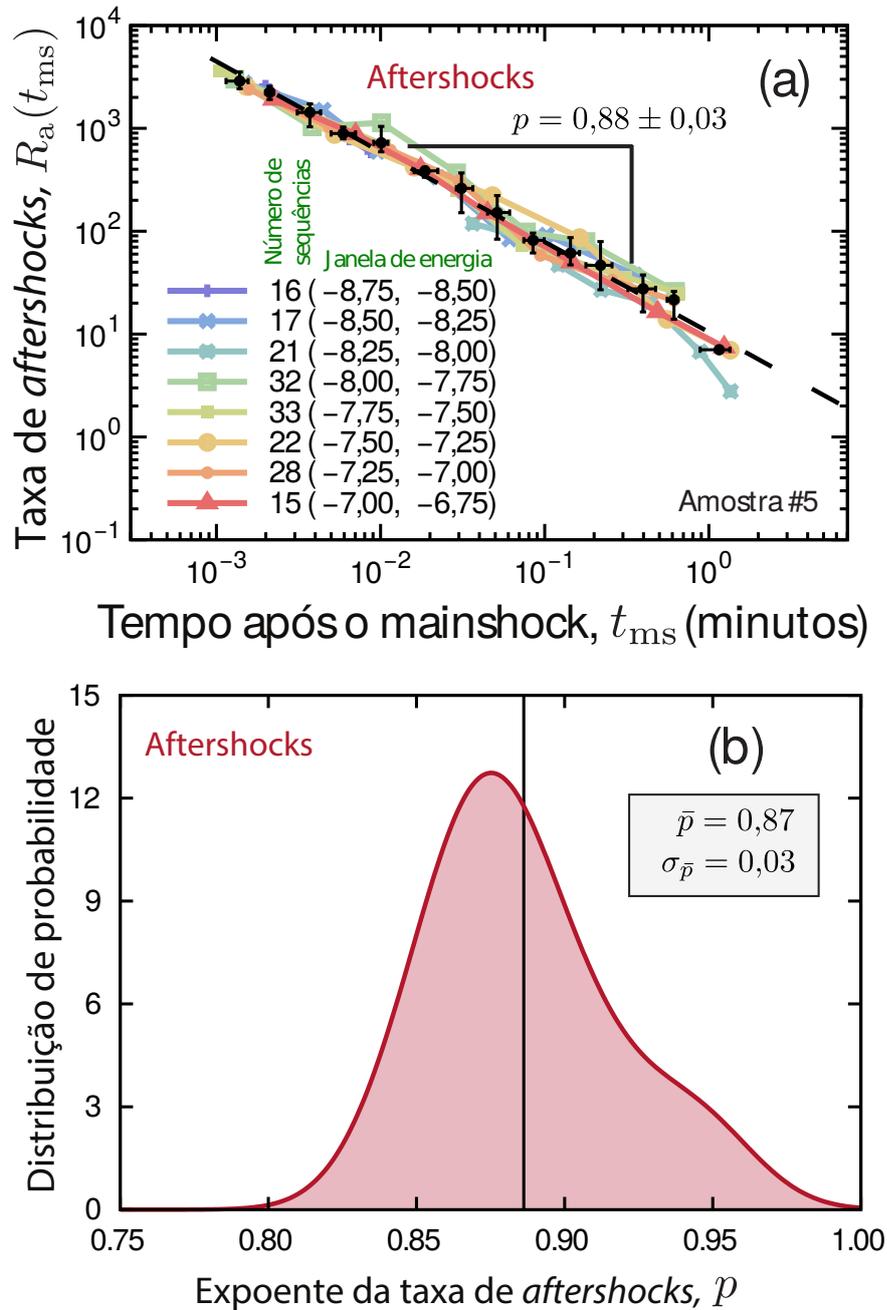


Figura 3.6: Lei de Omori para as taxas de *aftershocks* relacionadas às emissões acústicas de folhas plásticas. Cada curva colorida do painel (a) mostra o comportamento da taxa de *aftershocks* R_a em função do tempo t_{ms} para uma janela de energia, todas referentes a uma mesma amostra. O número de seqüências em cada janela (bem como a janela) está indicado no gráfico. Os pontos pretos são os valores médios de todas as curvas e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. A linha tracejada representa a lei de potência ajustada aos dados, com expoente $p = 0,88 \pm 0,03$. O painel (b) mostra a distribuição de probabilidade dos valores de p obtidos para todas as amostras. O valor médio de p (\bar{p} , indicado por uma linha vertical) e seu desvio padrão ($\sigma_{\bar{p}}$) são mostrados no gráfico.

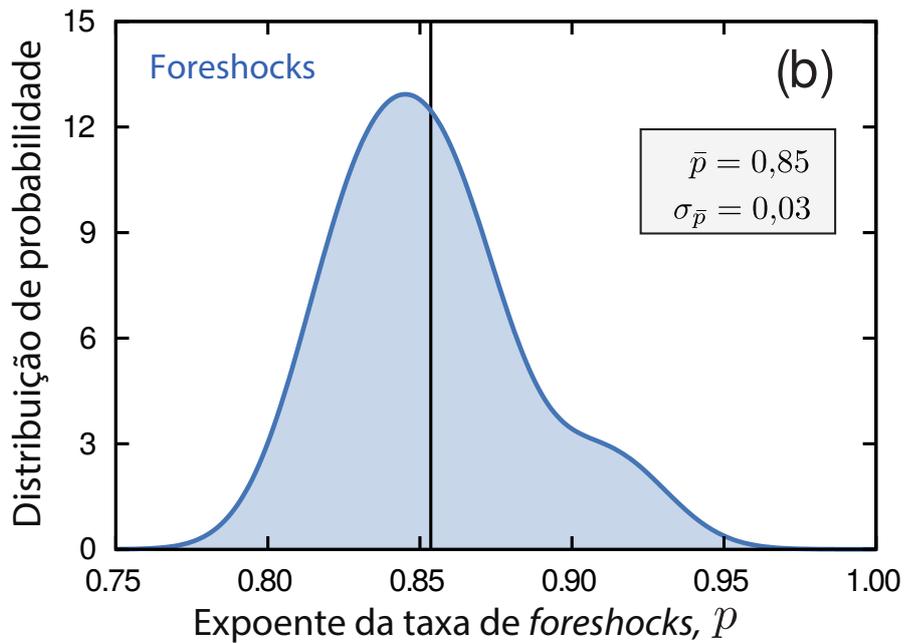
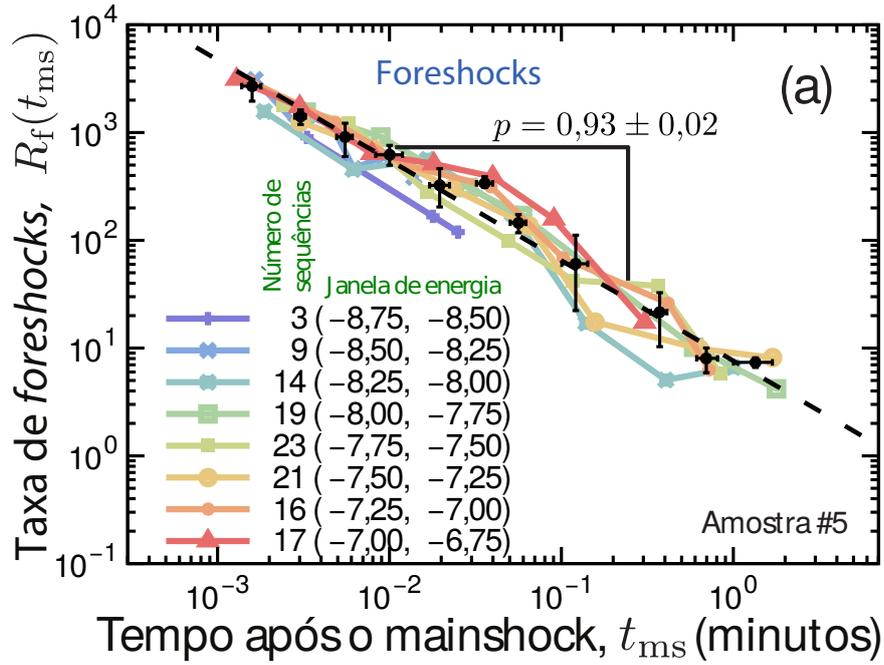


Figura 3.7: Lei de Omori para as taxas de *foreshocks* relacionadas às emissões acústicas de folhas plásticas. Cada curva colorida do painel (a) mostra o comportamento da taxa de *foreshocks* R_f em função do tempo t_{ms} para uma janela de energia, todas referentes a uma mesma amostra. O número de seqüências em cada janela (bem como a janela) está indicado no gráfico. Os pontos pretos são os valores médios de todas as curvas e as barras de erro são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. A linha tracejada representa a lei de potência ajustada aos dados, com expoente $p = 0,93 \pm 0,02$. O painel (b) mostra a distribuição de probabilidade dos valores de p obtidos para todas as amostras. O valor médio de p (\bar{p} , indicado por uma linha vertical) e seu desvio padrão $\sigma_{\bar{p}}$ são mostrados no gráfico.

dos por um *mainshock* com energia E_{ms} em cada experimento com as folhas plásticas. A figura 3.8a mostra a relação empírica entre N_a e E_{ms} em escala log-log para uma amostra. Nessa figura, cada ponto cinza está relacionado à uma sequência de *aftershocks* e os pontos vermelhos representam valores médios calculados em janelas igualmente espaçadas no logaritmo da energia E_{ms} . Podemos observar uma tendência linear (na escala log-log), a qual é um indicativo para a relação lei potência expressa pela Lei de Produtividade. De fato, ao ajustarmos a Lei de Produtividade (equação 3.6) aos dados dessa amostra, encontramos $\alpha = 0,44 \pm 0,02$. A linha tracejada da figura 3.8a revela que o ajuste é uma excelente descrição para os valores médios. Resultados bastante similares são encontrados para as demais amostras. A figura 3.8b mostra a distribuição de probabilidade dos valores de α obtidos para todas as amostras, em que encontramos que o expoente de produtividade tem valor médio $\bar{\alpha} = 0,54$ e desvio padrão $\sigma_{\bar{\alpha}} = 0,05$. Esse valor é maior do que o encontrado para as amostras de carvão (para pequenos valores de E_{ms}) e menor que os valores típicos para terremotos (α entre 0,7 e 0,9). Assim, comparado ao carvão, podemos afirmar que a redistribuição das tensões causadas pelos *mainshocks* tem uma escala maior de ação, o que concorda com a ideia (discutida no capítulo 2) de vários sítios de crepitação atuando independentemente nas amostras de carvão.

Para finalizar nossa caracterização das sequências de *aftershocks*, vamos investigar a Lei de Båth (seção 1.4). Lembramos, mais uma vez, que essa lei afirma que a diferença entre a magnitude (que é proporcional a $\log E$) de um *mainshock* e seu maior *aftershock* é (em média) igual a 1,2 e não depende da energia do *mainshock* (equação 1.20). Apesar do caráter universal que ocasionalmente é atribuído a essa lei, lembramos que sua validade estrita depende de outros parâmetros fundamentais, como discutimos nas equações 1.21 e 1.22. Para estudar essa lei nas emissões acústicas de folhas plásticas, calculamos a diferença $\Delta m = \log(E_{\text{ms}}) - \log(E_{1a})$ (aqui E_{1a} é a energia do maior *aftershock* da sequência de *aftershocks*) como função da energia E_{ms} para todas as sequências de *aftershocks* (definidas como na Lei de Omori) para cada amostra. A figura 3.9a mostra o valor médio da magnitude relativa $\langle \Delta m \rangle$ em função da energia E_{ms} do *mainshock* para uma amostra. Observamos que $\langle \Delta m \rangle$ é independente de E_{ms} e pode ser aproximado por um valor constante $\langle \Delta m \rangle = 0,54 \pm 0,05$ para essa amostra. As demais amostras apresentam um comportamento muito similar. A figura 3.9b mostra a distribuição de probabilidade dos valores de $\langle \Delta m \rangle$ calculados para cada amostra, em que um valor médio $\overline{\langle \Delta m \rangle} = 0,53$ e um desvio padrão $\sigma_{\overline{\langle \Delta m \rangle}} = 0,04$ são observados. Vale notar que esse valor médio é muito menor que o previsto pela Lei de Båth original e o obtido para as amostras de carvão.

3.4 Conclusões e perspectivas

Nesse capítulo, apresentamos uma ampla caracterização das emissões acústicas ao longo do desamassar de folhas plásticas. Nossa análise buscou caracterizar as leis sísmicas mais fundamentais nesse processo. Assim, acreditamos que nossos estudos preenchem um hiato na

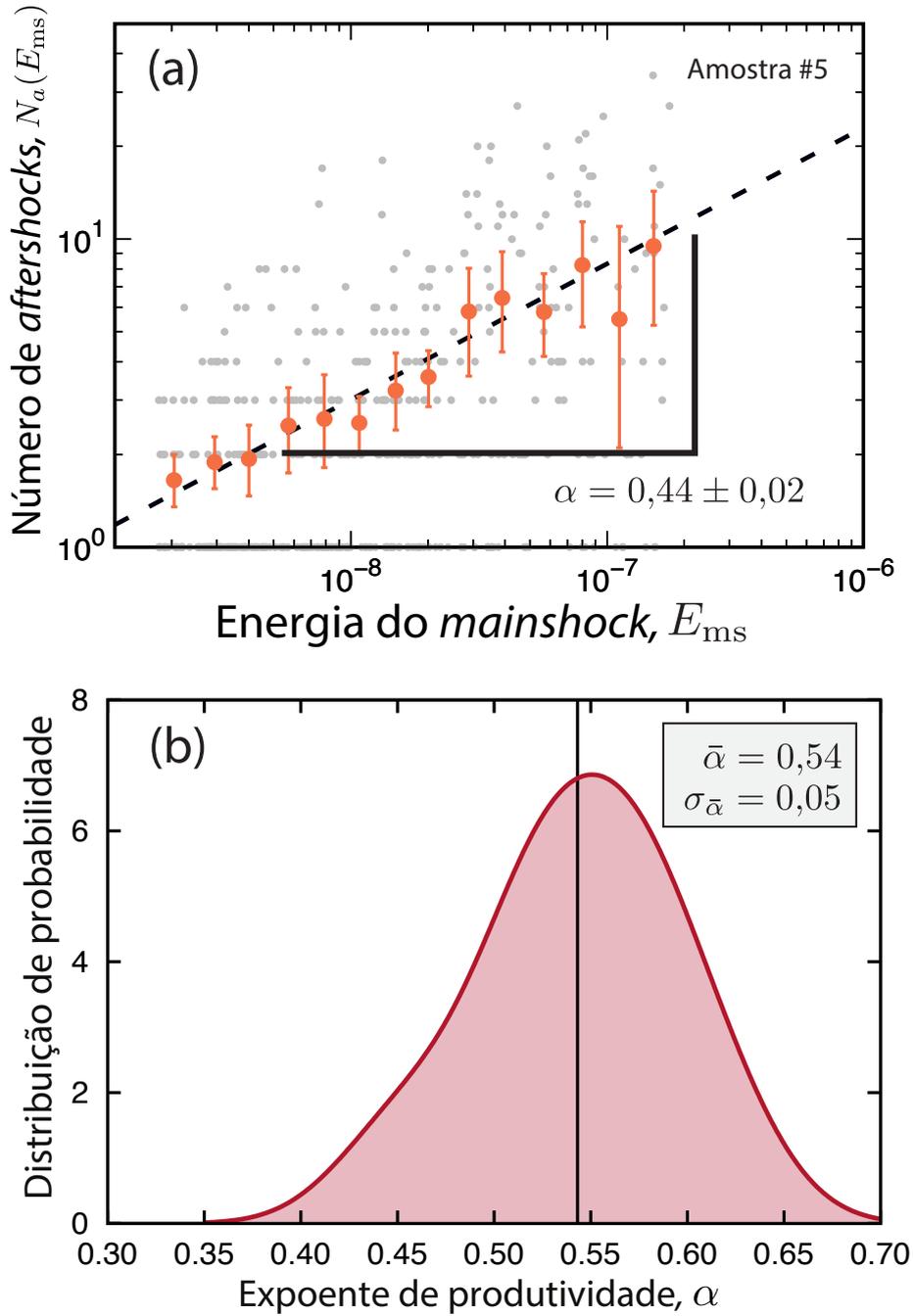


Figura 3.8: A Lei de Produtividade para as emissões acústicas de folhas plásticas. O painel (a) mostra a relação entre o número de *aftershocks* N_a e a energia E_{ms} do *mainshock* em escala log-log. Cada ponto cinza corresponde a uma sequência de *aftershocks* (como definido na Lei de Omori) para uma amostra. Os círculos vermelhos são os valores médios calculados em 15 janelas igualmente espaçadas no logaritmo da energia E_{ms} e as barras de erros são intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. A linha tracejada mostra o ajuste lei de potência, $N_a(E_{ms}) \sim E_{ms}^\alpha$, com $\alpha = 0,44 \pm 0,02$. O painel (b) mostra a distribuição dos expoentes de produtividade α obtidos para todas as amostras. O valor médio do expoente $\bar{\alpha}$ (indicado pela linha vertical) e seu desvio padrão $\sigma_{\bar{\alpha}}$ são mostrados no gráfico.

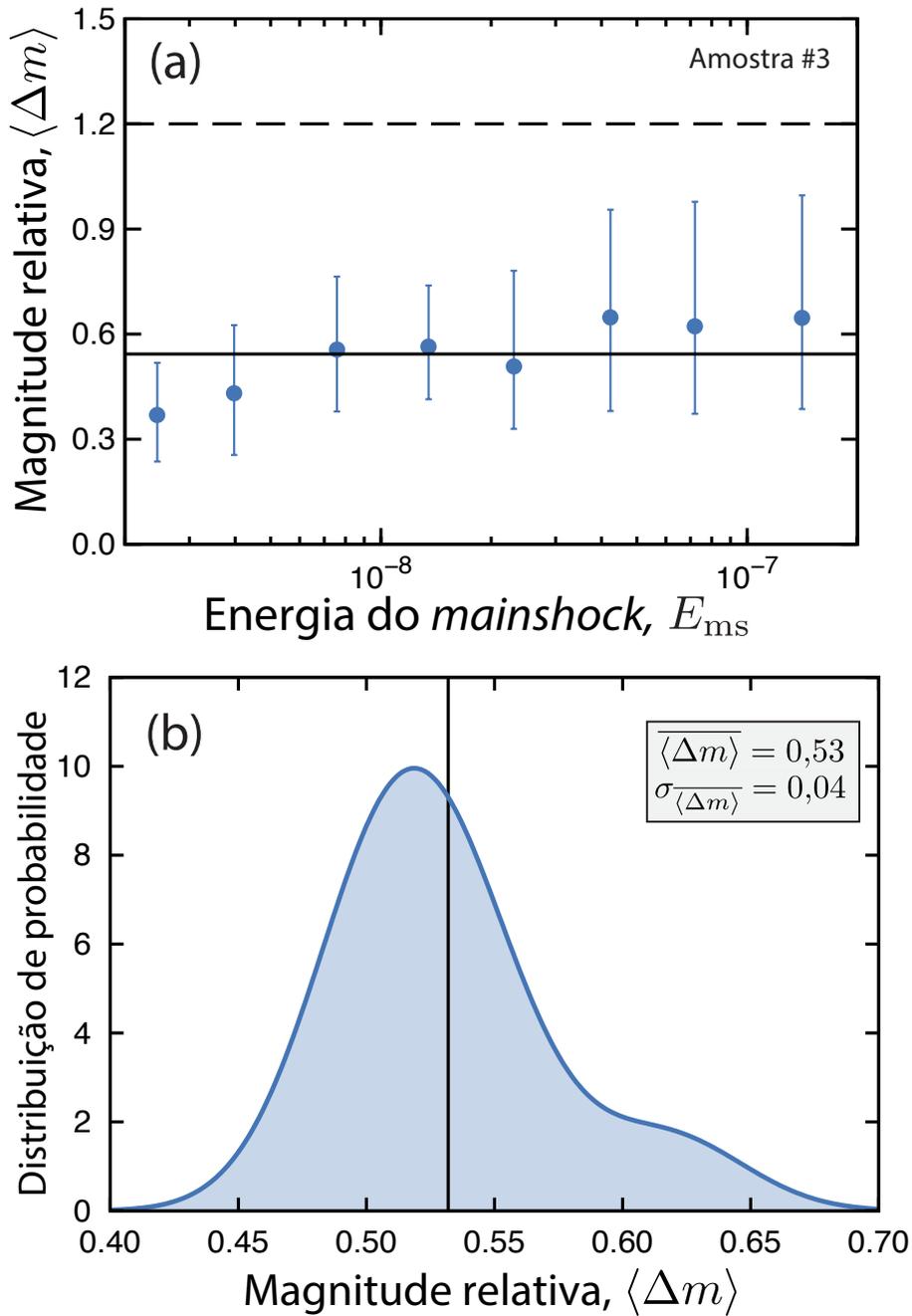


Figura 3.9: Lei de Bãth para as emissões acústicas de folhas plásticas. O painel (a) mostra o valor médio da diferença entre a magnitude de um *mainshock* e seu maior *aftershock* em função da energia E_{ms} do *mainshock*, isto é, $\langle \Delta m \rangle = \langle \log(E_{ms}) - \log(E_{1a}) \rangle$. Os pontos em azul são os valores médios de Δm calculados em janelas igualmente espaçadas (na escala logarítmica) da energia E_{ms} para uma das amostras. Aqui as barras de erro indicam intervalos de confiança a 95% calculados via *bootstrapping*. A linha tracejada representa a previsão da Lei de Bãth ($\langle \Delta m \rangle = 1,2$) e a linha contínua é o valor médio Δm sobre todas as janelas de energia ($\langle \Delta m \rangle = 0,54 \pm 0,02$). O painel (b) mostra a distribuição de probabilidade dos valores de $\langle \Delta m \rangle$ obtidos para todas as amostras. O valor médio de $\langle \Delta m \rangle$ ($\langle \langle \Delta m \rangle \rangle$) e seu desvio padrão ($\sigma_{\langle \Delta m \rangle}$, indicado pela linha vertical) estão indicados no gráfico.

literatura, no sentido que apresentamos uma primeira descrição mais completa das emissões acústicas em folhas plásticas. Conforme mencionamos, as investigações anteriores haviam caracterizado apenas a Lei de Gutenberg-Richter. Aqui, além dessa lei, investigamos as distribuições dos tempos entre eventos, a Lei de Omori, a Lei de Produtividade e a Lei Bâth.

Nossos resultados indicam que as leis sísmicas mais fundamentais também surgem no contexto dos ruídos causados por folhas plásticas desamassando. Entretanto, os parâmetros associados à essas leis (na maioria dos casos) são diferentes daqueles reportados para terremotos ou para experimentos com fraturas de materiais. Esse resultado indica que esse processo de relaxação apresenta características únicas, o que pode ser útil para caracterização desses filmes plásticos e também para testar modelos usualmente empregados na descrição de terremotos.

Como perspectivas para futuras investigações, podemos citar os efeitos de memória que essas folhas plásticas apresentam. Por exemplo, poderíamos buscar entender o que ocorre com essas emissões acústicas ao amassar e desamassar essas folhas plásticas por mais de uma vez. Além disso, poderíamos estudar configurações mais complexas, amassando mais de uma camada dessas folhas ou combinando diferentes materiais plásticos com diferentes densidades e propriedades elásticas.

Conclusões e panorama geral

Nessa tese, analisamos as emissões acústicas produzidas por dois sistemas distintos: carvão vegetal umedecido em etanol e folhas plásticas amassadas [41,42]. Nosso estudo procurou por similaridades estatísticas entre os ruídos crepitantes produzidos por esses dois sistemas e abalos sísmicos. Para isso, no capítulo 1, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre as principais leis empíricas que regem a estatística de terremotos, as quais são (e afirmam que): *i*) a Lei de Gutenberg-Richter (as energias estão distribuídas como uma lei de potência); *ii*) a Lei de Omori (a taxa de *aftershocks* decai como uma lei de potência do tempo); *iii*) as leis sobre o tempo entre eventos (a distribuição dos tempos entre eventos reescalados é descrita por uma distribuição gama); *iv*) a Lei de Produtividade (o número de *aftershocks* apresenta uma relação lei de potência com a energia do *mainshock*); e a Lei de Bâth (a diferença entre as magnitudes de um *mainshock* e seu maior *aftershock* é, em média, 1,2). No capítulo 2, caracterizamos todas essas leis sísmicas usando dados sobre a dinâmica das emissões acústicas de carvão vegetal umedecido em etanol. Verificamos, essencialmente, que essas leis sísmicas também surgem nesse sistema, ainda que a causa dos ruídos crepitantes tenha origem numa tensão interna, transiente e distribuída de maneira irregular. Similarmente, no capítulo 3, embora também tenhamos encontrado certas discrepâncias, verificamos que as emissões acústicas no processo de desamassar folhas plásticas também podem ser descritas pelas leis sísmicas. Tanto para o carvão quanto para as folhas plásticas, observamos que muitas das leis sísmicas apresentam parâmetros que são quantitativamente idênticos aos reportados para terremotos. A tabela 3.1 resume nossos resultados. Ainda que não tenha sido nosso enfoque, essas similaridades podem encontrar aplicações para a modelagem de terremotos em laboratório visando a encontrar mecanismos de previsão desses fenômenos. Além disso, de um ponto de vista mais formal, essas similaridades que encontramos reforçam a universalidade dessas leis sísmicas, mostrando que elas podem ser aplicadas em escalas de espaço e tempo muito distintas.

Lei sísmica	Terremotos	Carvão [41]	Plástico [42]
Gutenberg-Richter	$\beta = 1,67$ [49]	$\beta = 1,30$	$\beta = 1,55 \pm 0,07$
Tempo entre eventos	$\gamma \simeq 0,7$ e $a \simeq 1,4$ [59]	$\gamma = 0,69 \pm 0,08$ e $a = 1,5 \pm 0,12$	$\gamma' = 1,39 \pm 0,06$
Omorì	$p \simeq 1$ [55]	$p = 0,85 \pm 0,01$	$p = 0,88 \pm 0,03$
Produtividade	$\alpha = 0,7 - 0,9$ [76]	$\alpha = 0,3, 0,81$	$\alpha = 0,44 \pm 0,02$
Bâth	$\langle \Delta m \rangle \simeq 1,2$ [77]	$\langle \Delta m \rangle \simeq 1,2$	$\langle \Delta m \rangle \simeq 0,53$

Tabela 3.1: Comparação entre os parâmetros de cada lei sísmica para terremotos, carvão e folhas plásticas.

Função de correlação

Um das medidas de correlação mais comum é o coeficiente de correlação de Pearson [94], que avalia a relação linear entre dois conjuntos de variáveis contínuas, $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$, caracterizando quando a mudança de uma reflete numa mudança da outra. Esse coeficiente é definido como

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (\text{A.1})$$

em que $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ são valores médios de $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$. O valor de r está sempre entre -1 e 1 , sendo que $r = 1$ significa que a relação linear entre o conjunto $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ é perfeitamente crescente e, para $r = -1$, temos uma relação linear perfeitamente decrescente.

Embora a equação A.1 se refira a dois conjuntos de dados, o coeficiente de Pearson também pode ser calculado para uma única série temporal. Nesse caso, o interesse é verificar como os elementos dessa série estão relacionados como seus próprios elementos defasados em uma ou mais unidades de tempo. Para exemplificar, consideremos uma série temporal z_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) e suponha que desejamos analisar como os elementos imediatamente espaçados estão correlacionados. Para isso, basta usar os conjuntos $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ como $x_i = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ e $y_i = \{z_2, z_3, \dots, z_n\}$ e aplicar o coeficiente de Pearson, isto é,

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - \bar{x})(z_{i+1} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - \bar{x})^2 (z_{i+1} - \bar{y})^2}}. \quad (\text{A.2})$$

Para o caso em que a série temporal z_i é estacionária (ou seja, sua distribuição de probabilidade não depende do tempo) e n é grande o suficiente, podemos supor que $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ e

$\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - \bar{y})^2$, conduzindo a

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - \bar{z})(z_{i+1} - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - \bar{z})^2}}, \quad (\text{A.3})$$

com $\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i$. Podemos generalizar a expressão A.3 para elementos defasados por k unidades temporais, obtendo

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (z_i - \bar{z})(z_{i+k} - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} (z_i - \bar{z})^2}}, \quad (\text{A.4})$$

a qual também pode ser escrita como

$$r_k = \frac{c_k}{c_o}, \quad (\text{A.5})$$

com

$$c_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} (z_i - \bar{z})(z_{i+k} - \bar{z}) \quad (\text{A.6})$$

sendo a covariância da série e c_o a variância da série temporal z_t . A expressão A.5 é conhecida como coeficiente de autocorrelação defasado em k unidades de tempo.

Para o caso de tempo contínuo, devemos substituir a série z_i pela variável estocástica $x(t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Além disso, a covariância de $x(t)$ passa a ser

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle, \quad (\text{A.7})$$

com $\langle \dots \rangle$ representando o valor médio sobre um conjunto (muito grande) de realizações do processo estocástico gerador de $x(t)$. Assim, o análogo da expressão A.5 para o caso contínuo é

$$R(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)}. \quad (\text{A.8})$$

Essa expressão é conhecida como função de autocorrelação.

A forma contínua da expressão A.8 é conveniente para classificar o tipo de memória existente na série temporal $x(t)$. Isso pode ser feito analisando a integral [3]

$$\int_0^\infty R(\tau) d\tau \quad (\text{A.9})$$

nas duas situações típicas descritas a seguir.

1. Se $R(\tau)$ decair exponencialmente com τ , isto é,

$$R(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right), \quad (\text{A.10})$$

a integral A.9 é finita. Especificamente, temos

$$\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \propto \tau_c \quad (\text{A.11})$$

e, nesse caso, dizemos que a correlação é de curto alcance, uma vez que existe um tempo de memória característico para o processo estocástico (τ_c).

2. Se $R(\tau)$ decair como uma lei de potência de τ , isto é,

$$R(\tau) \propto \tau^{\eta-1}, \quad (\text{A.12})$$

com $0 < \eta \leq 1$. Nesse caso, a integral A.9 diverge ($\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \rightarrow \infty$) e não temos um tempo de memória característico para o processo estocástico $x(t)$. Quando isso ocorre, dizemos que a correlação é de longo alcance.

Teste de hipótese de Kolmogorov-Smirnov

Ao analisar um conjunto de dados, frequentemente precisamos verificar se uma dada distribuição de probabilidade é uma boa descrição para a distribuição empírica dos dados. Em estatística, essa questão pode ser respondida usando os chamados testes de qualidade do ajuste (*goodness of fit*) [95]. Existem muitos métodos com essa finalidade e um deles é o teste de Kolmogorov-Smirnov [95]. Para apresentar esse método, consideremos um conjunto de dados $A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e alguma distribuição de probabilidade contínua $f(x)$, cuja distribuição acumulada é

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy. \quad (\text{B.1})$$

Usando os dados, podemos estimar a distribuição acumulada empírica $S_n(x)$ usando

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i), \quad (\text{B.2})$$

sendo $I(X_i)$ uma função que retorna 1 se $X_i \leq x$ e 0 caso contrário. Notamos que $S_n(x)$ representa a fração de elementos em A que são menores que x .

Usando $F(x)$ e $S_n(x)$, vamos definir a distância de Kolmogorov-Smirnov (também chamada de estatística do teste) como

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - S_n(x)|, \quad (\text{B.3})$$

na qual $\sup_{x \in \mathbb{R}}$ é o maior valor do conjunto das distâncias. O teste de Kolmogorov-Smirnov está baseado nessa distância D_n para afirmar se distribuição teórica $F(x)$ é uma boa descrição para a distribuição empírica $S_n(x)$. Numa linguagem estatística, devemos decidir entre as

seguintes hipóteses:

$$H_0 : S_n(x) = F(x) \tag{B.4}$$

$$H_1 : S_n(x) \neq F(x), \tag{B.5}$$

sendo H_0 a hipótese nula e H_1 a hipótese alternativa. Nessa linguagem, o teste de Kolmogorov-Smirnov fornece o seguinte resultado:

Não podemos rejeitar H_0 se $D_n \leq c_\alpha$.

Não podemos rejeitar H_1 se $D_n > c_\alpha$.

O valor limiar c_α depende do nível de significância α adotado e pode ser encontrado em tabelas [96]. Por exemplo, para termos 95% ($\alpha = 0,05$) de probabilidade do teste de hipótese estar correto, temos $c_{0,05} = 1,36$.

Outra quantidade comum nesses testes é o p -valor. O p -valor representa a probabilidade de se obter um valor para a distância de Kolmogorov-Smirnov menor do que a D_n que foi observada, supondo que a hipótese H_0 seja válida. Para encontrar esse valor, devemos usar a distribuição de Kolmogorov-Smirnov [95]

$$K(c_\alpha) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \exp(-2i^2 c_\alpha), \tag{B.6}$$

que representa a distribuição das distâncias D_n no limite de $n \rightarrow \infty$. Nesse caso, o p -valor é aproximado por $K(D_n)$. O teste de Kolmogorov-Smirnov é considerado estatisticamente significativo quando $p\text{-valor} > \alpha$.

Com o teste de Kolmogorov-Smirnov também é possível verificar se duas distribuições empíricas são iguais ou não. Nesse caso, temos dois conjuntos de dados $A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $B = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$, a partir dos quais podemos encontrar as distribuições acumuladas empíricas

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i), \tag{B.7}$$

e

$$W_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(Y_i). \tag{B.8}$$

Nesse caso, devemos testar as hipóteses

$$H_0 : G_n(x) = W_m(x) \tag{B.9}$$

$$H_1 : G_n(x) \neq W_m(x). \tag{B.10}$$

Para isso, calculamos a distância de Kolmogorov-Smirnov entre $G_n(x)$ e $W_m(x)$

$$D_{m\ n} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |G_n(x) - W_m(x)|, \quad (\text{B.11})$$

e empregamos a mesma regra do teste para uma amostra.

Método *bootstrapping*

O procedimento de *bootstrap* ou método *bootstrapping* [97] é uma técnica de reamostragem usada (entre outras coisas) para calcular intervalos de confiança para medidas estatísticas. Imaginemos um conjunto de dados $W = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e que desejamos estimar alguma medida estatística η (por exemplo, a média M) desse conjunto. O método *bootstrapping* consistem em obter η a partir de subconjuntos de W ,

$$Z_i = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_n\}, \quad (\text{C.1})$$

sendo Y_j um elemento de W selecionado aleatoriamente. Assim, definimos um novo conjunto

$$\Omega = \{\eta[Z_1], \eta[Z_2], \dots, \eta[Z_N]\}, \quad (\text{C.2})$$

que representa os valores de η estimados para os N subconjuntos Z_i . Usando Ω , vamos determinar os intervalos de confiança para $\eta[W]$ (com um nível de significância α) via

$$(\eta[W])_{\text{inferior}} = Q_{\alpha/2}[Z] \quad (\text{C.3})$$

$$(\eta[W])_{\text{superior}} = Q_{1-\alpha/2}[Z]. \quad (\text{C.4})$$

Aqui Q_β é o β quantil da distribuição de probabilidade dos elementos de Z , ou seja, $Q_\beta[x]$ retorna o valor de x tal que a probabilidade de encontrar um evento menor do que x seja β .

Método de máxima verossimilhança

O método de máxima verossimilhança [95] é um procedimento de ajuste para encontrar os parâmetros de uma distribuição de probabilidade que melhor descreva a distribuição empírica de um conjunto de dados. Vamos considerar, por simplicidade, uma distribuição $f(x)$ com apenas um parâmetro θ e um conjunto de dados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Assim, definimos a verossimilhança como

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta). \quad (\text{D.1})$$

Note que essa quantidade representa a probabilidade se obter a amostra X (supondo que $f(x)$ para um dado θ seja a verdadeira distribuição dos dados). Nesse mesmo contexto, vamos definir o logaritmo da verossimilhança como

$$\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^n f(x_i, \theta). \quad (\text{D.2})$$

O método de máxima verossimilhança consiste em obter o valor do parâmetro $\theta = \theta^*$ que maximiza a função $\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$; esse valor fornece o melhor ajuste aos dados. Quando temos apenas um parâmetro, essa maximização de $\ln \mathcal{L}$ pode ser feita usando as condições usuais de máximo de uma função, isto é,

$$\left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^*} = 0 \quad (\text{D.3})$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta^*} < 0. \quad (\text{D.4})$$

Caso a função tenha mais parâmetros, podemos empregar também algum procedimento numérico de otimização. Na prática, a maioria das linguagens de programação tem pacotes

de funções específicas para utilizar o método de máxima verossimilhança.

Teste da razão de verossimilhança

O teste da razão de verossimilhança [95] é um teste de hipótese que compara a qualidade do ajuste de duas distribuições de probabilidade ($f_1(x)$ com n_1 parâmetros de ajuste e $f_2(x)$ com $n_2 > n_1$ parâmetros de ajuste) a um conjunto de dados (x_1, x_2, \dots, x_n) . Nessas condições, vamos supor que não possamos rejeitar a hipótese de que as distribuições descrevam os dados (por exemplo, usando o teste de Kolmogorov-Smirnov). Ainda assim, queremos verificar as hipóteses:

$$H_0 : f_2(x) \text{ é melhor que } f_1(x) \text{ para descrever os dados.} \quad (\text{E.1})$$

$$H_1 : f_2(x) \text{ não é melhor que } f_1(x) \text{ para descrever os dados.} \quad (\text{E.2})$$

Para isso, vamos calcular a verossimilhança das duas distribuições, isto é,

$$\mathcal{L}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i). \quad (\text{E.3})$$

e

$$\mathcal{L}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_2(x_i), \quad (\text{E.4})$$

e definir a estatística do teste como

$$D = 2 \ln \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}. \quad (\text{E.5})$$

A quantidade D tem distribuição qui-quadrado com $k = n_2 - n_1$ graus de liberdade, isto é,

$$p(D, k) = \frac{2^{-k/2} \exp(-D/2) D^{(k/2)-1}}{\Gamma(k/2, 0)}, \quad (\text{E.6})$$

sendo $\Gamma(x, a) = \int_a^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ a função gama generalizada. Assim, o limiar $D = D^*$ para rejeitar H_0 pode ser obtido resolvendo a equação

$$p(D^*, k) = \alpha, \quad (\text{E.7})$$

com α sendo o nível de significância do teste ($\alpha = 0,05$ para 95% de confiança). Após invertida, a equação anterior fornece

$$D^* = 2\Gamma^{-1}(k/2, \alpha), \quad (\text{E.8})$$

em que $\Gamma^{-1}(x, a) = \Gamma(x, a)/\Gamma(x)$ é a função inversa da gama regularizada. Usando D^* , o resultado do teste é:

Não podemos rejeitar H_0 se $D \leq D^*$.

Não podemos rejeitar H_1 se $D > D^*$.

Quando as distribuições apresentam o mesmo número de parâmetros ($n_1 = n_2$), a estatística do teste deve ser substituída por

$$R = \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}. \quad (\text{E.9})$$

Nesse caso, o p -valor do teste é

$$p\text{-valor} = \text{erfc} \left(\frac{|R|}{\sqrt{2n\sigma}} \right), \quad (\text{E.10})$$

sendo $\text{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ a função erro complementar e

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(l_i^{(1)} - l_i^{(2)}) - (\bar{l}^{(1)} - \bar{l}^{(2)}) \right]^2, \quad (\text{E.11})$$

com

$$l_i^{(1)} = \ln f_1(x_i), \quad l_i^{(2)} = \ln f_2(x_i), \quad (\text{E.12})$$

$$\bar{l}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^{(1)} \quad \text{e} \quad \bar{l}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^{(2)}. \quad (\text{E.13})$$

Nesse caso, o resultado do teste é

Não podemos rejeitar H_0 se $p \leq \alpha$.

Não podemos rejeitar H_1 se $p > \alpha$.

Método de Clauset *et al.* para ajuste de leis de potência

Se uma variável aleatória contínua $x > 0$ está distribuída de acordo com uma lei de potência, então

$$p(x) = Cx^{-\alpha}, \quad (\text{F.1})$$

sendo C uma constante de normalização e α o expoente da lei de potência. Notamos que $p(x)$ diverge se $x \rightarrow 0$. Assim, essa distribuição deve ser limitada em algum valor de $x = x_{\min}$, isto é,

$$p(x) = \begin{cases} Cx^{-\alpha} & \text{se } x \geq x_{\min} \\ 0 & \text{se } x < x_{\min}. \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Nesse caso, impondo que $\int_{x_{\min}}^{\infty} p(x)dx = 1$, encontramos (sujeito à condição $\alpha > 1$)

$$C = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \frac{1}{x_{\min}^{-\alpha}}, \quad (\text{F.3})$$

e, portanto, podemos escrever

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\alpha} \quad \text{se } x \geq x_{\min}. \quad (\text{F.4})$$

O método de Clauset *et al.* [93] é um procedimento sistemático para obter os parâmetros α e x_{\min} que melhor descrevem um conjunto de dados (supostamente distribuído de acordo com uma lei de potência). Para apresentar esse método, considere um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ como n elementos. Usando o método da máxima verisimilhança (apêndice D), escrevemos

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x_i}{x_{\min}} \right)^{\alpha}, \quad (\text{F.5})$$

para algum valor de x_{\min} . Tomando o logaritmo, temos

$$\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \ln \prod_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x_i}{x_{\min}} \right)^\alpha \quad (\text{F.6})$$

$$= n \ln(\alpha - 1) - n \ln x_{\min} - \alpha \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}}. \quad (\text{F.7})$$

Impondo a condição de extremo $\partial \mathcal{L} / \partial \alpha = 0$ e resolvendo para α , encontramos

$$\alpha = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}} \right]^{-1}, \quad (\text{F.8})$$

o qual representa o melhor valor para o parâmetro α , suponho conhecido o valor de x_{\min} . Na prática, não conhecemos nem o valor de α nem o valor x_{\min} . Por isso, Clauset *et al.* [93] propuseram determinar x_{\min} como sendo aquele que minimiza a distância D_n de Kolmogorov-Smirnov (equação B.3). Nesse caso, podemos empregar um outro procedimento numérico para encontrar x_{\min} que minimiza D_n ou fazer uma varredura incremental do parâmetro num certo intervalo.

Referências Bibliográficas

- [1] Auyang, S. Y. *Foundations of complex-systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [2] Jensen, H. J. *Self-organized criticality* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [3] Mantegna, R. N. & Stanley, H. E. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007), 1 edition edn.
- [4] Albert, R. & Barabási, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics* **74**, 47–97 (2002).
- [5] Boccaro, N. *Modeling complex systems* (Springer-Verlag, New York, 2004).
- [6] Haken, H. *Information and self-organization* (Springer, Berlin, 2006).
- [7] Castelano, C., Fortunato, S. & Loreno, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics* **81**, 591 (2009).
- [8] Gell-Mann, M. *The quark and the jaguar-adventures in the simple and the complex* (W. H. Freeman and Company, New York, 1994).
- [9] Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Physical Review Letters* **59**, 381 (1987).
- [10] Gibiansky, M. L., Hu, W., Dahmen, K. A., Shi, W. & Wongm, G. C. L. Earthquake-like dynamics in Myxococcus Xanthus social motility. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, 2330 (2013).
- [11] Alencar, A. M., Buldyrev, S. V., Majumdar, A., Stanley, H. E. & Suki, B. Avalanche dynamics of crackle sound in the lung. *Physical Review Letters* **87**, 088101 (2001).

- [12] Lillo, F. & Mantegna, R. N. Power-law relaxation in a complex system: Omori law after a financial market crash. *Physical Review E* **68**, 016119 (2003).
- [13] Petersen, A. M., Wang, F., Havlin, S. & Stanley, H. E. Market dynamics immediately before and after financial shocks: Quantifying the Omori, productivity, and Bath laws. *Physical Review E* **82**, 036114 (2010).
- [14] Bohorquez, J. C., Gourley, S., Dixon, A. R., Spagat, M. & Johnson, N. F. Common ecology quantifies human insurgency. *Nature* **462**, 911 (2009).
- [15] Picoli Jr, S., del Castillo-Mussot, M., Ribeiro, H. V., Lenzi, E. K. & Mendes, R. S. Universal bursty behaviour in human violent conflicts. *Scientific Reports* **4**, 4773 (2014).
- [16] Cheng, B., Epstein, R. I., Guyer, R. A. & Young, A. C. Earthquake-like behaviour of soft gamma-ray repeaters. *Nature* **382**, 518 (1991).
- [17] Sanchez, L. & Shcherbakov, R. Temporal scaling of volcanic eruptions. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* **115**, 247 (2012).
- [18] Cote, P. J. & Meisel, L. V. Self-organized criticality and the Barkhausen effect. *Physical Review Letters* **67**, 1334 (1991).
- [19] Vandewalle, N., Lentz, J. F., Dorbolo, S. & Brisbois, F. Avalanches of popping bubbles in collapsing foams. *Physical Review Letters* **86**, 179 (2001).
- [20] Ritacco, H., Kiefer, F. & Langevin, D. Lifetime of bubble rafts: cooperativity and avalanches. *Physical Review Letters* **98**, 244501 (2007).
- [21] Houle, P. A. & Sethna, J. P. Acoustic Emission from crumpling paper. *Physical Review E* **54**, 278 (1996).
- [22] Salminen, L. I., Tolvanen, A. I. & Alava, M. J. Acoustic emission from paper fracture. *Physical Review Letters* **89**, 185503 (2002).
- [23] Koivisto, J., Rosti, J. & Alava, M. J. Creep of a fracture line in paper peeling. *Physical Review Letters* **99**, 145504 (2007).
- [24] Mendes, R. S., Malacarne, L. C., Santos, R. P. B., Ribeiro, H. V. & Picoli Jr, S. Earthquake-like patterns of acoustic emission in crumpled plastic sheets. *Europhysics Letters* **92**, 29001 (2010).
- [25] Hirata, T. Omori's power law aftershock sequences of microfracturing in rock fracture experiment. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **92**, 6215 (1987).
- [26] Diodati, P., Marchesoni, F. & Piazza, S. Acoustic emission from volcanic rocks: an example of self-organized criticality. *Physical Review Letters* **67**, 2239 (1991).

- [27] Weiss, J. & Carmen Miguel, M. Dislocation avalanche correlations. *Materials Science and Engineering* **387**, 292 (2004).
- [28] Davidsen, J. & Kwiatek, G. Earthquake interevent time distribution for induced micro-, nano-, and picoseismicity. *Physical Review Letters* **110**, 068501 (2013).
- [29] Kun, F. *et al.* Fatigue failure of disordered materials. *Journal of Statistical Mechanics* **2007**, P02003 (2007).
- [30] Kun, F., Halász, Z., Andrade Jr., J. S. & Herrmann, H. J. Crackling noise in sub-critical fracture of heterogeneous materials. *Journal of Statistical Mechanics* **2009**, P01021 (2009).
- [31] Niccolini, G. *et al.* Self-similarity of waiting times in fracture systems. *Physical Review E* **80**, 026101 (2009).
- [32] Niccolini, G. *et al.* Scaling in temporal occurrence of quasi-rigid-body vibration pulses due to macrofractures. *Physical Review E* **82**, 046115 (2010).
- [33] Niccolini, G., Carpinteri, A., Lacidogna, G. & Manuello, A. Acoustic emission monitoring of the syracuse athena temple: scale invariance in the timing of ruptures. *Physical Review Letters* **106**, 108503 (2011).
- [34] Lebyodkin, M. A., Shashkov, I. V., Lebedkina, T. A., Dobron, P. & Dobron, F. Role of superposition of dislocation avalanches in the statistics of acoustic emission during plastic deformation. *Physical Review E* **88**, 042402 (2013).
- [35] Salje, E. K. H. *et al.* Noise of collapsing minerals: predictability of the compressional failure in goethite mines. *American Mineralogist* **98**, 609 (2013).
- [36] Nataf, G. F. *et al.* Predicting failure: acoustic emission of berlinite under compression. *Journal of Physics: Condensed Matter* **26**, 275401 (2014).
- [37] Nataf, G. F. *et al.* Avalanches in compressed porous SiO₂-based materials. *Physical Review E* **90**, 022405 (2014).
- [38] Sethna, J. P., Dahmen, K. A. & Myers, C. R. Crackling noise. *Nature* **410**, 242 (2001).
- [39] Salje, E. K. & Dahmen, K. A. Crackling noise in disordered materials. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **5**, 233 (2014).
- [40] Baró, J. *et al.* Statistical similarity between the compression of a porous material and earthquakes. *Physical Review Letters* **110**, 088702 (2013).
- [41] Ribeiro, H. V. *et al.* Analogies between the cracking noise of ethanol-dampened charcoal and earthquakes. *Physical Review Letters* **115**, 025503 (2015).

- [42] Costa, L. S., Lenzi, E. K., Mendes, R. S. & Ribeiro, H. V. Extensive characterization of seismic laws in acoustic emissions of crumpled plastic sheets. *Europhysics Letters* **114**, 59002 (2016).
- [43] Langenbruch, C., Dinske, C. & Shapiro, S. A. Inter event times of fluid induced earthquakes suggest their poisson nature. *Geophysical Research Letters* **38**, L21302 (2011).
- [44] Kong, X. *et al.* Critical slowing down on acoustic emission characteristics of coal containing methane. *Journal of Natural Gas Science and Engineering* **24**, 156 (2015).
- [45] Main, I. Statistical physics, seismogenesis, and seismic hazard. *Reviews of Geophysics* **34**, 433 (1996).
- [46] Pereira, O. C. N. *Física Estatística Aplicada ao Estudo da Dinâmica dos Sismos e tempestades Geomagnéticas*. Dissertação de Mestrado (Universidade Estadual de Maringá, 2011).
- [47] Spence, W., Sipkin, S. A. & Chong, G. L. *Earthquakes and volcanoes*, vol. 21 (USGS Publications Warehouse-U.S. Geological Survey, 1989).
- [48] Båth, M. The relation between magnitude and energy of earthquakes. *Eos, Transactions American Geophysical Union* **36**, 861–865 (1955).
- [49] Gutenberg, B. & Richter, C. F. Earthquake magnitude, intensity, energy, and acceleration. *Bulletin of the Seismological Society of America* **46**, 105 (1956).
- [50] Bak, P., Christensen, K., Danon, L. & Scanlon, T. Unified scaling law for earthquakes. *Physical Review Letters* **88**, 178501 (2002).
- [51] Godano, C., Lippiello, E. & Arcangelis, L. d. Variability of the b value in the Gutenberg–Richter distribution. *Geophysical Journal International* **199**, 1765 (2014).
- [52] Kagan, Y. Y. Earthquake size distribution: power-law with exponent $\beta = 1/2$? *Tectonophysics* **490**, 103 (2010).
- [53] Omori, F. On the aftershocks of earthquakes. *Journal of the College of Science Imperial University of Tokyo* **7**, 111 (1894).
- [54] Enescu, B., Mori, J., Miyazawa, M. & Kano, Y. Omori-Utsu law c-values associated with recent moderate earthquakes in Japan. *Bulletin of the Seismological Society of America* **99**, 884 (2009).
- [55] Utsu, T., Ogata, Y., S, R. & Matsu'ura. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity. *Journal of Physics of the Earth* **43**, 1 (1995).
- [56] Shcherbakov, R., Turcotte, D. L. & Rundle, J. B. A generalized Omori's law for earthquake aftershock decay. *Geophysical Research Letters* **31**, L11613 (2004).

- [57] Molchan, G. M. & Dmitrieva, O. E. Aftershock identification: methods and new approaches. *Geophysical Journal International* **109**, 501 (1992).
- [58] Corral, A. Statistical Features of Earthquake Temporal Occurrence. In Bhattacharyya, P. & Chakrabarti, B. K. (eds.) *Modelling Critical and Catastrophic Phenomena in Geoscience*, no. 705 in Lecture Notes in Physics, 191 (Springer, Barcelona, 2006).
- [59] Corral, A. Dependence of earthquake recurrence times and independence of magnitudes on seismicity history. *Tectonophysics* **424**, 177 (2006).
- [60] Corral, A. Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes. *Physical Review Letters* **92**, 108501 (2004).
- [61] Corral, A. Universal local versus unified global scaling laws in the statistics of seismicity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **340**, 590 (2004).
- [62] Tokuji, U. Aftershocks and earthquake statistics: some parameters which characterize an aftershock sequence and their interrelations. *Journal of the Faculty of Science* **2**, 129 (1969).
- [63] Kagan, Y. Y. & Knopoff, L. Statistical short-term earthquake prediction. *Science* **236**, 1563 (1987).
- [64] Kagan, Y. Y. Likelihood analysis of earthquake catalogues. *Geophysical Journal International* **106**, 135 (1991).
- [65] Reasenber, P. Second-order moment of central California seismicity, 1969–1982. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **90**, 5479 (1985).
- [66] Reasenber, P. A. Foreshock occurrence before large earthquakes. *Journal of Geophysical Research* **104**, 4755 (1999).
- [67] Singh, S. K. & Suarez, G. Regional variation in the number of aftershocks ($M_b > 5$) of large, subduction-zone earthquakes ($M_w > 7.0$). *Bulletin of the Seismological Society of America* **78**, 230 (1988).
- [68] Ogata, Y. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of the American Statistical Association* **83**, 9 (1988).
- [69] Reasenber, P. A. & Jones, L. M. Earthquake hazard after a mainshock in california. *Science* **243**, 1173 (1989).
- [70] Yamanaka, Y. & Shimazaki, K. Scaling relationship between the number of aftershocks and the size of the main shock. *Journal of Physics of the Earth* **38**, 305 (1990).
- [71] Frohlich, C. & Davis, S. D. How well constrained are well-constrained T, B, and P axes in moment tensor catalogs? *Journal of Geophysical Research* **104**, 4901 (1999).

- [72] Hainzl, S., Zöller, G. & Kurths, J. Self-organization of spatio-temporal earthquake clusters. *Nonlinear Processes in Geophysics* **7**, 21 (2000).
- [73] Drakatos, G. & Latoussakis, J. A catalog of aftershock sequences in Greece (1971–1997): Their spatial and temporal characteristics. *Journal of Seismology* **5**, 137 (2001).
- [74] Felzer, K. R., Becker, T. W., Abercrombie, R. E., Ekstrom, G. & Rice, J. R. Triggering of the 1999 M 7.1 Hector Mine earthquake by aftershocks of the 1992 M 7.3 Landers earthquake. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **107**, 2190 (2002).
- [75] Gutenberg, B. & Richter, C. F. *Seismicity of the earth and associated phenomena* (Princeton University Press, Princeton, 2013).
- [76] Helmstetter, A. Is earthquake triggering driven by small earthquakes? *Physical Review Letters* **91**, 058501 (2003).
- [77] Båth, M. Lateral inhomogeneities of the upper mantle. *Tectonophysics* **2**, 483 (1965).
- [78] Shcherbakov, R., Goda, K., Ivanian, A. & Atkinson, G. M. Aftershock statistics of major subduction earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* **103**, 3222 (2013).
- [79] Vere-Jones, D. A note on the statistical interpretation of Båth’s law. *Bulletin of the Seismological Society of America* **59**, 1535 (1969).
- [80] Helmstetter, A. & Sornette, D. Bath’s law derived from the Gutenberg-Richter law and from aftershock properties: Gutenberg-Richter law aftershock properties. *Geophysical Research Letters* **30**, 2069 (2003).
- [81] Helmstetter, A. & Sornette, D. Importance of direct and indirect triggered seismicity in the ETAS model of seismicity. *Geophysical Research Letters* **30**, 1576 (2003).
- [82] Hamming, R. W. *Numerical methods for scientists and engineers* (Dover Publications, New York, 1987).
- [83] Knopoff, L., Kagan, Y. Y. & Knopoff, R. b Values for foreshocks and aftershocks in real and simulated earthquake sequences. *Bulletin of the Seismological Society of America* **72**, 1663 (1982).
- [84] Utsu, T. Representation and analysis of the earthquake size distribution: a historical review and some new approaches. *Pure and Applied Geophysics* **155**, 509 (2014).
- [85] Scholz, C. H. The frequency-magnitude relation of microfracturing in rock and its relation to earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* **58**, 399 (1968).
- [86] Davidsen, J., Stanchits, S. & Dresen, G. Scaling and universality in rock fracture. *Physical Review Letters* **98**, 125502 (2007).

- [87] Filipussi, D. A., Guzmán, C. A., Xargay, H. D., Hucailuk, C. & Torres, D. N. Study of acoustic emission in a compression test of andesite rock. *Procedia Materials Science* **9**, 292 (2015).
- [88] Liu, Q.-S., Xu, J., Liu, B. & Jiang, J.-D. Acoustic emission behavior of rock-like material containing two flaws in the process of deformation failure. *Shock and Vibration* **2015**, e167580 (2015).
- [89] Mäkinen, T., Miksic, A., Ovaska, M. & Alava, M. J. Avalanches in wood compression. *Physical Review Letters* **115**, 055501 (2015).
- [90] Kramer, E. M. & Lobkovsky, A. E. Universal power law in the noise from a crumpled elastic sheet. *Physical Review E* **53**, 1465 (1996).
- [91] Lee, D. W., Banquy, X. & Israelachvili, J. N. Stick-slip friction and wear of articular joints. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, E567 (2013).
- [92] Tsai, S.-T. *et al.* Power-law ansatz in complex systems: excessive loss of information. *Physical Review E* **92**, 062925 (2015).
- [93] Clauset, A., Shalizi, C. R. & Newman, M. E. J. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review* **51**, 661 (2009).
- [94] Hogg, R. V., McKean, J. & Craig, A. T. *Introduction to mathematical statistics* (Pearson, Boston, 2012).
- [95] James, F. *Statistical methods in experimental physics* (World Scientific Publishing Company, Hackensack, 2006).
- [96] Pearson, E. S. & Hartley, H. O. *Biometrika tables for statisticians* (Cambridge University Press, Cambridge, 1976).
- [97] Efron, B. & Tibshirani, R. J. *An introduction to the bootstrap* (Chapman and Hall/CRC, New York, 1994).