## Universidade Estadual de Maringá Pós-Graduação em Física

### Marcos Paulo Belançon

### Análise das técnicas de espelho térmico e de lente térmica para o estudo de materiais semitransparentes e opacos

Dissertação de mestrado submetida ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne

Maringá

2009

# Universidade Estadual de Maringá Pós-Graduação em Física

### Marcos Paulo Belançon

Análise das técnicas de espelho térmico e de lente térmica para o estudo de materiais semitransparentes e opacos

Maringá

Junho de 2009

Dedico este trabalho a todas as pessoas de bem que tive o prazer de conhecer.

"Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos." Albert Einstein

#### Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelas oportunidades que me foram dadas.

Agradeço a minha família. Meus pais, Osmar e Gercina, por terem me dado a educação que me trouxe até aqui e pelo exemplo que são para mim. A meus irmãos, Marcelo e Milena, pelo apoio que contribuiu para a minha motivação. A meus avós Ricieri e Maria, e a minha avó Irene, pelo exemplo de perseverança e humildade. Aos tios Valmir e Marilza, pelo apoio desde a minha infância. A tia Fátima e família, pelas conversas e pelos almoços de domingo.

A minha noiva Bruna, pela inspiração, carinho, apoio e companheirismo. Tudo teria sido mais difícil sem você!

Ao professor Malacarne, pela orientação neste trabalho e ao longo da graduação, pelo importante papel na minha vida profissional, e também pela amizade.

Ao professor Pedreira, pelas inúmeras respostas e a boa vontade em fornecê-las.

Ao professor Mauro, pela cooperação neste trabalho e por contribuir para a formação de todos alunos do grupo.

Aos professores Rênio, Malacarne e Evangelista, pelas lições e discussões nas disciplinas.

Aos professores Medina, Jurandir e Bento, pelas conversas e por manterem os laboratórios funcionando.

Aos amigos Daniel, Gustavo, Luiz Gustavo, Pablo, Paulinho, Quirino e Valdirlei, pelas conversas e discussões que enriqueceram a minha formação profissional e pessoal.

Aos amigos que fiz durante o mestrado: Fran (Sato) e Giselly, por terem me acompanhado nas primeiras idas ao laboratório. E também a: Aline, Alysson, Ana, Andressa, Franciana, Gustavo, Márcio, Otávio e Rony.

Ao Rodolfo, pelos diversos cafés na cantina, pela ajuda nas discussões conceituais, e pela companhia desde o começo da graduação. Ao Haroldo, pelos cafés, pelas discussões sobre os mais diversos tópicos de física, e por ter sido o primeiro a ler meu trabalho.

Aos servidores e técnicos da UEM: Lúcia, Gerson, Akiko, Jurandir e Márcio.

As agências de fomento, CAPES (pela bolsa), CNPQ e Fundação Araucária pelos recursos

financeiros investidos em equipamentos e manutenção dos laboratórios.

A todos vocês: Muito obrigado!

## Sumário

R	Resumo			
A	bstra	nct	4	
1	Intr	rodução	<b>5</b>	
	1.1	Espectroscopia de Lente Térmica	7	
	1.2	Espectroscopia de Espelho Térmico	9	
	1.3	Propagação do feixe de prova	11	
<b>2</b>	Per	fil de temperatura	15	
	2.1	Amostra finita, com fluxo de calor para o meio	17	
		2.1.1 Aproximação para a condição de fluxo	19	
	2.2	Amostra finita e fluxo nulo	25	
	2.3	Amostra semi-infinita e fluxo nulo	30	
		2.3.1 Limite de baixa absorção	36	
		2.3.2 Limite de alta absorção	38	
3	Mo	delo teórico para a lente térmica	40	
	3.1	Intensidade do feixe de prova	40	
	3.2	Correção para grandes coeficientes de absorção óptica	41	
4	Mo	delo teórico para o espelho térmico	46	
	4.1	Perfil de deslocamento	46	
		4.1.1 Equação de Poisson	49	

		4.1.2 Equação Biharmônica	51
	4.2	Fase e intensidade do feixe de prova	56
	4.3	Comparações entre os modelos LAM, BLM e HAM	59
5	Aju	stes e a sensibilidade com os parâmetros	63
	5.1	Lente térmica	63
	5.2	Espelho térmico	66
6	Con	clusão	69
C			
A	Am	plificadores de ondas eletromagnéticas	71
A	<b>Am</b> ] A.1	plificadores de ondas eletromagnéticas Masers	<b>71</b> 72
A	<b>Am</b> A.1 A.2	plificadores de ondas eletromagnéticas Masers	<b>71</b> 72 76
A	<b>A</b> mj A.1 A.2	plificadores de ondas eletromagnéticas         Masers	<b>71</b> 72 76 78
A B	<b>A</b> m] A.1 A.2 <b>Pro</b> ]	plificadores de ondas eletromagnéticas   Masers Masers   Lasers A.2.1   Perfil de intensidade A.2.1   pagação do feixe de prova	<ul> <li>71</li> <li>72</li> <li>76</li> <li>78</li> <li>80</li> </ul>

### Resumo

Neste trabalho os modelos das técnicas de lente térmica e espelho térmico foram investigados. Para isso foram analizadas várias soluções da equação de difusão de calor, a qual descreve o aquecimento da amostra induzido por um feixe gaussiano. Impondo diferentes aproximações sobre as condições de contorno do problema, soluções mais simples podem ser obtidas. Testando-as foi possível definir em que condições podemos utilizar cada uma das soluções. Também foi possível ver o quanto as aproximações empregadas podem afetar a precisão destas técnicas. O modelo de lente térmica usual foi desenvolvido para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica, entretanto, demonstramos que uma correção simples é capaz de eliminar a restrição quanto ao baixo coeficiente de absorção óptica. Verificamos que com as duas técnicas podemos estudar uma abrangente classe de materiais. Paralelamente a isso, no caso de materiais sólidos, a técnica de espelho térmico é sensível o suficiente para detectar deslocamentos na escala nanométrica.

### Abstract

The models of thermal lens and thermal mirror techniques were investigated. This was done by analyzing some solutions of a diffusion equation, which describes the temperature rise in the sample due to the action of a Gaussian laser beam. Imposing some approximations in the boundary conditions simple solutions can be obtained. Testing them, it was possible to set in what conditions we should use each solution, and also how much the precision of both techniques is affected by the approximations. The usual thermal lens model was developed to be applied in materials with a low optical absorption coefficient; however, we show that a simple correction can eliminate this restriction. The thermal lens and thermal mirror techniques allow us to study a broad class of materials. We also show that, in solid materials, the thermal mirror technique is sensitive enough to detect nanoscale displacements.

### Capítulo 1

### Introdução

O fenômeno físico que hoje chamamos de efeito fototérmico é algo extremamente comum no cotidiano de nossas vidas. Há muito tempo o homem percebeu que seu corpo era aquecido quando exposto ao sol e este é talvez o exemplo mais simples do efeito fototérmico. A energia transportada por uma onda eletromagnética, tal como a luz, pode ser convertida em outro tipo de energia quando ela interage com a matéria. O efeito fototérmico ocorre quando parte da energia transferida por essa onda é convertida em calor.

Para fins didáticos, imagine a luz da qual estamos falando como um "feixe de luz", e por simplicidade, o alvo desse feixe sendo uma amostra sólida. Na figura (1.1) temos um esboço desse sistema hipotético.



Figura 1.1: Luz incidindo sobre uma amostra sólida produzindo o efeito fototérmico

Considerando então que a luz aqueça a amostra, o aumento local de temperatura pode por sua vez dilatar a mesma, aquecer o ambiente, etc. A intensidade desses fenômenos depende de diversas propriedades, da amostra e da luz incidente. Algumas dessas propriedades são parâmetros que caracterizam os materiais, e que podem variar com a temperatura, como por exemplo: calor específico (c), densidade ( $\rho$ ), condutividade térmica (k), difusividade térmica (D), coeficiente de absorção óptica (A), eficiência quântica de luminescência ( $\eta$ ), índice de refração (n), etc.

Entender que a luz é capaz de aquecer um corpo é algo trivial. Entretanto, reproduzir um fenômeno semelhante a este em laboratório e obter informações claras sobre as propriedades dos agentes envolvidos não é tão fácil. Como dissemos, diversas propriedades da amostra e da luz incidente estão relacionadas com esse efeito e como em qualquer experimento científico, precisamos controlar algumas variáveis para determinar outras. Por isso, aplicações científicas deste efeito se tornaram mais evidentes após a invensão do laser, na segunda metade do século passado.

Um feixe laser é composto pelo mesmo tipo de luz emitida pelo sol, entretanto ele possui certas propriedades bem definidas. Sob determinadas condições, que comumente empregamos em laboratório, a luz emitida por um laser é confinada em uma pequena região do espaço, formando um cilindro em torno do seu eixo de propagação. O perfil de intensidade de um corte transversal do feixe é bem definido, sendo que em seu modo fundamental  $(TEM_{00})$  a distribuição radial de intensidade é gaussiana. Uma revisão sobre esses conceitos está disponível no apêndice A deste trabalho.

Ao incidir um feixe laser sobre um material, diversos fenômenos podem ocorrer, como por exemplo, reemissão de luz (o material absorve a luz e a reemite em um comprimento de onda diferente do que foi absorvido), convecção (quando a luz é incidida sobre um fluido, o aquecimento pode criar um fluxo de matéria), reações químicas (a luz incidente pode desencadear reações que podem destruir a homogeneidade da amostra, criar um gradiende de concentração dessa substância, mudar o coeficiente de absorção, etc). Esses efeitos, assim como a ocorrência de luminescência pelo material, inicialmente não são considerados na construção dos modelos. Entretanto, mesmo sendo efeitos indesejados inicialmente, quando ocorrem eles podem ser estudados indiretamente. Ocorre então que cada um desses fenômenos pode ser estudado, direta ou indiretamente, por meio de uma técnica baseada no efeito fototérmico. Podemos citar como exemplos, a espectrocopia fotoacústica[1], os métodos de Z-scan[2] e efeito miragem[3, 4], e as técnicas que serão tratadas neste trabalho: a "espectroscopia<sup>1</sup> de lente térmica" e a "espectroscopia de espelho térmico".

#### 1.1 Espectroscopia de Lente Térmica

O efeito de lente térmica<sup>2</sup> foi observado pela primeira vez em 1964, quando pesquisadores dos laboratórios da Bell Telephone[5], entre eles os brasileiros R. C. C. Leite e S. P. S. Porto, inserindo amostras na cavidade do laser notaram que havia uma variação da intensidade do centro do feixe, em uma escala temporal da ordem de milisegundos. O diâmetro do feixe não era o mesmo antes e depois da amostra e a partir disso concluíram que o aquecimento da amostra criava uma lente que convergia/divergia o feixe laser. Com um modelo teórico conveniente, esse fenômeno pode ser utilizado para determinar diversas propriedades da amostra.

Vários modelos de espectroscopia de lente térmica foram desenvolvidos nas últimas décadas[6]. Contudo, neste trabalho trataremos apenas do modelo proposto por Shen[7] e colaboradores. Este modelo consiste em utilizar dois feixes luminosos, no modo que chamamos de descasado. Um primeiro de baixa potência e com maior diâmetro na amostra, o laser de prova; Um segundo, mais intenso e focado, para provocar a variação de temperatura. Na figura (1.2) temos um esquema de um experimento de LT desse tipo. Esse arranjo experimental já era utilizado antes do trabalho de Shen e colaboradores, entretanto, neste trabalho os autores propulseram um modelo resolvido no tempo, que explica a dependência temporal

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Em Química e Física o termo espectroscopia é a designação para toda técnica de levantamento de dados físico-químicos através da transmissão, absorção ou reflexão da energia radiante incidente em uma amostra.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Os termos "espectroscopia de lente térmica", "lente térmica" ou mesmo a abreviação "LT", designam exatamente a mesma coisa. Assim como os termos em inglês: "Thermal Lens", "Thermal Lensing" e a abreviação "TL".

do fenômeno com a temperatura.

Nessa técnica, monitoramos a intensidade do feixe de prova que atravessa a amostra, o que é realizado com um fotodiodo. Quando incidimos o feixe de excitação na amostra, medimos a variação dessa intensidade em função do tempo, obtendo dados que, comparados ao modelo teórico[7], nos fornecem informações quantitativas sobre algumas propriedades da amostra.

Esta técnica pode ser utilizada para estudar diversos tipos de materiais, como: vidros[8, 9], cristais[10], bebida do café[11], óleos diversos, etc. Isso, somado ao fato de se tratar de uma técnica não destrutiva, torna a LT uma ferramenta poderosa para estudos diversos. Entretanto, como veremos em detalhes neste trabalho, o modelo teórico de LT foi desenvolvido para amostras com coeficiente de absorção óptica baixo<sup>3</sup>, inferior a 1  $cm^{-1}$ , e isso restringe o uso da técnica em uma classe importante de materiais.

Para ilustrar esse ponto, dopando um vidro aluminosilicato (LSCAS) com diversas concentrações de  $TiO_2$ , temos o coeficiente de absorção óptica desse vidro[12] variando de  $1cm^{-1}$ até  $10cm^{-1}$ , aproximadamente, para concentrações entre 0.5% e 3.5%. Dessa maneira, por limitações teóricas não podemos utilizar com segurança a LT em vidros desse tipo, uma vez que estamos utilizando a técnica em um sistema diferente daquele original, para o qual ela foi desenvolvida.

Isso nos motiva a estudar uma possível correção para o modelo, que torne possível utilizar a LT nessa classe de materiais. Por isso vamos descrever o desenvolvimento teórico da LT e introduzir uma correção, que será testada por meio de simulações computacionais. Nestas simulações vamos utilizar parâmetros tipícos de vidros, pois esses materiais formam a principal linha de pesquisa do grupo de estudos dos fenômenos fototérmicos e fotoacústicos (GEFF) do departamento de física da universidade estadual de Maringá (UEM).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Na verdade, nesse modelo é necessário que a fonte de calor seja axialmente constante dentro da amostra, o que significa que o comprimento óptico deve ser pequeno ( $A_eL \ll 1$ ). Como veremos em detalhes neste trabalho, a espessura L da amostra não pode ser muito inferior a 1mm, de maneira que esses dois fatores determinam o valor máximo do coeficiente de absorção óptica.

#### 1.2 Espectroscopia de Espelho Térmico

Ao tratarmos de materiais altamente absorvedores ou opacos, pouca ou nenhuma luz os atravessa. Por isso técnicas como a LT não são aplicáveis a esse grupo de materiais. Contudo, mesmo os materiais que não permitem a transmissão de luz possuem certa reflectância, e esse fenômeno da reflexão superfícial da luz pode ser utilizado para construir outras técnicas de espectroscopia.

A técnica de deflexão fototérmica<sup>[3]</sup> (efeito miragem), por exemplo, consiste em utilizar dois feixes. Um incidindo perpendicularmente a superfície da amostra, e o segundo paralelo a superfície, bem próxima a ela. O aquecimento da amostra cria um gradiente de índice de refração no ar, que é provado pelo feixe paralelo a superfície.

No método de deslocamento fototérmico[13, 14] um feixe de prova incide sobre a superfície da amostra. Um segundo feixe, mais potente e concentrado, é utilizado para excitar parte da região monitorada pelo feixe de prova. O aquecimento causado pelo feixe de excitação desloca a superfície da amostra, com isso parte do feixe de prova tem sua frente de onda deformada. A superposição entre as frentes de onda produz então uma figura de interferência.

Saito et al.[15] desenvolveram a técnica conhecida como divergência fototérmica, onde também são utilizados dois feixes de luz laser. Quando em repouso a amostra comporta-se como um espelho plano para o feixe de prova. Ao ser excitada, sua superfície se deforma, criando um espelho divergente/convergente, que diminui/aumenta a densidade de energia no centro do feixe de prova. O sinal de divergência fototérmica é a diferença de intensidade do feixe de prova, quando a amostra está excitada e quando está em repouso.

B. C. Li[16] desenvolveu um modelo resolvido no tempo para estudar materiais, baseandose na reflexão de um feixe de luz laser. Ele considerou a excitação por um laser pulsado, e resolveu a equação de difusão de calor para a amostra. A deformação da superfície da amostra depende da temperatura induzida, e utilizando sua solução para a equação de difusão, Li resolveu uma equação termoelástica. A solução dessa equação deescreve, basicamente, a posição de cada ponto da superfície da amostra em função do tempo, quando atingida pelo feixe de excitação. Recentemente, foi desenvolvida em nosso grupo (GEFF) a técnica de Espelho Térmico<sup>4</sup>[17, 18], que é semelhante a que foi proposta por B. C. Li. Entretanto, no ET considerou-se a excitação por um laser continuo, e por meio de certas aproximações um modelo teórico mais simples foi obtido.

Como veremos, os arranjos experimentais das técnicas de LT e ET são muito parecidos. A diferença básica é que no ET a porção do feixe de prova monitorado é aquela refletida na superfície da amostra. Na figura (1.2) temos um esboço da montagem experimental das duas técnicas.



Figura 1.2: Esquema da montagem experimental de LT e ET, onde as letras "L" e "M" indicam lentes e espelhos, respectivamente. Na LT monitoramos a intensidade do centro do feixe de prova que atravessa a amostra, enquanto no ET monitoramos a intensidade do centro do feixe refletido. As duas técnicas podem ser montadas simultâneamente.

Analogamente ao caso da LT, medimos a intensidade do centro do feixe de prova em função do tempo quando a amostra é atingida pelo feixe de excitação. Essa intensidade pode aumentar ou diminuir conforme a natureza da deformação da amostra seja côncava ou convexa<sup>5</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Daqui em diante utilizaremos a abreviação ET.

 $<sup>{}^{5}</sup>$ É de censo comum que um material dilata quando aquecido, entretanto, há materiais como o "tungstato

A técnica pode ser utilizada em materiais sólidos, com qualquer coeficiente de absorção óptica. Dessa maneira, podemos ver o ET como uma técnica complementar a de LT. O que é muito conveniente do ponto de vista experimental, visto que ambas podem ser montadas com os mesmos equipamentos.

Este trabalho tem como um dos objetivos verificar as limitações da técnica de ET, tanto do ponto de vista teórico como experimental. Neste sentido, precisamos conhecer os limites do modelo teórico para definir o campo de aplicabilidade da técnica, e paralelamente pretendemos verificar a sensibilidade do modelo teórico para cada um dos parâmetros envolvidos.

Agora faremos um breve resumo sobre a propagação do feixe de prova, que é idêntica em ambas as técnicas. Isso nos dá um panorama do que será feito nos capítulos seguintes.

#### 1.3 Propagação do feixe de prova

Como dissemos, nas técnicas de LT e ET monitoramos a intensidade do centro de um feixe de prova com perfil gaussiano<sup>6</sup>. Por isso precisamos conhecer as equações que descrevem a propagação de tal feixe. Resumidamente, podemos escrever a amplitude do campo elétrico do centro do feixe de prova, na posição do fotodetector, como<sup>7</sup> (B.5)

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C_1 \int_0^\infty e^{(iV - 1)g - i\Phi(g, t)} dg$$

 $\operatorname{com} g = (r/\omega_{1p})^2,$ 

$$C_1 = B \left[ i \pi \omega_{1p}^2 / (\lambda_p Z_2) \right] e^{-2i\pi Z_2 / \lambda_p}$$

е

$$V = \frac{Z_1}{Z_c} + \frac{Z_c}{Z_2} \left[ 1 + \left(\frac{Z_1}{Z_c}\right)^2 \right],$$

em que  $Z_1$  é a distância do foco do feixe de prova até a amostra,  $Z_c$  é a distância confocal do feixe de prova e  $Z_2$  é a distância da amostra até o fotodetector.

<sup>6</sup>Ver apêndice A.

<sup>7</sup>Ver apêndice B.

de Zircônio" [19], que apresenta uma expansão térmica negativa e isotrópica, em uma larga faixa de temperatura.

Na equação (B.5),  $\Phi(g, t)$  representa uma fase. Nas técnicas de LT e ET a perturbação causada ao feixe de prova é intepretada como um acréscimo na fase, dado por este termo. Entretanto, a maneira de se obter a variação da fase em cada técnica é bem diferente. Na figura (1.3) temos uma representação do que ocorre no caminho do feixe de prova na LT.



Figura 1.3: Representação do efeito de lente térmica em amostra sólida[18]. Além do índice de refração a espessura pode variar, o que também contribui para a variação do caminho óptico.

A fase induzida pela LT pode então ser expressa por

$$\phi_{LT}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \int_0^L \Delta s(r,z,t) dz, \qquad (1.1)$$

em que  $\lambda_p$  é o comprimento de onda do feixe de prova, L é a espessura da amostra em t = 0, e  $\Delta s(r, z, t)$  é a variação do caminho óptico da amostra devido ao aquecimento gerado pelo feixe de excitação.

Escrevendo  $\Delta s(r, z, t) = s(r, z, t) - s(r, z, 0)$ , podemos expandir s(r, z, t) em função da temperatura. Assim obtemos a expressão<sup>8</sup>  $s(r, z, t) = s(r, z, 0) + \frac{ds}{dT}\Delta T(r, z, t)$ . Utilizando-a na expressão (1.1) obtemos

$$\phi_{LT}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^L \Delta T(r,z,t) dz, \qquad (1.2)$$

em que  $\frac{ds}{dT}$  é o coeficiente de variação do caminho óptico com a temperatura, e  $\Delta T(r, z, t)$ 

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>O primeiro termo da expansão corresponde ao comprimento óptico quando a amostra está em repouso, por isso o escrevemos como s(r, z, 0).

é a variação de temperatura da amostra. Vamos assumir que  $\frac{ds}{dT}$  é constante no regime de temperatura que estaremos trabalhando.

Na figura (1.4) temos uma representação do que ocorre com o caminho do feixe de prova no ET. No ET a fase pode então ser obtida por meio da expressão



Figura 1.4: Representação do efeito de espelho térmico em amostra sólida. O caminho do feixe de prova diminui quando a amostra dilata.

$$\phi_{ET}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2u_z(r,0,t), \qquad (1.3)$$

em que  $u_z(r, 0, t)$  é o vetor posição da superfície da amostra no instante t, e o fator "2" aparece devido a reflexão na superfície. Em outras palavras, a variação da fase do feixe de prova no ET depende diretamente da deformação da superfície, e essa deformação superficial depende da temperatura<sup>9</sup>.

Utilizando a expressão para a fase podemos calcular a amplitude por meio da expressão (B.5), que por sua vez utilizamos para obter a intensidade do feixe de prova, que é

$$I(t) = |U(Z_1 + Z_2, t)|^2.$$

Um de nossos objetivos é obter I(t) para cada uma das técnicas. Para isso, nos capítulos seguintes vamos investigar o desenvolvimento matemático de ambas.

No capítulo 2 resolveremos uma equação de difusão de calor, buscando soluções que garantam a validade dos modelos teóricos das técnicas.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Trataremos isso em detalhes no capítulo 4.

No capítulo 3 vamos descrever o restante do desenvolvimento teórico da LT. Isso consiste em utilizar uma expressão para a temperatura, obtida no capítulo 2, para calcular a fase e depois a intensidade do feixe de prova.

No capítulo 4 descrevemos o desenvolvimento da técnica de ET, que como podemos ver pela expressão (1.3), depende do deslocamento da superfície da amostra. Para descrever esse deslocamento precisamos resolver uma equação termoelástica, que depende de uma expressão para a temperatura, a qual é obtida no capítulo 2.

No capítulo 5 trabalhamos com exemplos práticos de utilização das técnicas, exibindo dados experimentais e ajustando-os com os modelos. Também neste capítulo, simulamos erros que podem ocorrer em um experimento, analizando o quanto isso pode influenciar os dados de uma medida.

## Capítulo 2

### Perfil de temperatura

Neste capítulo descreveremos a distribuição de temperatura na amostra em função do tempo, quando excitada por um feixe gaussiano. Pretendemos que o resultado final de nosso desenvolvimento teórico seja uma equação para o ajuste dos dados experimentais, por isso estamos interessados em descrever o aquecimento da amostra com a solução mais simples possível.

Nosso problema é então resolver a seguinte equação de difusão, em coordenadas cilíndricas<sup>1</sup>

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} - \frac{K}{c\rho} \nabla^2 T(r,z,t) = Q(r,z), \qquad (2.1)$$

em que c,  $\rho \in K$  são respectivamente o calor especifíco, a densidade de massa e a condutividade térmica, e T(r, z, t) é o aumento de temperatura na amostra. Escolhemos a posição da superfície da amostra como sendo o plano z = 0, de maneira que a amostra está à direita desse plano. Na figura (2.1) temos um esboço desse sistema de coordenadas.

Se por um lado, a generalidade de uma solução trás benefícios, por outro, ela pode tornar a solução extremamente complicada, o que não é nosso objetivo. Entretanto, qualquer aproximação precisa ser testada, e como estamos falando de equações diferenciais, testar uma aproximação significa compará-la com a solução que não possui a aproximação. Por isso, vamos primeiramente trabalhar com uma solução geral para nosso problema. Consideraremos

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Esse sistema de coordenadas é utilizado devido a fonte de calor, que possui simetria axial em torno do eixo de propagação do feixe laser.



Figura 2.1: Sistema de coordenadas adotado para resolver a equação de difusão. O laser incide na superfície da amostra em Z = 0.

que a amostra possui uma determinada espessura, que ela será atingida pelo laser, aquecida e que o calor gerado na amostra poderá ser dissipado para o ar. Em seguida, vamos introduzir aproximações que proporcionam soluções mais simples, testando-as individualmente, a medida que forem sendo introduzidas.

Excitando a amostra com um feixe laser Gaussiano, teremos o seguinte termo de fonte

$$Q(r,z) = Q_0 e^{\frac{-2r^2}{\omega_{0e}^2}} Q(z), \qquad (2.2)$$

em que  $Q_0 = \frac{2P_e A_e \phi}{\rho c \pi \omega_{0e}^2}$ .  $A_e$ ,  $P_e$  e  $\omega_{0e}$  são a absorção óptica, a potência e o raio do feixe de excitação<sup>2</sup>, respectivamente.  $\phi = 1 - \frac{\eta \lambda_e}{\lambda_{em}}$  é a fração de energia absorvida que é convertida em calor, com  $\eta$ ,  $\lambda_e$  e  $\lambda_{em}$  sendo respectivamente a eficiência quântica de luminescência<sup>3</sup>, o comprimento de onda do feixe de excitação e o comprimento de onda médio da emissão. Quando  $\eta = 0$  não há reemissão de energia absorvida e toda energia é convertida em calor  $(\phi = 1)$ .

 $<sup>^{2}\</sup>omega_{0e}$  é, mais precisamente, a distância do centro do feixe em que sua intensidade diminui a  $\frac{1}{e^{2}} \approx 13.5\%$ .

 $<sup>{}^{3}\</sup>eta$  é a razão entre o número de fótons emitidos pelo número de fóton absorvidos. Portanto, um número positivo que pode inclusive ser maior que 1, uma vez que o que precisa ser conservado é a energia e não o número de fótons.

Para a dependência do termo de fonte com o eixo z, vamos utilizar a lei de Beer<sup>4</sup>

$$Q(z) = e^{-A_e z},\tag{2.3}$$

que é a forma típica para a absorção de luz quando ela atravessa um material<sup>5</sup>. Feitas essas considerações, que valem para todo esse capítulo, vamos agora analisar uma solução razoavelmente geral da equação (2.1).

#### 2.1 Amostra finita, com fluxo de calor para o meio

Vamos começar definindo as condições iniciais e de contorno do problema. Supondo que em t = 0 a temperatura da amostra é homogênea, obtemos a seguinte condição inicial T(r, z, 0) = 0, que em outras palavras significa que não há gradiente de temperatura em t = 0. Uma das condições de contorno pode ser estabelecida se exigirmos que o aquecimento na direção radial nunca atinja a borda. Isso deve acontecer se as dimensões radiais da fonte

<sup>4</sup>Também conhecida como lei de Beer-Lambert ou lei de Beer-Lambert-Bouguer, sobrenomes de August Beer (1852), Johann Heinrich Lambert (1760) e Pierre Bouguer (1729). Os anos entre parênteses se referem a quando os autores documentaram seus estudos sobre a luz, que são descrições de fenômentos que concordam com essa lei.

<sup>5</sup>Considerando uma camada de espessura l, muito fina, atingida por um feixe de luz, de forma que o termo de fonte  $Q_0$  seja constante em toda a espessura, podemos escrever a variação da intensidade do feixe antes e depois do filme como

$$\Delta I_0 = I_0 - I_1 = I_0 - I_0 e^{-A_e l} = I_0 (1 - e^{-A_e l}) \approx I_0 A_e l,$$

então, a fonte fica

$$Q_0 = \frac{\Delta I_0}{l} = I_0 A_e,$$

Agora, se nós considerarmos sucessivas camadas desse tipo, teremos

$$Q_1 = \frac{\Delta I_1}{l} = \frac{I_1 - I_2}{l} = \frac{I_1 - I_1(1 - A_e l)}{l} = I_1 A_e = I_0 A_e(1 - A_e l),$$

generalizando temos

$$Q_n = \frac{\Delta I_n}{l} = \frac{I_n - I_{n+1}}{l} = \frac{I_n - I_n(1 - A_e l)}{l} = I_n A_e = I_0 A_e (1 - A_e \frac{z}{n})^n,$$

e quando  $n \to \infty$ , temos  $(1 - A_e \frac{z}{n})^n = e^{-A_e z}$ .

de calor, e portanto do feixe laser, forem muito menores que as dimensões radiais da amostra. Matematicamente podemos escrever essa condição como  $T(\infty, z, t) = 0$ .

As condições de contorno na interface entre amostra e o ar são

$$T(r,0,t)\big|_{s+} = T(r,0,t)\big|_{s-},$$
 (2.4)

$$K_v \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z}\Big|_{s+} = K_a \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z}\Big|_{s-}, \qquad (2.5)$$

em que  $K_v$  e  $K_a$  são as condutividades térmicas da amostra e do meio, respectivamente. s+e s- identificam as soluções dentro e fora da amostra, respectivamente. A primeira condição diz que a temperatura é a mesma nos dois lados da superfície, e por meio da segunda condição consideramos o fluxo de calor entre a amostra e o ar.

Resolver esse problema, utilizando essas condições, nos proporcionaria a solução exata. Entretanto, só conseguimos obter uma solução analítica impondo uma aproximação sobre a condição de contorno (2.5). Lembrando da definição de derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

que vale no limite de  $\Delta x \rightarrow 0$ , podemos reescrever o lado direito da equação (2.5) como

$$K_a \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z}\Big|_{s+} = K_a \frac{T(r,\Delta z,t)\Big|_{s+} - T(r,0,t)\Big|_{s+}}{\Delta z},$$
(2.6)

A aproximação consiste em considerar que a uma distância  $\Delta z$  da superfície a temperatura do ar se mantém constante, assim temos  $T(r, \Delta z, t) = 0$ . Utilizando a condição (2.4) em (2.6), podemos reescrever a equação (2.5) na forma

$$\frac{\partial T(r,0,t)}{\partial z}\Big|_{s-} \simeq -hT(r,0,t)\Big|_{s-},\tag{2.7}$$

em que  $h = \frac{K_a}{K_v \Delta z}$  e  $\Delta z$  é uma distância característica. Voltaremos a este ponto na subseção 2.1.1, onde iremos verificar cuidadosamente se podemos utilizar essa aproximação.

Com as condições escritas desta maneira, utilizamos a seguinte função de Green (Ref. [20], p. 373) para resolver o problema

$$G(r, r', \varphi, \varphi', z, z', t') = \frac{e^{-R^2/(4Dt')}}{2\pi Dt'}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_n \cos(\alpha_n z) + h \sin(\alpha_n z)][\alpha_n \cos(\alpha_n z') + h \sin(\alpha_n z')]}{L(\alpha_n^2 + h^2) + 2h} e^{-D\alpha_n^2 t'},$$
(2.8)

em que D é a difusividade térmica,  $\alpha_n$  representa a e-nésima raíz positiva da equação

$$\tan(\alpha L) = \frac{2\alpha h}{\alpha^2 - h^2},\tag{2.9}$$

e R é definido pela relação

$$R^{2} = r^{2} + r^{2} - 2rr'\cos(\varphi - \varphi').$$
(2.10)

A equação para a variação de temperatura é então

$$T(r,z,t) = \int_0^t \int_0^L \int_0^\infty \int_0^{2\pi} Q(r',z') G(r,r',\varphi,\varphi',z,z',t') r' d\varphi' dr' dz' dt',$$
(2.11)

que pode ser integrada usando as equações (2.2), (2.3) e (2.8). Definindo a variável  $t_c = \frac{\omega_{0c}^2}{4D}^6$ , obtem-se

$$T(r,z,t) = \frac{P_e A_e \phi}{\pi t_c K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_n \cos(\alpha_n z) + h \sin(\alpha_n z)]}{L(\alpha_n^2 + h^2) + 2h} F_n \int_0^t \frac{e^{-\frac{2r^2/w_{0e}^2}{1 + 2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} e^{-D\alpha_n^2 \tau} d\tau, \qquad (2.12)$$

em que

$$F_n = \frac{e^{-A_e L}}{A_e + \alpha_n^2} \left[ (\alpha_n^2 - A_e h) \sin(\alpha_n L) - \alpha_n (A_e + h) \cos(\alpha_n L) \right] + \frac{\alpha_n (A_e + h)}{A_e^2 + \alpha_n^2}.$$
 (2.13)

Fazendo referência ao livro em que encontramos a função de Green (2.8), chamaremos essa solução de CJM<sup>7</sup>. Esta solução é muito complicada, de maneira que usá-la para nossos propósitos experimentais é impraticável. Até mesmo o trabalho de calcular o valor dessa função em um único ponto, com um conjunto qualquer de parâmetros, não é tão simples. As raízes da equação (2.9), necessárias para calcular a somatória em (2.12), não são obtidas analiticamente e ainda dependem da espessura L da amostra.

Agora vamos verificar a consistência da aproximação (2.7). Depois vamos analisar outras aproximações que nos conduzam a soluções mais simples.

#### 2.1.1 Aproximação para a condição de fluxo

A solução CJM supõe uma única aproximação (a condição 2.7). Entretanto, para verificar a validade dessa aproximação precisariamos da solução exata, que não temos. Uma

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Veremos nos capítulos 3 e 4 que  $t_c$  é um parâmetro de ajuste comum as técnicas de LT e ET. <sup>7</sup>Carslaw and Jaeger Model

alternativa é resolver o problema unidimensional, que conseguimos resolver nos dois casos, utilizando a condição (2.5) e a aproximação (2.7). Assim, pretendemos verificar a validade dessa aproximação no caso unidimensional, para determinar em quais condições podemos utilizar a solução CJM com segurança.

Iniciaremos obtendo o perfil de temperatura em ambos os meios, vidro e ar. Isso consiste em obter as soluções das seguintes equações de difusão

$$\frac{\partial T_v(z,t)}{\partial t} - D_v \frac{\partial^2 T_v(z,t)}{\partial z^2} = Q_0, \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial T_a(z,t)}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 T_a(z,t)}{\partial z^2} = 0, \qquad (2.15)$$

em que para o vidro consideramos uma fonte de calor independente de z, equivalente ao limite de baixa absorção, no qual tratamos o problema como uma fonte coaxial e uniforme de calor. Por simplicidade, denotamos aqui por z o módulo dessa variável, sendo que a superfície da amostra continua na posição z = 0. Porém, agora vamos considerar que ela está à esquerda desse plano, na parte negativa de z, com o ar do lado positivo.

As seguintes condições de contorno precisam ser satisfeitas

$$T_v(z,0) = T_a(z,0) = 0,$$
 (2.16)

$$T_v(0,t) = T_a(0,t),$$
 (2.17)

$$T_v(-\infty, t) = T_a(\infty, t) = 0,$$
 (2.18)

$$K_v \frac{\partial T_v(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = K_a \frac{\partial T_a(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0}, \qquad (2.19)$$

em que os índices  $v \in a$  referem-se ao vidro e ao ar, respectivamente.

Fazendo a transformada de Laplace  $(t \rightarrow s)$  das equações (2.14) e (2.15), utilizamos a propriedade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sf(s) - f(0),$$

em que a condição (2.16) faz f(0) = 0. Assim obtemos

$$sT_v(z,s) - D_v \frac{\partial^2 T_v(z,s)}{\partial z^2} = \frac{Q_0}{s},$$
  
$$sT_a(z,t) - D_a \frac{\partial^2 T_a(z,t)}{\partial z^2} = 0.$$

As soluções para essas duas equações são

$$\begin{aligned} T_v(z,s) &= C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{D_v}z}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{D_v}z}} + \frac{Q_0}{s^2}, \\ T_a(z,s) &= C_3 e^{\sqrt{\frac{s}{D_a}z}} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{s}{D_a}z}}, \end{aligned}$$

e para satisfazer as condições (2.18), fazemos  $C_1 = C_3 = 0$ , obtendo

$$T_{v}(z,s) = C_{2}e^{-\sqrt{\frac{s}{D_{v}}z}} + \frac{Q_{0}}{s^{2}},$$

$$T_{a}(z,s) = C_{4}e^{-\sqrt{\frac{s}{D_{a}}z}}.$$
(2.20)

Para determinar as constantes  $C_2 \in C_4$  utilizamos as condições de superfície para o fluxo<sup>8</sup> (2.19) e para a temperatura (2.17), com as quais obtemos

$$C_2 = \frac{-\sqrt{D_v}K_aQ_0}{(\sqrt{D_a}K_v - \sqrt{D_v}K_a)s^2},$$
$$C_4 = \frac{\sqrt{D_a}K_vQ_0}{(\sqrt{D_a}K_v - \sqrt{D_v}K_a)s^2}.$$

Após determinar essas constantes, nos resta o problema de aplicar a transformada inversa de Laplace nas seguintes equações:

$$T_v(z,s) = \frac{-\sqrt{D_v}K_aQ_0}{(\sqrt{D_a}K_v - \sqrt{D_v}K_a)}\frac{1}{s^2}e^{-\sqrt{\frac{s}{D_v}}z} + \frac{Q_0}{s^2},$$
(2.21)

$$T_{a}(z,s) = \frac{\sqrt{D_{a}}K_{v}Q_{0}}{(\sqrt{D_{a}}K_{v} - \sqrt{D_{v}}K_{a})}\frac{1}{s^{2}}e^{-\sqrt{\frac{s}{D_{a}}}z}.$$
(2.22)

Para fazer isso precisaremos do teorema da convolução (Ref. [22], pag. 198)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du,$$
(2.23)

em que f(u) e g(u) são as transformadas inversas de Laplace de F(s) e G(s). Definimos F(s) e G(s) como

$$F(s) = e^{-a\sqrt{s}},$$
  

$$G(s) = \frac{1}{s^2},$$

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Lembrando maiz uma vez que z representa um módulo, portanto, a derivada será -1 no caso do vidro e +1 para o ar.

e usamos suas transformadas inversas:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}},$$
  
$$\mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} = t.$$

Com essas considerações, a integral de inversão (2.23) fica

$$\int_{0}^{t} \frac{a}{2\sqrt{\pi u^{3}}} e^{-\frac{a^{2}}{4u}} (t-u) du = -a\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^{2}}{4t}} + \left(\frac{a^{2}}{2} + t\right) Erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$
(2.24)

Aplicando o processo de inversão nas equações (2.21) e (2.22), obtemos

$$T_{v}(z,t) = \frac{\sqrt{D_{v}}K_{a}Q_{0}}{(\sqrt{D_{a}}K_{v} - \sqrt{D_{v}}K_{a})} \left[ -\left(\frac{z^{2}}{2D_{v}} + t\right)Erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{v}t}}\right) + \frac{ze^{-\frac{z^{2}}{4D_{v}t}}\sqrt{t}}{\sqrt{D_{v}\pi}} \right] (2.25) + Q_{0}t,$$

$$T_a(z,t) = \frac{\sqrt{D_a}K_vQ_0}{(\sqrt{D_a}K_v - \sqrt{D_v}K_a)} \left[ \left(\frac{z^2}{2D_a} + t\right) Erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{D_at}}\right) - \frac{ze^{-\frac{z^2}{4D_at}}\sqrt{t}}{\sqrt{D_a\pi}} \right], (2.26)$$

sendo Erfc(x) a função erro complementar<sup>9</sup>.

Na figura (2.2) mostramos o comportamento da temperatura em função de z, no vidro e no ar, em que utilizamos os seguintes parâmetros:  $tc = 0, 8ms, t = 100tc, D_v = 6 \times 10^{-7} m^{-1}$ ,



Figura 2.2: Temperatura em função de "z", no vidro e no ar.

 $\begin{aligned} D_a &= 2, 2 \times 10^{-5} m^{-1}, \ K_v = 1, 5 W/mK, \ K_a = 0, 03 W/mK, \ e \ \text{lembrando} \ \text{que} \ Q_0 = \frac{2P_e A_e \phi}{\rho c \pi \omega_{0e}^2}, \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{array} \end{aligned}$ <sup>9</sup>A função erro é definida  $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , e a função erro complementar é Erfc(x) = 1 - Erf(x).

utilizamos<sup>10</sup>  $\rho = 2,9g/cm^3$ , c = 0,85J/gK,  $A_e = 1m^{-1}$ ,  $\phi = 1$ ,  $\omega_{0e} = 44 \times 10^{-6}m$  e  $P_e = 50mW$ . Todos esses parâmetros são comuns em vidros e nas situações cotidianas de laboratório.

Construimos os dois gráficos da figura (2.2) para evidenciar o comportamento da temperatura próximo a superfície do vidro, que como podemos ver é pouco influenciado pelo fluxo de calor. O aumento de temperatura na superfície foi apenas 0,3% menor do que a uma profundidade de 0,6mm, região que praticamente não é afetada pelo fluxo de calor na superfície. Portanto, considerando uma amostra com essas propriedades, vemos que a temperatura só é modificada pelo fluxo de calor na região próxima à superfície, e mesmo nessa região a temperatura diminui muito pouco.

Agora vamos resolver a equação de difusão unidimensional para o vidro, utilizando a aproximação (2.7). O problema é exatamente o mesmo até a obtenção da equação (2.20), mas agora trocamos a condição de contorno (2.19) por

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial z} \simeq -hT(0,t),$$

que é a aproximação (2.7) escrita em uma dimensão. Utilizando essa condição determinamos a constante  $C_2$ 

$$C_2 = -\frac{\sqrt{D_v}h}{K_v} \frac{Q_0}{\left(\frac{\sqrt{D_v}h}{K_v} + \sqrt{s}\right)s^2}$$

e com ela obtemos a solução para o problema, ainda no espaço de Laplace,

$$T(z,s) = \frac{Q_0}{s^2} - \frac{\sqrt{D_v}h}{K_v} \frac{Q_0}{(\frac{\sqrt{D_v}h}{K_v} + \sqrt{s})} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{D_v}z}}}{s^2}.$$
 (2.27)

Podemos inverter essa equação comparando-a com a (2.21), que invertemos ao resolver o problema anterior. Agora temos um novo termo que depende de  $\sqrt{s}$ , com a forma

$$\frac{1}{b+\sqrt{s}}.$$

Assim podemos fazer uma segunda convolução, entre esse termo e  $\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s^2}$ . Para fazer isso <sup>10</sup>Os valores de  $\rho$  e *c* foram obtidos da referência [8], pag. 66. definimos:

$$F(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s^2},$$
  
$$G(s) = \frac{1}{b+\sqrt{s}}.$$

As inversas dessas duas funções são:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = -a\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}} + \left(\frac{a^2}{2} + t\right)Erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right),$$
  
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - be^{b^2t}Erfc\left(b\sqrt{t}\right).$$

Para este problema as contantes são  $a = \frac{z}{\sqrt{D_a}}$  e  $b = \frac{\sqrt{D_v h}}{K_v}$ . Assim, a integral de inversão (2.23) fica

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)G(s)\} = \int_0^t \left[ -\frac{z}{\sqrt{D_v}} \sqrt{\frac{u}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4D_v u}} + \left(\frac{z^2}{2D_v} + u\right) Erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{D_v u}}\right) \right] \\ \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}} - \frac{\sqrt{D_v h}}{K_v} e^{(\frac{h}{K_v})^2 D_v(t-u)} Erfc\left(\frac{h\sqrt{D_v(t-u)}}{K_v}\right) \right] \\ \times du$$
(2.28)

Desse modo, invertendo a equação (2.27) obtemos

$$T(z,t) = Q_0 t - \frac{Q_0 \sqrt{D_v} h}{K_v} H(t), \qquad (2.29)$$

em que H(t) é a integral de inversão (2.28), que acabamos de definir.

Agora vamos comparar essa solução com a (2.25), que é a solução exata. Na figura (2.3) temos os perfis obtidos com ambas as soluções. Na figura (2.4) temos a diferença percentual entre esses perfis.

Ao fazer a aproximação (2.7) definimos a constante  $h = \frac{K_a}{K_v \Delta z}$  e essa distância característica  $\Delta z$  permaneceu uma incógnita. Resolvendo o problema unidimensional também podemos determinar o valor dessa distância.

Para obter a figura (2.3) escolhemos arbitráriamente diversos valores de  $\Delta z$ , buscando aquele que produzisse o melhor ajuste entre os perfis. Fixando  $\Delta z = 0,5mm$  encontramos o menor desvio entre as soluções e por isso utilizamos este valor para gerar as figuras. Concluimos então que esse valor permite um ótimo acordo entre as soluções, o que em



Figura 2.3: Temperatura em função de z no vidro, com e sem a aproximação (2.7), t= $100t_c$ .

Figura 2.4:  $\delta T(\%)$  entre as soluções (2.25) e (2.29), em função de z, t=100 $t_c$ .

outras palavras significa a consistência da aproximação (2.7). Por esse motivo, quando trabalharmos com a solução CJM fixaremos  $\Delta z = 0, 5mm$ .

Concluímos essa seção lembrando que a solução CJM contém apenas uma aproximação, que introduz um erro inferior a 0.1% na descrição da temperatura da amostra. Agora vamos estudar uma segunda aproximação, que também é imposta sobre a condição de contorno na superfície.

#### 2.2 Amostra finita e fluxo nulo

Na seção anterior obtivemos uma solução da equação (2.1), na qual consideramos o fluxo de calor da amostra para o meio. Agora vamos considerar fluxo nulo na superfície da amostra, o que produz uma temperatura maior do que no caso com fluxo. Essa condição nos conduz a uma solução mais simples, mas também introduz diferenças entre a nova solução e a solução exata. De qualquer maneira, em determinadas condições essa aproximação pode ser conveniente, e isso é o que investigaremos nesta seção.

A aproximação de fluxo nulo consiste em fazer  $h \to 0$  na condição de contorno (2.7), que então fica

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z}\mid_{s+}=0$$

A solução para esse problema é

$$T(r, z, t) = \frac{P_e \phi}{2\pi K} \int_0^\infty e^{-\frac{\delta^2 \omega_{0e}^2}{8}} \\ \times \left[ \frac{A_e}{A_e^2 - \delta^2} \left( \frac{A_e}{\delta} F(\delta, z) - e^{-A_e z} \right) - \frac{1}{L} \sum_{k=0}^\infty e^{-\frac{\omega_{0e}^2}{4t_c} (\delta^2 + \eta_k^2) t} \cos(z\eta_k) M_k(\delta, \eta_k) \right] \\ \times J_0(r\delta) \delta d\delta$$
(2.30)

com  $\eta_k = \frac{k\pi}{L}$ ,  $tc = \frac{\omega_{0e}^2}{4D}$ ,  $D = \frac{K}{\rho c}$  é a difusividade térmica,

$$F(\delta, z) = \frac{(e^{-\delta L} - e^{-A_e L})e^{\delta z} + (e^{\delta L} - e^{-A_e L})e^{-\delta z}}{\sinh(\delta L)},$$
(2.31)

$$M_0 = \frac{1 - e^{-A_e L}}{\delta^2},$$
 (2.32)

e para k = 1, 2, 3...

$$M_k(\delta, \eta_k) = \frac{2A_e^2[1 - (-1)^k e^{-A_e L}]}{(A_e^2 + \eta_k)(\delta^2 + \eta_k)}.$$
(2.33)

Essa solução foi obtida por B. C. Li[16], e por isso a chamaremos de "LIM"<sup>11</sup>.

Vamos a partir de agora verificar a consistência da aproximação de fluxo nulo para aqueles materiais nos quais as técnicas de LT e ET são usualmente aplicadas. Vamos utilizar os mesmos parâmetros definidos na seção (2.1.1), exceto nos casos em que o valor do parâmetro for mencionado.

Nas figuras (2.5) e (2.6) temos exemplos dos perfis axial e radial com os modelos CJM e LIM, sendo que a espessura e o coeficiente de absorção óptica foram definidos de forma a facilitar a visualização.

Com a figura (2.5) vemos que a aproximação prejudica o perfil próximo as superfícies, já a figura (2.6) mostra que a diferença entre as soluções é máxima em r = 0. Como estamos interessados em encontrar as condições em que a solução LIM é aplicavel, onde portanto ela reproduza o perfil de temperatura da solução CJM, não analisaremos os perfis diretamente, mas sim a diferença percentual entre eles. Calcularemos essa diferença por meio da seguinte expressão

$$\delta T(\%) = 100 \times \frac{T_{LIM} - T_{CJM}}{T_{LIM}}.$$
 (2.34)



Figura 2.5: Perfil de temperatura axial da amostra, considerando fluxo (CJM) e fluxo nulo (LIM).  $A_e = 1m^{-1}$ , L=2mm, r=0, t=100t<sub>c</sub>.



Figura 2.6: Perfil de temperatura no plano z=0, considerando fluxo (CJM) e fluxo nulo (LIM).  $A_e = 10^4 m^{-1}$ , L=0.1mm, t=100 $t_c$ . Vale lembrar que foi necessário utilizar um conjunto de parâmetros incomum para que fosse possível visualizar gráficamente as diferenças. Na prática nunca trataremos de espessuras da ordem de décimo de milímetro e raramente de absorções tão altas quanto  $10^4 m^{-1}$ .

 $\delta T$  será calculado em toda a espessura da amostra, de z = 0 a z = L, com r = 0, pois como vimos por meio da figura (2.6), o erro é máximo no centro da amostra. Faremos isso para diversas combinações de espessura, coeficiente de absorção óptica e tempo.

Na figura (2.7) temos  $\delta T(\%)$  em função da profundidade, com o intervalo de tempo e o coeficiente de absorção óptica fixos, para diversas espessuras. Em um experimento de LT/ET, um transiente de intensidade em função do tempo leva cerca de  $100t_c$ . Por isso o tempo foi fixado com esse valor.



Figura 2.7:  $\delta T(\%)$  entre CJM e LIM,  $t = 100t_c$ ,  $A_e = 1m^{-1}$ 

Mesmo para uma espessura muito fina, como 0, 5mm, a diferença entre as temperaturas não é tão grande. A aproximação melhora a medida que tomamos uma espessura mais grossa, pois assim a razão entre área afetada e não afetada pelo fluxo na superfície é menor. Para a amostra de 2,0mm, na região entre 0, 2L < z < 0, 8L o erro é praticamente zero, e mesmo próximo as superfícies o erro é sempre menor que 0,35%. Para amostras mais finas esse erro cresce, de forma que a aproximação de fluxo nulo começa a introduzir erros mais significativos.

Na figura (2.8) fixamos a espessura em 1mm e variamos o intervalo de tempo. Como poderiamos esperar, para longos intervalos de tempo a aproximação piora, sendo que para intervalos de tempo razoavelmente curtos, menores que 100  $t_c$ , a aproximação se mostra consistente, introduzindo um erro inferior a 0,4%.



Figura 2.8:  $\delta T(\%)$ entre CJM e LIM,  $L=1mm,\,A_e=1m^{-1}$ 

Verificamos como  $\delta T$  depende do coeficiente de absorção óptica por meio da figura (2.9), onde fixamos a espessura em 0.1mm. Que fique claro que a figura (2.9) serve para verificar



Figura 2.9:  $\delta T(\%)$  entre CJM e LIM, L = 0.1mm,  $t = 100t_c$ 

o comportamento de  $\delta T$  com a absorção, sem significar que o erro introduzido no modelo ao tratarmos de materiais altamente absorvedores será dessa ordem. Em geral os vidros estudados possuem espessuras da ordem 1mm, que sendo dessa ordem diminui significativamente  $\delta T$  que observamos na figura (2.9). De qualquer maneira, por meio dessa figura notamos que a aproximação de fluxo nulo introduz um erro muito pequeno, mesmo ao considerar uma amostra muito fina com absorção muito alta. Concluimos nesta seção que a aproximação de fluxo nulo é consistente, e que ao tratarmos de espessuras da ordem de 1mm e intervalos de tempo de tipicamente  $100t_c$ , o erro introduzido pela aproximação é insignificante. Já por meio da figura (2.9), notamos que coeficientes de absorção óptica muito altos fazem quase toda a energia do laser ser consumida próximo à primeira superfície, impedindo que a segunda seja aquecida. Por isso o erro relativo entre as soluções cresce perto da segunda superfície.

Ainda buscando uma solução mais simples, vamos introduzir outra aproximação e em seguida a analizaremos de maneira semelhante a realizada para a aproximação de fluxo nulo.

#### 2.3 Amostra semi-infinita e fluxo nulo

Na solução CJM consideramos fluxos da amostra para o ar nas superfícies da mesma, e na solução LIM consideramos o fluxo nulo em ambas. Agora, consideraremos uma amostra semi-infinita com fluxo nulo em sua superfície. Como na realidade a amostra possui uma determinada espessura, essa aproximação equivale a considerar fluxo nulo na primeira superfície, e fluxo entre amostra e amostra na segunda superfície.

O primeiro passo é fazer a transformada de laplace  $(t \rightarrow s)$  da equação (2.1), na qual mais uma vez usamos a seguinte propriedade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sf(s) - f(0),$$

e como T(r, z, 0) = 0, o último termo da equação acima é nulo. Assim obtemos

$$sT(r, z, s) - D\nabla^2 T(r, z, s) = \frac{Q(r, z)}{s}$$

Lembrando da definição do laplaciano em coordenadas cilíndricas,  $\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$sT(r,z,s) - D\nabla_r^2 T(r,z,s) - D\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(r,z,s) = \frac{Q(r,z)}{s}.$$
(2.35)

Agora, para fazer a transformada de Fourier em cossenos  $(z \rightarrow \lambda)$  utilizamos a propriedade

$$F_c\left[\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\right] = -\lambda^2 F_c(z) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big|_{z=0},$$
em que anulamos o último termo devido a condição de fluxo nulo  $\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial z}|_{z=0} = 0$ . Aplicando a transformada na equação (2.35) obtemos

$$sT(r,\lambda,s) - D\nabla_r^2 T(r,\lambda,s) + D\lambda^2 T(r,\lambda,s) = \frac{Q(r,\lambda)}{s}.$$
(2.36)

A transformada de Hankel<sup>12</sup>  $(r \rightarrow \alpha)$  possui a seguinte propriedade (Ref. [21], pag. 963)

$$H\left[\nabla_r^2 f(r)\right] = -\alpha^2 f(\alpha),$$

e por isso ela se torna muito útil para resolver a equação (2.36). Aplicando-a obtemos

$$sT(\alpha, \lambda, s) + D(\lambda^2 + \alpha^2)T(\alpha, \lambda, s) = \frac{Q(\alpha, \lambda)}{s},$$

que pode ser escrita de forma mais compacta

$$T(\alpha, \lambda, s) = \frac{Q(\alpha, \lambda)}{s(s + D(\lambda^2 + \alpha^2))},$$
(2.37)

em que

$$Q(\alpha,\lambda) = H\left[Q(r,\lambda)\right] = Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \alpha^2}{8}} Q(\lambda), \qquad (2.38)$$

$$Q(\lambda) = F_c [Q(z)] = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2}}.$$
(2.39)

Agora é preciso inverter as transformadas. Vamos começar fazendo a transformada inversa de Laplace  $(s \rightarrow t)$ , por meio da seguinte relação

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+D(\lambda^2+\alpha^2))}\right] = \frac{1-e^{-Dt(\alpha^2+\lambda^2)}}{D(\alpha^2+\lambda^2)},$$

que aplicada na equação (2.37), resulta em

$$T(\alpha, \lambda, t) = Q(\alpha, \lambda) \frac{1 - e^{-Dt(\alpha^2 + \lambda^2)}}{D(\alpha^2 + \lambda^2)},$$
(2.40)

Com esta equação escrita assim encontramos problemas para realizar as outras transformadas inversas. Para contornar isso podemos usar a relação

$$\frac{1 - e^{-Dt(\alpha^2 + \lambda^2)}}{D(\alpha^2 + \lambda^2)} = \int_0^t e^{-D(\alpha^2 + \lambda^2)\tau} d\tau,$$

<sup>12</sup>A transformada de Hankel é definida como  $f(\alpha) = H[f(r)] = \int_0^\infty f(r) J_0(\alpha r) r dr$ .

com a qual podemos reescrever a equação (2.40) assim

$$T(\alpha, \lambda, t) = \int_0^t Q(\alpha, \lambda) e^{-D(\alpha^2 + \lambda^2)\tau} d\tau, \qquad (2.41)$$

Agora faremos a transformada inversa de Hankel  $(\alpha \rightarrow r),$  que é definida como

$$f(r) = H^{-1}[f(\alpha)] = \int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha$$

Aplicando essa transformada inversa em (2.41), e usando  $Q(\alpha, \lambda)$  dado por (2.38), obtemos

$$T(r,\lambda,t) = Q_0 \int_0^t Q(\lambda) e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2 2\tau}{8t_c}} \left[ \frac{e^{\frac{-2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} \right] d\tau.$$
(2.42)

Para realizar a transformada inversa de Fourier em cossenos $(\lambda \rightarrow z)$ , precisamos utilizar o teorema da convolução para essa operação (Ref. [22], p. 280)

$$\mathfrak{S}_{C}^{-1}\left\{F_{C}(k)G_{C}(k)\right\} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(\xi) \left[f(x-\xi) + f(x+\xi)\right] d\xi,$$

em que f e gsão as transformadas inversas de  $F_c$  e  $G_c.$  Sendo  $F_C$  e  $G_C$  dados por

$$F_C(\lambda) = e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2 2\tau}{8t_c}},$$
  

$$G_C(\lambda) = Q(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2},$$

suas transformadas inversas são

$$f(z) = \sqrt{\frac{2t_c}{\tau\omega_{0e}^2}} e^{-\frac{z^2t_c}{\tau\omega_{0e}^2}}$$
$$g(z) = e^{-A_e z},$$

assim, fazendo a convolução obtemos

$$\Im_{C}^{-1}\left\{F_{C}(\lambda)G_{C}(\lambda)\right\} = \sqrt{\frac{t_{c}}{\pi\tau\omega_{0e}^{2}}} \int_{0}^{\infty} e^{-\xi A_{e}} \left[e^{-\frac{(z-\xi)^{2}t_{c}}{\tau\omega_{0e}^{2}}} + e^{-\frac{(z+\xi)^{2}t_{c}}{\tau\omega_{0e}^{2}}}\right] d\xi.$$

Calculando essa integral e usando-a na equação (2.42), obtemos a solução

$$T(r, z, t) = T_0 \int_0^t e^{\frac{1}{4}A_e \left(-4z + \frac{A_e \tau \omega_{0e}^2}{t_c}\right)} \left[\frac{e^{\frac{-2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c}\right] \\ \times \left(Erfc\left[\frac{A_e \tau \omega_{0e}^2 - 2zt_c}{2\omega_{0e}\sqrt{\tau t_c}}\right] + e^{2zA_e}Erfc\left[\frac{A_e \tau \omega_{0e}^2 + 2zt_c}{2\omega_{0e}\sqrt{\tau t_c}}\right]\right) d\tau, \quad (2.43)$$

que fica dependendo de uma integral numérica. Nessa solução  $T_0 = \frac{P_e \phi A_e}{\pi c \rho \omega_{0e}^2}$  e Erfc é a função erro complementar. Chamaremos essa solução de "BLM"<sup>13</sup>. Note que  $T_0$  não possui dimensão de temperatura, entretanto, há uma integral a ser feita, que quando o for "corrigirá" essa dimensão.

Procedendo de maneira similar ao que fizemos para analisar a aproximação de fluxo nulo, agora investigaremos a aproximação de amostra semi-infinita. Calcularemos  $\delta T$  por meio da seguinte expressão<sup>14</sup>

$$\delta T(\%) = 100 \times \frac{T_{LIM} - T_{BLM}}{T_{LIM}},$$
(2.44)

análoga a equação (2.34). Mais uma vez utilizaremos aqueles parâmetros definidos na seção (2.1.1).

Na figura (2.10) temos  $\delta T$  em função da espessura, com o coeficiente de absorção óptica e o intervalo de tempo fixos. Note que a aproximação é consistente até mesmo para uma



Figura 2.10:  $\delta T(\%)$  entre LIM e BLM,  $A_e = 1m^{-1}, t = 100t_c$ 

espessura de 0, 1mm, bem inferior às espessuras típicas dos vidros que estudamos. Para <sup>13</sup>BLM=Beer's Law Model. Note que a lei de Beer também é utilizada nos outros modelos vistos até aqui, porém, vamos trabalhar a maior parte do tempo com essa solução, o que justifica a conveniência da nomenclatura escolhida.

<sup>14</sup>Poderíamos verificar a diferença entre as soluções CJM e BLM, entretanto, com isso estaríamos testando duas aproximações ao mesmo tempo (fluxo nulo e amostra semi-infinita). Comparando as soluções LIM e BLM, obtemos os desvios devidos apenas a aproximação de amostra semi-infinita. espessuras maiores que 0,5mm  $\delta T$  é zero em mais da metade da amostra.

Na figura (2.11) analisamos o desvio entre as soluções em função do tempo. Podemos ver que mesmo para um intervalo de tempo excessivamente grande, como  $1000t_c$ , a aproximação continua consistente, principalmente na superfície da amostra atingida pelo laser (z=0).



Figura 2.11:  $\delta T(\%)$  entre LIM e BLM,  $A_e = 1m^{-1}$ , L = 1.5mm

Na segunda superfície o erro é mais significativo, e cresce com o tempo. Isso ocorre porque, como já dissemos, na aproximação de amostra semi-infinita há fluxo de calor na segunda superfície, entre vidro e vidro. Assim, a temperatura prevista pela solução BLM é menor do que a obtida com o modelo LIM, o que faz  $\delta T$  crescer, pois o definimos de maneira proporcional a  $(T_{LIM} - T_{BLM})$ .

A figura (2.12) mostra o comportamento de  $\delta T$  em função da profundidade, para diversos coeficientes de absorção óptica. O erro na segunda superfície da amostra cresce com a absorção óptica, ao mesmo tempo que se mantém quase nulo em cerca de 80% de sua espessura. Para explicar isso, na figura (2.13) temos a temperatura em função da profundidade, com ambas as soluções.

A figura (2.12) mostra uma diferença significativa entre as soluções na segunda superfície. Comparando com a figura (2.13), vemos que isso ocorre porque o alto coeficiente de absorção óptica atenua a fonte de calor rapidamente, de maneira que para  $A_e = 10^3 m^{-1}$ , a temperatura na primeira superfície é cerca de 5 vezes maior que na segunda. Como a temperatura é menor,



Figura 2.12:  $\delta T(\%)$  entre LIM e BLM,  $t = 100t_c$ , L = 1.5mm



Figura 2.13: Temperatura com as soluções LIM e BLM,  $t = 100t_c$ , L = 1.5mm o erro relativo é maior.

Com as comparações feitas até aqui, concluímos que para os parâmetros que fixamos as aproximações de fluxo nulo e amostra semi-infinita são consistentes, introduzindo um erro desprezível. Este erro tem alguma relevância apenas próximo a segunda superfície de amostras com alto coeficiente de absorção. Adiantamos que essa solução será utilizada na técnica de ET, e aplicando-a para estudar vidros podemos dizer que não há muitas restrições sobre as propriedades da amostra. Entretanto, quando tratarmos de certas situações limites será desnecessário utilizar essa solução.

#### 2.3.1 Limite de baixa absorção

No limite de baixa absorção podemos obter uma solução mais simplificada para a equação de difusão. Para entender isso, na figura (2.14) temos a temperatura obtida com a solução BLM para o plano XZ da amostra, considerando alguns valores para o coeficiente de absorção óptica. Por meio dessa figura vemos que, quando a absorção é baixa a dependência da



Figura 2.14: Perfil de temperatura com a solução BLM, para uma seção plana da amostra, considerando diferentes coeficientes de absorção[12].

temperatura com a coordenada Z desaparece, em outras palavras, a temperatura só varia radialmente. Por isso, no limite de baixos valores de coeficientes de absorção óptica  $(A_e \rightarrow 0)$  podemos usar um termo de fonte independente de z, ou seja, Q(z) = 1. O termo de fonte da equação (2.1) assume então uma forma mais simples, dada por

$$Q(r,z) = Q_0 e^{\frac{-2r^2}{\omega_{0e}^2}}$$

Repetindo o mesmo procedimento usado na obtenção da solução (2.43) considerando esse

termo de fonte, obtemos a seguinte solução

$$T(r,t) = T_0 t_c \left[ Ei \left( -\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2} \right) - Ei \left( -\frac{2r^2 t_c}{\omega_{0e}^2(2t+t_c)} \right) \right],$$
(2.45)

onde Ei(x) é a função exponencial integral<sup>15</sup>, que também pode ser obtida fazendo o limite  $(A_e \rightarrow 0)$  na equação (2.43). Vamos nos referir a essa solução através da sigla "LAM"<sup>16</sup>. Esta solução já havia sido obtida por Gordon[5] e colaboradores, que trataram o problema como o de uma fonte cilíndrica de calor, sem pensar na aproximação de amostra semi-infinita, entretanto o resultado é exatamente o mesmo.

Na figura (2.15) temos os perfis radiais obtidos com os modelos BLM e LAM, no plano superficial e na profundidade de 1mm. Fica claro que o LAM funciona bem em amostras



Figura 2.15: Perfil Radial, BLM e LAM,  $t = 50t_c$ 

com coeficiente de absorção óptica  $A_e < 200m^{-1}$ , sendo que para absorções ópticas com essa intensidade o desvio entre os perfis na superficie é bem pequeno, e na profundidade de 1mm já torna-se significativo.

Iniciamos este capítulo buscando descrever o aumento de temperatura da amostra, entretanto, ainda não sabemos exatamente como as técnicas de LT e ET vão depender do perfil de temperatura, e por isso ainda não podemos afirmar exatamente quando poderemos utilizar uma ou outra solução.

 $<sup>^{15}\</sup>mathrm{A}$ função exponencial integral é definida como $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ 

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>LAM=Low Absortion Model.

#### 2.3.2 Limite de alta absorção

No limite de altos valores do coeficiente de absorção óptica  $(A_e \to \infty)$ , podemos pensar na situação extrema em que toda a luz seja absorvida na superfície, assim temos<sup>17</sup>  $Q(z) \cong \frac{2}{A_e}\delta(z)$ , e de forma analoga ao desenvolvimento feito para obter a solução (2.43), encontramos a seguinte solução

$$T(r,z,t) = T_0 \int_0^t \frac{4e^{\frac{-z^2 t_c}{\tau \omega_{0e}^2}} e^{\frac{-2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}}}{\sqrt{\pi \tau \omega_{0e}^2/t_c} A_e(1+2\tau/t_c)} d\tau.$$
 (2.47)

Identificaremos essa equação neste trabalho por meio da sigla "HAM"<sup>18</sup>. Note que assim como no limite de baixa absorção óptica, essa solução pode ser obtida diretamente da equação (2.43) aplicando o limite adequado.

Na figura (2.16) temos perfis radiais de temperatura, obtidos com os modelos BLM e HAM, a profundidade de 1mm, e os demais parâmetros são aqueles que fixamos na seção 2.1.1.

Na figura (2.17) fixamos a posição z = r = 0, e mostramos a diferença percentual entre os modelos BLM e HAM nessa posição, em função do coeficiente de absorção óptica.

Podemos ver que a aproximação consistente para  $A_e > 10^6 m^{-1}$ , visto que para valores inferiores a esse o erro é maior que 10%. De qualquer maneira, quando utilizarmos essa solução voltaremos a compará-la com o modelo BLM para termos convicção de nossos resultados. Agora vamos para o segundo passo do desenvolvimento teórico das técnicas de LT e ET.

Fechamos este capítulo lembrando que as aproximações que fizemos nos conduziram a expressões mais simples, e comparando essas expressões com a solução CJM, foi possível determinar em que condições e em quais regiões da amostra as aproximações de fluxo nulo

<sup>17</sup>No limite  $A_e \to \infty$  temos

$$Limite[A_e e^{-A_e z}, A_e \to \infty] = 2\delta(z),$$

Então, quando estivermos tratando desse limite, podemos substituir a lei de Beer

$$e^{-A_e z} \to \frac{2\delta(z)}{A_e}.$$
 (2.46)

<sup>18</sup>HAM=High Absortion Model.



Figura 2.16: Perfis radiais de temperatura, BLM e HAM, z = 1mm.



Figura 2.17: Diferença percentual entre BLM e HAM, na posição r = z = 0, em função do coeficiente de absorção.

e amostra semi infinita são consistentes.

# Capítulo 3

# Modelo teórico para a lente térmica

Desenvolver um modelo teórico para a LT significa, mais precisamente, descrever matematicamente o fenômeno que foi introduzido no primeiro capítulo deste trabalho. Ou seja, o aquecimento de uma amostra por um feixe laser perturba um segundo feixe, o feixe de prova, e descrevendo quantitativamente essa perturbação podemos obter diversas informações sobre as propriedades da amostra.

## 3.1 Intensidade do feixe de prova

O modelo de lente térmica proposto por Shen[7] e colaboradores foi desenvolvido considerando o limite de baixos valores do coeficiente de absorção óptica, onde pode-se considerar uma fonte de calor cilíndrica e independente de z ao longo da amostra. O perfil de temperatura utilizado nesse caso é dado pela solução (2.45)

$$T(r,t) = \frac{Q_0 t_c}{2} \left[ Ei \left( -\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2} \right) - Ei \left( -\frac{2r^2 t_c}{\omega_{0e}^2(2t+t_c)} \right) \right]$$

Utilizamos esse perfil de temperatura para calcular a fase adicional induzida pela LT, como sugerimos na introdução deste trabalho. A fase é calculada por meio da expressão (1.2)

$$\phi_{LT}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^L \left[ T(r,z,t) - T(0,z,t) \right] dz,$$

e com ela obtemos a amplitude por meio da expressão (B.5)

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C_1 \int_0^\infty e^{(iV - 1)g - i\phi(g, t)} dg.$$

Para facilitar essa integração, foi feita uma aproximação que consiste em considerar que a variação da fase seja pequena. Assim utilizou-se a expansão em primeira ordem da exponencial  $e^{-i\Phi} \approx 1 - i\Phi$ , e a expressão (B.5) ficou

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C_1 \int_0^\infty (1 - i\phi(g, t)) e^{(iV - 1)g} dg.$$
(3.1)

Com isso fazemos a integral e calculando seu módulo ao quadrado obtemos

$$I_p(t) = I_p(0) \left[ 1 - \frac{\theta_{LT}}{2} tan^{-1} \left( \frac{2mV}{\left[ (1+2m)^2 + V^2 \right] \frac{t_c}{2t} + 1 + 2m + V^2} \right) \right]^2$$
(3.2)

em que  $m = \frac{\omega_{1p}^2}{\omega_{0e}^2}$  é a razão entre as áreas dos feixes de prova e excitação no centro da amostra, e  $\theta_{LT}$  é um dos parâmetros de ajuste, definido

$$\theta_{LT} = \frac{P_e A_e L}{K \lambda_p} \left(\frac{ds}{dT}\right) \phi.$$

Na expressão (3.2) um dos termos obtidos com a integração da expressão (3.1) foi desprezado<sup>1</sup>. Os parâmetros de ajuste do modelo de lente térmica são  $\theta_{LT}$  e  $t_c = \frac{\omega_{0e}^2}{4D}$ , sendo que por meio desse último obtém-se diretamente o valor da difusividade, uma vez que  $\omega_{0e}$  é um parâmetro do laser que já deve ser conhecido antes de executar o experimento. Vamos agora verificar uma possível generalização do modelo de LT.

## 3.2 Correção para grandes coeficientes de absorção óptica

Como dissemos na introdução, a técnica de lente térmica é amplamente utilizada atualmente, sobretudo no estudo de vidros, cristais, óleos diversos, etc. Porém, a solução LAM, que é utilizada para se obter a equação (3.2), possui por construção uma limitação quanto ao coeficiente de absorção óptica da amostra, que deve ser suficientemente baixo.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O sinal de lente térmica só é ajustado ao se desprezar este termo. Contudo, foi verificado[6] que isso equivale a tomar a expressão exata para a exponencial da fase, sem expandi-la, levando a uma diferença insignificante.

Temos como alternativa substituir a solução LAM pelas soluções CJM ou LIM. Entretanto, elas conduzem a equações muito complicadas. Uma possível solução para contornar esse problema consiste em utilizar a seguinte aproximação

$$T(r, z, t) \approx e^{-A_e z} \times T_{Lam}(r, t), \qquad (3.3)$$

em que introduzimos a dependência da temperatura com a coordenada axial "a mão", utilizando a lei de Beer. Essa lei deescreve o decaimento da intensidade da luz ao atravessar a amostra. Com essa aproximação estamos considerando que a temperatura decaira seguindo essa mesma lei. Vamos agora analizar essa equação, comparando-a com a solução CJM, que é a descrição mais exata que temos do perfil de temperatura.

Na figura (3.1) temos alguns perfis axiais de temperatura, com as duas soluções, onde mais uma vez foram utilizados aqueles parâmetros definidos na seção 2.1.1. As duas soluções



Figura 3.1: Perfil axial de temperatura, CJM e Aproximação, t= $100t_c$ , r = 0,  $A_e = 1000m^{-1}$ 

produzem perfis diferentes, entretanto, precisamos verificar o quanto o modelo para o cálculo da intensidade é sensível a essas diferenças no perfil de temperatura.

Na expressão (1.2), para a fase adicional do feixe de prova devida a lente térmica, temos uma integral da temperatura em função de "z", sob toda a espessura da amostra. Em outras palavras, isso significa que na lente térmica não estamos interessados diretamente no perfil de temperatura, mas sim na integral da temperatura sob a espessura da amostra. Por isso vamos analisar o comportamento dessa integral, considerando a temperatura dada pelas duas soluções que estamos tratando nesta seção. Para os perfis constantes na figura (3.1), constatamos que a aproximação introduz um erro da ordem de 0,2% e 0,1% na fase, para as espessuras de 0.2mm e 1mm, respectivamente.

Na figura (3.2) temos novamente os perfis axiais de temperatura, mas agora considerando uma espessura fixa e diferentes coeficientes de absorção óptica. A medida que aumentamos



Figura 3.2: Perfil axial de temperatura, CJM e Aproximação, t= $100t_c$ , r = 0, L = 1mm

o valor do coeficiente, o perfil obtido com a aproximação se diferencia mais do perfil correto, embora o erro introduzido no calculo da fase ao se utilizar a aproximação permaneça pequeno. Integrando a temperatura, verificamos que a aproximação introduz na fase um erro de 0, 1%, 0, 45% e 1, 3%, em ordem crescente de coeficiente de absorção.

Note que, em todos os perfis que geramos com a aproximação, ela produz uma temperatura superior a correta na região próxima a primeira superfície, e uma temperatura inferior a correta na região próxima a segunda superfície, de forma que ao fazer a integral essas "áreas" se anulam, produzindo na fase um erro muito pequeno. Ainda investigando a exatidão do cálculo da fase, na figura (3.3) temos a fase em função de r, calculada com as soluções CJM e LIM. Com isso, vemos que a aproximação de fluxo nulo introduz um erro insignificante



Figura 3.3: Variação da fase calculada com as soluções CJM (simbolos sólidos) e LIM (simbolos abertos), para diferentes espessuras. Os parâmetros utilizados foram:  $\omega_{0e} = 44 \mu m$ ,  $t_c = 0.8 m s$ ,  $t = 100 t_c$  e  $A_e = 1000 m^{-1}$ .

na fase. Na figura (3.4) temos um gráfico semelhante, mas agora comparando a fase obtida com as soluções LIM e a aproximação (3.3), incluindo uma curva da fase calculada com a solução LAM.

A solução LAM não depende da espessura da amostra. Com isso, para o coeficiente de absorção que consideramos na figura (3.4) o erro na fase se torna grande para as espessuras maiores<sup>2</sup>. Por outro lado, não verificamos diferenças entre as fases calculadas com as soluções LIM e a aproximação.

Concluindo nossa análise, vimos que a "correção" introduzida na relação (3.3) não é capaz de descrever o perfil de temperatura corretamente em toda a espessura da amostra, entretanto, para o propósito da técnica de LT essa aproximação é extremamente eficaz. Podemos utiliza-la para calcular a fase (1.2) com segurança, mesmo para coeficientes de absorção tão intensos quanto  $5000m^{-1}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Para a espessura de 0.02mm as fases calculadas com as soluções LIM e LAM praticamente coincidem. Isso ocorre porque para o coeficiente de absorção de  $A_e = 1000m^{-1}$ , a temperatura deve variar pouco na região da superfície a até 0.02mm de profundidade.



Figura 3.4: Variação da fase calculada com as soluções LIM (simbolos sólidos) e a aproximação (3.3) (simbolos abertos), para diferentes espessuras. A linha contínua é a fase calculada com a solução LAM. Os parâmetros utilizados foram:  $\omega_{0e} = 44 \mu m$ ,  $t_c = 0.8 ms$ ,  $t = 100 t_c$  e  $A_e = 1000 m^{-1}$ .

Utilizando a expressão (3.3) para a temperatura, a expressão para a intensidade do centro do feixe no fotodetector fica

$$I_p(t) = I_p(0) \left[ 1 - \frac{\theta_{LT}}{2} \frac{(1 - e^{-A_e L})}{A_e L} tan^{-1} \left( \frac{2mV}{[(1 + 2m)^2 + V^2] \frac{t_e}{2t} + 1 + 2m + V^2} \right) \right]^2.$$
(3.4)

Na seção (5.1), onde trataremos de um exemplo de ajuste de LT, voltaremos a esse ponto para discutir o que ocorre com os parâmetros de ajuste ao se utilizar a expressão (3.4) ao invés da expressão original (3.2).

# Capítulo 4

# Modelo teórico para o espelho térmico

Enquanto na LT a perturbação do feixe de prova é causada pela variação do caminho óptico, no ET o efeito é gerado pela deformação superficial, que faz variar a densidade de energia do feixe de prova. Por isso, no modelo teórico do ET precisamos encontrar também o perfil de deslocamento, que é de certa forma uma descrição topográfica da superfície da amostra, em função da temperatura.

## 4.1 Perfil de deslocamento

Na aproximação quase estática, onde consideramos que uma variação de temperatura cria instantaneamente uma deformação no material, a equação termoelástica a ser resolvida é[23]

$$(1 - 2\nu)\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 2(1 + \nu)\alpha_T \nabla T(r, z, t)$$
(4.1)

em que **u** é o vetor deslocamento,  $\alpha_T$  é o coeficiente de expansão térmico e  $\nu$  é a razão de Poisson<sup>1</sup>. Na figura (4.1) temos um esquema indicando o que exatamente o vetor **u** representa. A equação (4.1) é valida para um meio isotrópico e homogêneo<sup>2</sup>. Essa equação depende também das condições de tensão superficial, e por isso na figura (4.2) temos um

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Suponha que um material receba uma tensão na direção x, e que isso produza uma reação na direção y. A razão de Poisson é definida como  $\nu = -\frac{\xi_y}{\xi_x}$ , onde  $\xi_x$  é a tensão na direção x e  $\xi_y$  é a compressão na direção y

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Considerar um caso mais geral do que este introduz fortes complicações matemáticas.



Figura 4.1: Vetores de deslocamento. O eixo horizontal representa a superfície da amostra quando em repouso, e os vetores (setas) indicam o deslocamento de um ponto da superfície quando ela é aquecida localmente pelo feixe de excitação.

esquema dos componentes da tensão para um cubo, em coordenadas cartesianas.



Figura 4.2: Componentes da tensão

Sendo  $\sigma_{ij}$  um componente da tensão, o índice *i* indica qual a normal de um plano, e o índice *j* indica a direção do componente a partir deste plano. Então, em cada plano temos 3 direções, e portanto 3 componentes da tensão. Como exemplo, na figura (4.2) utilizamos  $\sigma_{31}$  para representar o componente da tensão na direção  $e_1$ , no plano definido pelo versor normal  $e_3$ .

Supondo que a amostra esteja livre de tensões em sua superfície, e adotando o mesmo

sistema de coordenadas utilizado no capítulo 2, teremos como condições de contorno que os seguintes componentes da tensão são nulos:

$$\sigma_{zz} \mid_{z=0} = \sigma_{rz} \mid_{z=0} = 0, \tag{4.2}$$

onde  $\sigma_{zz}$  e  $\sigma_{rz}$  são os componentes da tensão perpendiculares a superfície da amostra. Lembramos que as demais componentes não são nulos, pois por exemplo, o componente  $\sigma_{zr}|_{z=0}$ é o componente superficial que aponta na direção r, onde também há amostra, de maneira que um ponto qualquer não está livre para se movimentar nessa direção.

A solução da equação (4.1) pode ser escrita, em coordenadas cilíndricas, por meio da introdução do potencial escalar de deslocamento  $\Psi$  e a função Love  $\psi$ , sendo  $\Psi$  dado pela equação de Poisson[23]

$$\nabla^2 \Psi(r, z, t) = \chi T(r, z, t) \tag{4.3}$$

em que  $\chi = \alpha_T \frac{1+\nu}{1-\nu}$ , e  $\psi$  é obtido por meio da equação biharmônica[23]

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi(r, z, t) = 0 \tag{4.4}$$

Assim, podemos obter os componentes do deslocamento por meio das relações

$$\bar{u}_z(z,r,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\bar{u}_r(z,r,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$(4.5)$$

$$\bar{\bar{u}}_{z}(z,r,t) = \frac{1}{1-2\nu} \left[ 2(1-\nu)\nabla^{2} - \frac{\partial}{\partial z^{2}} \right] \psi$$

$$\bar{\bar{u}}_{r}(z,r,t) = \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$(4.6)$$

sendo o deslocamento total dado por

$$\mathbf{u}(r,z,t) = \bar{\mathbf{u}}(r,z,t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(r,z,t).$$
(4.7)

Utilizando este método estamos dividindo o problema (4.1) em outros dois mais simples. Por isso precisamos reescrever as condições de contorno (4.2) para obter os componentes  $\bar{\sigma}$ e  $\bar{\sigma}$ , que ficam

$$\sigma_{zz} \mid_{z=0} = \bar{\sigma}_{zz} \mid_{z=0} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz} \mid_{z=0} = 0, \tag{4.8}$$

$$\sigma_{rz} \mid_{z=0} = \bar{\sigma}_{rz} \mid_{z=0} + \bar{\bar{\sigma}}_{rz} \mid_{z=0} = 0.$$
(4.9)

Os componentes da tensão são obtidos por meio das seguintes expressões [23]

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z^2} - \nabla^2 \Psi \right], \qquad (4.10)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad (4.11)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu)\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right], \qquad (4.12)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu)\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right], \qquad (4.13)$$

em que E é o módulo de Young<sup>3</sup>. As duas primeiras condições estão ligadas a equação de Poisson e as duas últimas ligadas a equação biharmônica.

As condições (4.2) dizem que a tensão na superfície é nula, e como dissemos, para se expandir radialmente um ponto qualquer do material não está livre de tensão, pois nessa direção há outro ponto. Ocorre então que os componentes  $\bar{u}_z$  e  $\bar{\bar{u}}_z$  dominam em relação as componentes radiais. Apesar da figura (4.1) ter sido construida manualmente, ela também serve para ilustrar esse fato.

#### 4.1.1 Equação de Poisson

A solução da equação de Poisson (4.3), o potencial escalar de deslocamento, pode ser escrito  $como^4$ 

$$\Psi(r,z,t) = -\chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha,\lambda,t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cos(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \qquad (4.14)$$

em que  $T(\alpha, \lambda, t)$  é a temperatura no espaço de Hankel Fourier.

Precisamos definir qual é o modelo adequado para descrever o perfil de temperatura, <sup>3</sup>O módulo de Young, ou módulo de elasticidade, é um parâmetro mecânico que relaciona a pressão exercida na superfície do material com sua deformação. Matematicamente o escrevemos  $E = \frac{FL_0}{A\Delta L}$ , sendo  $F, A, L_0 \in \Delta L$  a força, área, comprimento de repouso, e variação do comprimento quando a força é aplicada, respectivamente.

<sup>4</sup>Essa solução é obtida aplicando transformadas de Hankel e Fourier em cossenos na equação (4.3), de forma semelhante ao que fizemos na seção 2.3 para resolver a equação de difusão de calor, considerando a amostra semi-infinita. As integrais que aparecem aqui são as integrais de inversão de cada uma das transformadas. uma vez que, como fizemos no capítulo anterior ao tratar da LT, queremos ter convicção da validade de nossos resultados.

No modelo de LT concluímos que a solução (3.3) para o perfil de temperatura é muito conveniente, pois o erro introduzido no cálculo da fase, e consequentemente na intensidade do feixe de prova, é muito pequeno. Por se tratar de uma expressão matematicamente simples, poderíamos pensar em utilizá-la também para a técnica de ET, entretanto, o fato que torna possível utilizar essa aproximação na LT é a expressão para o cálculo da fase, em que temos a integral sob a espessura da amostra.

No ET o cálculo da fase é completamente diferente do utilizado na lente térmica. Como vimos na introdução deste trabalho, a fase é calculada por meio da expressão (1.3). A técnica trata de monitorar a reflexão do feixe na superfície, e por isso temos que descrever precisamente a temperatura nessa região. Por este motivo a solução (3.3) não é interessante para a técnica de ET.

No capítulo (2) vimos que a solução BLM, que considera a amostra semi-infinita, reproduz com fidelidade o perfil de temperatura, da superfície até cerca de 80% da profundidade da amostra. Os desvios encontrados entre a solução BLM e a CJM, na segunda superfície da amostra, devem ser irrelevantes para o espelho térmico, uma vez que a deformação na superfície está fracamente relacionada com a temperatura em regiões distantes dela. Por isso, a solução BLM é a descrição do perfil de temperatura conveniente para a técnica de ET. Novamente, ao adotarmos essa solução podemos utilizar a relação (2.41) para  $T(\alpha, \lambda, t)$ , que utilizamos para obter a solução BLM.

Para calcular a componente do deslocamento na direção z utilizamos a expressão (4.5). Lembrando que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \cos(\lambda z) \right] = -\lambda sen(\lambda z),$$

aplicamos a derivada na equação (4.3) e assim obtemos

$$\bar{u}_z(r,z,t) = \chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha,\lambda,t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \lambda sen(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda.$$
(4.15)

Como dissemos no inicio deste capítulo, no modelo teórico de ET precisamos de uma descrição da superfície da amostra, e por isso estamos interessados no comportamento de  $\mathbf{u}(r, 0, t)$ . Na equação (4.15), o núcleo da integral possui um termo  $sen(\lambda z)$ , de maneira que em z = 0 esse componente do deslocamento é nulo, ou seja,  $\bar{u}_z(r, 0, t) = 0$ .

Utilizando mais uma vez a definição do laplaciano em coordenadas cilíndricas,  $\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , a relação (4.10) fica

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[ -\nabla_r^2 \Psi \right],$$

e aplicando-a ao potencial escalar de deslocamento (4.15), obtemos a componente  $\bar{\sigma}_{zz}$  da tensão

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\chi \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cos(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha d\lambda,$$

que em z = 0 fica

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -\chi \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha,\lambda,t)}{\alpha^2 + \lambda^2} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha d\lambda.$$
(4.16)

Agora, para calcular o componente  $\bar{\sigma}_{rz}$  da tensão utilizamos a relação (4.11), com a qual obtemos

$$\bar{\sigma}_{rz} = -\chi \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \lambda sen(\lambda z) J_1(\alpha r) \alpha^2 d\alpha d\lambda,$$

e que no plano z=0fica

$$\bar{\sigma}_{rz}\mid_{z=0}=0\tag{4.17}$$

Vimos então que a solução da equação de Poisson não contribui para o deslocamento superficial. Entretanto, por meio da equação de Poisson obtivemos as condições (4.16) e (4.17), que será necessárias para aplicar as condições de contorno na próxima seção.

#### 4.1.2 Equação Biharmônica

Voltando a equação biharmônica (4.4), temos que a sua solução é a função de "Love", que pode ser expressa por[23]

$$\psi(r,z,t) = \int_0^\infty (C + \alpha z G) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, \qquad (4.18)$$

em que C e G são constantes definidas pelas condições de contorno da tensão, ou seja, pelas relações (4.8) e (4.9). Utilizando-as juntamente com  $\bar{\sigma}_{zz} |_{z=0}$  e  $\bar{\sigma}_{rz} |_{z=0}$  obtidas na seção anterior, podemos escrever as condições de contorno para  $\bar{\sigma}$  como

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}|_{z=0} = \chi \frac{E}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha,\lambda,t)}{\alpha^2 + \lambda^2} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha d\lambda, \qquad (4.19)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0.$$
 (4.20)

Utilizando as expressões (4.12) e (4.13), obtemos

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^\infty (C+G+\alpha Gz - 2G\nu) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha, \qquad (4.21)$$
$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^\infty (C+\alpha Gz - 2G\nu) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) \alpha^3 d\alpha.$$

Aplicando a condição (4.20) a essa última equação, temos

$$\bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^\infty (C-2G\nu) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) \alpha^3 d\alpha = 0,$$

de onde obtemos  $C = 2G\nu$ . Antes de utilizarmos a outra condição de contorno, substituimos  $C \rightarrow 2G\nu$  na equação (4.21), que fica

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^\infty G(1+\alpha z) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha.$$

No plano z = 0, a equação acima fica

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^\infty G J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha, \qquad (4.22)$$

então, utilizamos a condição (4.19) para obter a seguinte expressão

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty GJ_0(\alpha r)\alpha^3 d\alpha = \chi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{T(\alpha,\lambda,t)}{\alpha^2+\lambda^2}J_0(\alpha r)\alpha^3 d\alpha d\lambda$$

que podemos simplificar para obter

$$G = (1 - 2\nu)\chi f(\alpha, t).$$

onde por conveniência definimos

$$f(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda.$$
(4.23)

Com G escrito nessa maneira, a constante C fica definida por

$$C = 2\nu(1 - 2\nu)\chi f(\alpha, t),$$

Substituindo essas constantes na função de "Love", obtemos

$$\psi(r,z,t) = \chi \int_0^\infty (1-2\nu)(z\alpha+2\nu)f(\alpha,t)e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)d\alpha, \qquad (4.24)$$

Para determinar  $f(\alpha, t)$ , utilizaremos a expressão (2.41), na qual ainda não definimos o termo de fonte Q(r, z). Na solução de equação de difusão com aproximação de amostra semi-infinita, foram considerados três possíveis casos para a dependência da fonte com o eixo "z"

$$Q(z) = \begin{cases} 1 & , LAM \\ e^{-A_e z} & , BAM \\ \frac{2}{A_e}\delta(z) & , HAM \end{cases}$$
(4.25)

e via relação (2.39), podemos obter as transformadas de Fourier em cossenos das equações acima

$$Q(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\delta(\lambda) &, LAM\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2}} &, BAM\\ \frac{2}{A_e}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} &, HAM \end{cases}$$
(4.26)

Com isso, por meio da relação (2.38) determinamos  $Q(\alpha, \lambda)$  para cada um dos três casos.

No limite de baixa absorção (LAM), a equação (4.23) fica

$$f_{LAM}(\alpha, t) = \int_0^t Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4\alpha^2} e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \alpha^2}{8}} e^{-\frac{\alpha^2 \tau \omega_{0e}^2}{4t_c}} d\tau, \qquad (4.27)$$

No caso mais geral, descrito pela lei de Beer, ficamos com

$$f_{BLM}(\alpha,t) = \int_0^t Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \frac{e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \alpha^2}{8}}}{(\alpha^2 - A_e^2)} \left\{ e^{\frac{\tau \omega_{0e}^2 (A_e^2 - \alpha^2)}{4t_c}} Erfc\left(\frac{A_e \omega_{0e}}{2\sqrt{t_c/\tau}}\right) - \frac{A_e}{\alpha} Erfc\left(\frac{\alpha \omega_{0e}}{2\sqrt{t_c/\tau}}\right) \right\} d\tau,$$

$$(4.28)$$

e no limite de alta absorção (HAM) temos

$$f_{HAM}(\alpha, t) = \int_0^t Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4\alpha^2 A_e} e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \alpha^2}{8}} Erfc\left(\frac{\alpha \omega_{0e} \sqrt{\tau}}{w\sqrt{t_c}}\right) d\tau.$$
(4.29)

O componente  $\bar{\bar{u}}_z$  do deslocamento é obtido por meio da relação (4.6), com a qual obtemos

$$\bar{\bar{u}}_z(r,z,t) = -\chi \int_0^\infty \alpha^2 (2+z\alpha-2\nu) f(\alpha,t) e^{-z\alpha} J_0(r\alpha) d\alpha, \qquad (4.30)$$

e que, como podemos ver, não é nula na superfície como a componente  $\bar{u}_z$ , de forma que a expressão (4.30) é a descrição do deslocamento superficial da amostra que procuravamos.

Alguns autores[13, 14] que trabalharam com técnicas baseadas na reflexão superficial da luz, consideraram que o perfil de intensidade gaussiano do laser induzia um deslocamento da superfície com perfil também gaussiano. Outros utilizaram esse tipo de aproximação, mas já sugeriram que o perfil de deslocamento não deveria ter essa forma[15]. Na figura (4.3) temos o perfil de temperatura e a deformação superficial induzida por ele.



Figura 4.3: Perfil de temperatura (linhas continuas) e deformação superficial (circunferências)[17].

Essa figura mostra que o perfil de deslocamento não acompanha diretamente a temperatura, e também que tanto a temperatura quanto o deslocamento da superfície não seguem uma distribuição gaussiana. Já poderíamos esperar que o perfil de deslocamento fosse diferente do perfil de temperatura, pois o deslocamento de um ponto não depende apenas da temperatura desse ponto.

Nas figuras (4.4) e (4.5) temos um exemplo do comportamento do perfil de deslocamento em função do tempo e da profundidade, respectivamente.



Figura 4.4: Evolução temporal do perfil de deslocamento da superfície da amostra[12]. Nesta simulação foram utilizados os parâmetros de um vidro LSCAS dopado com 3,5% de  $TiO_2[12]$ :  $A_e = 1061m^{-1}, D = 6 \times 10^{-7}m^2/s, k = 1,5W/mK, \alpha_T = 7,7, \nu = 0,29, \phi = 0,72, e os$  parâmetros para o laser foram  $P_e = 20mW, \lambda_e = 514nm$  e  $\omega_{0e} = 44\mu m$  ( $t_c = 0,81ms$ ).

Nas próximas seções deste trabalho, veremos que é possível obter bons dados experimentais de ET a partir de um vidro. Com o ajuste da curva experimental pelo modelo teórico é possível determinar o deslocamento da superfície da amostra, que como vimos nas figuras acima, é da ordem de nanometros. Em outras palavras, a técnica de ET é capaz de detectar deformações nessa escala[17]. Lembramos mais uma vez que, apesar de estarmos usando um vidro como exemplo, a técnica de ET não é restrita somente aplicações nesses materiais.



Figura 4.5: Perfil de deslocamento da amostra, em função da profundidade[12]. Foram utilizados os mesmos parâmetros da figura (4.4).

# 4.2 Fase e intensidade do feixe de prova

Como dissemos na seção 1.3, a variação da fase do feixe de prova no ET pode ser obtida por meio da expressão (1.3)

$$\Phi(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2u_z(r,0,t)$$

Alternativamente, a fase pode ser obtida por meio da expressão

$$\Phi(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2 \left[ u_z(r,0,t) - u_z(0,0,t) \right], \qquad (4.31)$$

sendo que a variação da fase contínua sendo a mesma. Na definição (1.3) a diferença de fase é relativa a superfície da amostra antes do efeito,  $u_z(0,0,0)$ . Já na definição (4.31), ela é relativa ao pico da deformação, que é  $u_z(0,0,t)$ .

Assim como no modelo de lente térmica, neste modelo assumimos que a energia absorvida do feixe de prova é insignificante, se comparada a aquela absorvida do feixe de excitação. Não é difícil criar essa situação em laboratório, uma vez que o feixe de prova possui uma potência da ordem de 1 miliwats, e o feixe de excitação pode possuir potências bem maiores do que essa. E ainda, geralmente os comprimentos de onda dos feixes de excitação e prova são bem diferentes<sup>5</sup>, sendo comum que o coeficiente de absorção óptica seja muito maior no

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Em situações cotidianas, excitamos com um laser verde de comprimento de onda na faixa de 500-540

comprimento de onda da excitação. Além disso, o raio do feixe de prova é maior que o raio do feixe de excitação. Muito cuidado deve ser tomado quando a situação for oposta a essa, ou seja, quando a absorção for mais intensa no comprimento de onda do feixe de prova.

Usando a teoria de difração de Fresnel, podemos obter a amplitude complexa do feixe de prova no plano do fotodetector (Ver apêndice B). Neste modelo utilizamos apenas o ponto central do feixe de prova, assim podemos escrever a amplitude, em coordenadas cilíndricas, como

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C_1 \int_0^\infty e^{(iV - 1)g - i\Phi(g, t)} dg, \qquad (4.32)$$

em que,  $C_1 = B \left[ i \pi \omega_{1p}^2 / (\lambda_p Z_2) \right] e^{-2i\pi Z_2 / \lambda_p}$ , e V é dado pela expressão (B.6), já utilizada no modelo de lente térmica. Note que " $Z_2$ " é a distância entre a amostra e o fotodetector, que não é a mesma distância nas duas técnicas, pois os feixes transmitidos e refletidos percorrem caminhos diferentes.

A fase que consta na equação (4.32) é obtida por meio das expressões (4.30) e (1.3). Utilizando  $f(\alpha, t)$  dado por (4.27), obtemos a fase no limite de baixa absorção

$$\Phi_{LAM}(g,t) = \theta_{ET} \sqrt{2\pi} \omega_{0e} \left\{ \frac{e^{\frac{-gm}{1+2t/t_c}}}{(1+2t/t_c)^{1/2}} \left[ \left( 1+2gm+\frac{2t}{t_c} \right) I_0 \left( \frac{gm}{1+2t/t_c} \right) + 2gm I_1 \left( \frac{gm}{1+2t/t_c} \right) \right] - e^{gm} [(1+2gm)I_0(gm) + 2gm I_1(gm)] \right\}, (4.33)$$

considerando a lei de Beer, utilizamos a equação (4.28) e obtemos a seguinte expressão para a fase

$$\Phi_{BLM}(g,t) = \frac{\theta_{ET}}{t_c} \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\frac{-\alpha^2 \omega_{0e}^2}{8}} f(\alpha,t) J_0(\sqrt{mg}\omega_{0e}\alpha) d\alpha, \qquad (4.34)$$

onde  $f(\alpha, t)$  é dado por

$$f(\alpha, t) = \frac{2\sqrt{t_c t} A_e \omega_{0e} e^{-\frac{\alpha^2 \omega_{0e}^2 t}{4t_c}}}{\sqrt{\pi} (\alpha^4 - \alpha^2 A_e^2}) - \frac{t A_e \omega_{0e}^2 Erfc\left(\frac{\sqrt{t} \alpha \omega_{0e}}{2\sqrt{t_c}}\right)}{\alpha^3 - \alpha A_e^2} + \frac{2t_c}{\alpha^3 (\alpha^2 - A_e^2)^2} \left\{ (A_e^3 - 3\alpha^2 A_e) Erfc\left(\frac{\sqrt{t} \alpha \omega_{0e}}{2\sqrt{t_c}}\right) + 2\alpha^3 \left[ 1 - e^{\frac{(A_e^2 - \alpha^2)\omega_{0e}^2}{4t_c/t}} \right] Erfc\left(\frac{\sqrt{t} A_e \omega_{0e}}{2\sqrt{t_c}}\right) \right\},$$
(4.35)

nm, e provamos com um laser vermelho (He-Ne) de comprimento de onda 632.8 nm

e finalmente, considerando o limite de alta absorção temos a seguinte expressão

$$\Phi_{HAM}(g,t) = \frac{\theta_{ET}}{t_c A_e} \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\frac{-\alpha^2 \omega_{0e}^2}{8}} h(\alpha,t) J_0(\sqrt{mg}\omega_{0e}\alpha) d\alpha, \qquad (4.36)$$

onde  $h(\alpha, t)$  é dada por

$$h(\alpha, t) = \frac{t\omega_{0e}^2}{\alpha} Erfc\left(\frac{\sqrt{t}\alpha\omega_{0e}}{w\sqrt{t_c}}\right) - \frac{2\sqrt{tt_c}\omega_{0e}e^{-\frac{t\alpha^2\omega_{0e}^2}{4t_c}}}{\alpha^2\sqrt{\pi}} + \frac{2t_c}{\alpha^3} Erfc\left(\frac{\sqrt{t}\alpha\omega_{0e}}{2\sqrt{t_c}}\right)$$
(4.37)

Nessas expressões introduzimos as seguintes definições:  $g = (r/\omega_{1p})^2$ ,  $m = (\omega_{1p}/\omega_{0e})^2 \in \theta_{ET}$ , um dos parâmetros de ajuste do ET, definido como

$$\theta_{ET} = \frac{P_e A_e \alpha_T (1+\nu)}{\lambda_p k} \phi, \qquad (4.38)$$

Para calcular a intensidade do centro do feixe de prova, na posição do fotodetector, tomamos o módulo ao quadrado da amplitude

$$I(t) = |U(Z_1 + Z_2, t)|^2$$

então, por exemplo, para a solução BLM tomamos a expressão para a fase (4.34), substituimos em (4.32), que por sua vez utilizamos na equação acima, obtendo a intensidade em função do tempo. Para os limites de baixa e alta absorção óptica o procedimento é exatamente o mesmo, apenas trocamos a expressão da fase.

Note que as expressões para a intensidade são muito complexas, mesmo quando utilizamos os modelos LAM ou HAM. A expressão mais simples (LAM), possui uma integral de uma exponencial da expressão (4.33), que só conseguimos calcular numericamente. As expressões para a intensidade dos modelos BLM e HAM já possuem integrais na expressão para a fase, que também só conseguimos calcular numericamente<sup>6</sup>.

Na figura (4.6) temos alguns exemplos de transientes de ET, considerando alguns valores de  $t_c$  e de  $\theta_{ET}$ . Notamos assim que  $t_c$  está relacionado com a inclinação da curva de intensi-

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>O modelo teórico de ET pode parecer não muito conveniente, pois ajustar dados experimentais com uma função desse tipo, que depende de duas integrais numéricas, pode ser um grande problema. Ocorre que para fazer os ajustes utilizamos o software Mathematica, onde as integrais são calculadas numericamente, mas as tratamos como se fossem funções comuns. Utilizando o Mathematica 7.0.1, um ajuste com o LAM leva cerca de 1 minuto, enquanto o ajuste dos mesmos dados com o BAM leva cerca de 10 minutos. Para fins comparativos, lembramos que um ajuste de LT leva apenas um décimo de segundo.



Figura 4.6: Sinal de ET normalizado obtido com o modelo BLM[12], variando  $t_c(a) \in \theta_{ET}(b)$ . Os parâmetros utilizados correspondem a uma configuração experimental já utilizada.

dade, enquanto  $\theta_{ET}$  é mais diretamente relacionado com o comportamento da fase quando ela atinge o regime estacionário.

## 4.3 Comparações entre os modelos LAM, BLM e HAM

Nesta seção temos por objetivo verificar quando os limites de baixa e alta absorção óptica valem. No ET a fase é diretamente proporcional ao deslocamento da superfície, e esse deslocamento por sua vez depende da temperatura. Assim, olhando apenas para a temperatura, é impossível ter um panorama claro de quando os limites de baixa e alta absorção valem. Poderíamos começar a discutir esses limites através do cálculo da fase, entretanto, pensamos ser mais conveniente realizarmos um procedimento diferente.

Vamos simular uma curva experimental, de intensidade em função do tempo, com o modelo BLM, e em seguida vamos ajustar esses dados com o LAM e HAM, comparando assim as diferenças entre os valores de  $\theta_{ET}$  e  $t_c$  que fixamos no BLM, com aqueles que obtivemos do ajuste. Para gerar os dados com o BLM, fixamos os seguintes parâmetros: m = 42, V = 1, 1,  $\omega_{0e} = 44 \times 10^{-6} m^{-1}, \theta_{ET} = -10 W^{-1} m^{-1}$  e  $t_c = 0, 8ms$ , que foram escolhidos assim porque são parâmetros já utilizados na prática, típicos de um experimento real de ET. Ajustamos estes dados com o LAM, e na figura (4.7) temos os desvios percentuais obtidos para cada um dos parâmetros de ajuste.



Figura 4.7: Erro percentual introduzido nos parâmetros ao utilizar o modelo LAM, em função do coeficiente de absorção óptica.

Por meio dessa figura vemos que o erro cresce linearmente com o coeficiente de absorção, sendo que  $\theta_{ET}$  é um pouco mais prejudicado do que  $t_c$ . Na figura (4.8) temos um gráfico dos ajustes, por meio da qual notamos que até mesmo para a absorção óptica mais intensa, onde sabemos que há um erro grande nos parâmetros, o ajuste fica visualmente muito bom.

Então, quando estamos trabalhando com materiais com coeficiente de absorção da ordem de  $A_e \approx 200m^{-1}$ , devemos saber que ao usarmos o LAM para ajustar os dados estamos introduzindo um erro da ordem de 5% nos parâmetros, pelo menos, mesmo que visualmente o ajuste esteja muito bom. Esse erro cresce de forma aproximadamente linear com o coeficiente de absorção óptica.



Figura 4.8: Ajuste com o LAM dos dados gerados com o BLM

Agora vamos comparar os modelos BLM e HAM. Para gerar os dados com o BLM fixamos os seguintes parâmetros:  $m = 28,66, V = 4,24, \omega_{0e} = 57,23 \times 10^{-6} m^{-1}, \theta_{ET} =$  $-2,531 \times 10^{6} W^{-1} m^{-1}$  e  $t_c = 0,324 ms$ , que foram utilizados/obtidos em um experimento de ET realizado com um metal. Os dados foram ajustados com o HAM, e na figura (4.9) temos os desvios percentuais obtidos nos parâmetros de ajuste.



Figura 4.9: Erro percentual introduzido nos parâmetros ao utilizar o modelo HAM, em função do coeficiente de absorção óptica.

O coeficiente de absorção da amostra corresponde ao maior valor contido no gráfico,  $A_e = 7,86 \times 10^7 m^{-1}$ . Nos outros pontos fixamos uma coeficiente de absorção menor, geramos os pontos com o BLM e novamente ajustamos os dados com o HAM. Assim constatamos que, para um coeficiente de absorção de  $A_e = 7,86 \times 10^4 m^{-1}$ , o erro obtido no ajuste com o HAM é da ordem de 2% em cada um dos parâmetros.

Assim, vemos que o LAM introduz um erro de no máximo 5%, para materiais com coeficiente de absorção óptica inferior a  $A_e = 200m^{-1}$ . No outro extremo, o HAM introduz um erro de aproximadamente 2% para coeficiente de absorção óptica da ordem de  $A_e \approx$  $10^5m^{-1}$ . Por isso, quando tratarmos de materiais com coeficiente de absorção óptica entre  $200m^{-1} < A_e < 10^5m^{-1}$ , precisaremos utilizar a solução BLM.

# Capítulo 5

# Ajustes e a sensibilidade com os parâmetros

Neste capítulo pretendemos demonstrar como funciona o processo de ajuste, em ambas as técnicas de LT e ET. Paralelamente, queremos analizar a sensibilidade das técnicas com os parâmetros constantes nos modelos:  $m, V, \omega_{0e}$ , que são parâmetros puramente geométricos;

Faremos isso a partir de uma curva experimental, que vamos ajustar com os parâmetros corretamente definidos. Em seguida, intencionalmente vamos fixar algum destes parâmetros com um erro, e repetindo o ajuste pretendemos verificar o quanto isso prejudica os valores de  $\theta$  e  $t_c$ , nas duas técnicas.

Os dados experimentais que vamos analizar foram obtidos de uma amostra de vidro aluminato de cálcio com baixa concentração de sílica (LSCAS), dopado com 2% de Neodímio. Vamos começar analizando os dados de LT.

## 5.1 Lente térmica

Na figura (5.1) temos uma imagem do arranjo experimental utilizado no experimento de LT, no qual utilizamos um laser de Argônio para excitar a amostra, com um comprimento de onda  $\lambda_e = 514nm$ , e um laser de He-Ne foi utilizado como feixe de prova, com o comprimento de onda  $\lambda_p = 632.8nm$ . No modelo teórico de LT, foi calculada a intensidade do centro do feixe no plano do fotodetector utilizando a teoria de difração de Fresnel, e por isso utilizamos vários espelhos para produzir um caminho suficientemente longo da amostra até ele. A divergência do feixe também facilita a maneira de encontrarmos o centro do feixe, que é a região onde o sinal no fotodetector é máximo.



Figura 5.1: Arranjo experimental do experimento de lente térmica

Os parâmetros geométricos do experimento realizado foram:  $m = 22, 99, \omega_{0e} = 49, 86 \times 10^{-6} m$  e V = 0, 7, sendo a espessura da amostra L = 1, 56mm.

Na figura (5.2) temos uma curva experimental de LT, que ajustamos com o modelo original (3.2) e com a equação (3.4), em que introduzimos a correção para alta absorção. Fica claro que apenas o valor de  $\theta_{LT}$  é alterado pela correção, o que faz sentindo uma vez que *tc* não está relacionado com a absorção, mas sim com a difusividade térmica.

De qualquer maneira, vemos que para uma absorção da ordem de  $A_e = 0.8 cm^{-1}$ , a correção aumenta o valor de  $\theta_{LT}$  em cerca de 6%. Para um ajuste realizado com o modelo de LT original (3.2), podemos obter o valor correto de  $\theta_{LT}$  multiplicando-o por<sup>1</sup>  $\frac{A_e L}{(1-e^{-A_e L})}$ .

Agora testaremos a sensibilidade do modelo a variações dos parâmetros geométricos (m

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Alguns autores[30, 31, 32] já utilizaram essa correção, mas sem a interpretação que introduzimos aqui.



Figura 5.2: Ajuste de Lente Térmica com o modelo original e com a correção para alta absorção. Amostra de vidro LSCAS dopado com 2% de Nd, L = 1.56mm e  $A_e = 0.8cm^{-1}$ 

e V). Para isso utilizaremos a seguinte expressão

$$\delta P(\%) = 100 \frac{P_a - P_c}{P_c},$$

em que P representa  $\theta_{LT}$  ou  $t_c$ , e os índices "c" e "a" indicam o valor **c**orreto e o obtido com o **a**juste. Os valores corretos são aqueles constantes na figura (5.2), e  $P_a$  é o valor obtido do novo ajuste, em que fixamos algum dos parâmetros geométricos com um erro.

Nas tabelas (5.1) e (5.2) temos as variações percentuais no resultado do ajuste, ou seja, nos valores de  $\theta_{LT}$  e  $t_c$ . A partir da primeira tabela vemos que  $\theta_{LT}$  é pouco sensível a variação de m, enquanto  $t_c$  responde com um erro da ordem do erro que introduzimos. Errar no parâmetro "V" introduz um erro significativo em ambos os parâmetros de ajuste, sendo que  $\theta_{LT}$  é mais sensível a variações desse parâmetro do que  $t_c$ .

Para compreender o raciocínio que desenvolvemos a seguir, precisamos lembrar das seguintes definições

$$m = \left(\frac{\omega_{0p}}{\omega_{0e}}\right)^2$$
$$D = \frac{\omega_{0e}^2}{4t_c}.$$

Variação de m(%)	$\delta \theta_{LT}(\%)$	$\delta tc(\%)$
-10	-0.28	10.84
-5	-0.13	5.14
5	0.12	-4.66
10	0.23	-8.90

Variação de V(%) $\delta \theta_{LT}(\%)$  $\delta tc(\%)$ -10-8.8-3.3-5-4.2-1.753.71.7107.13.51

Tabela 5.1: LT: Variação percentual dos valores de  $\theta$  e  $t_c$ , em função do erro introduzido em m.

Tabela 5.2: LT: Variação percentual dos val-
ores de $\theta$ e $t_c$ , em função do erro introduzido
em V.

Suponha que erramos no valor de  $\omega_{0e}$  em +5%. Na difusividade térmica, que é proporcional ao quadrado de  $\omega_{0e}$ , estaremos introduzindo um erro da ordem de +10%. Como mdepende do inverso do quadrado de  $\omega_{0e}$ , neste parâmetro estaremos errando em cerca de -10%. Como podemos ver na primeira linha da tabela 5.1, o erro de -10% em m introduz um erro de aproximadamente 10% em tc, de forma que na expressão da difusividade térmica teriamos

$$D = \frac{\omega_{0e}^2 \times 1.1}{4t_c \times 1.1} = \frac{\omega_{0e}^2}{4t_c}$$

ou seja, o valor da difusividade térmica permanece aproximadamente o mesmo.

Resumindo, ao calcular o valor da difusividade térmica, os desvios nos parâmetros m e  $t_c$  podem se compensar de maneira que o valor correto ainda pode ser obtido. Portanto, a obtenção do correto valor da difusividade térmica em um experimento, por si só, não significa que o experimento foi bem executado.

## 5.2 Espelho térmico

Na figura (5.3) temos um exemplo da montagem experimental de ET, a qual juntamente com a figura (5.1) demonstra as semelhanças entre as técnicas de LT e ET. Na figura (5.4) temos um exemplo de ajuste de TM.

Analogamente ao que fizemos para a LT, aqui geramos dados de ET com o  $LAM^2$ , e em <sup>2</sup>O modelo de baixa absorção foi utilizado por simplicidade, já que com ele gerar e ajustar os dados


Figura 5.3: Arranjo experimental do experimento de espelho térmico



Figura 5.4: Ajuste de espelho térmico utilizando o LAM. Amostra de vidro LSCAS dopado com 2% de Nd, L = 1,56mm e  $A_e = 0,8cm^{-1}$ 

seguinda ajustamos estes dados fixando um erro em m ou V. Comparando os resultados do ajuste com os valores corretos de  $\theta_{ET}$  e  $t_c$ , que utilizamos para gerar os dados, podemos  $\overline{e}$  muito mais rápido, entretanto, a sensibilidade dos modelos BLM e HAM com os parâmetros deve ser exatamente a mesma. estimar qual o erro introduzido no experimento.

Variação de m(%)	$\delta \theta_{ET}(\%)$	$\delta tc(\%)$
-10	5.57	10.83
-5	2.67	5.13
5	-2.47	-4.66
10	-4.77	-8.90

Nas tabelas (5.3) e (5.4) temos o erro percentual obtido para cada parâmetro, em função do erro introduzido em  $m \in V$ , respectivamente.

Tabela 5.3: TM: Variação percentual dos valores de  $\theta_{ET}$  e  $t_c$ , em função do erro introduzido em m.

Variação de V(%)	$\delta \theta_{ET}(\%)$	$\delta tc(\%)$
-10	6.19	-3.92
-5	2.91	-1.97
5	-2.58	2.00
10	-4.89	4.05

Tabela 5.4: TM: Variação percentual dos valores de  $\theta_{ET}$  e  $t_c$ , em função do erro introduzido em V.

A partir desses resultados notamos que  $t_c$  é igualmente sensível ao erro nas variáveis me V, em ambas as técnicas, entretanto, o mesmo não ocorre com  $\theta_{LT}$  e  $\theta_{ET}$ . Claro que os dois seguem definições distintas, ao contrário de  $t_c$  que é o mesmo em ambas as técnicas. De qualquer maneira, os dados constantes na tabela (5.1) nos sugerem que o erro em  $\theta_{LT}$  é pequeno mesmo quando o erro em m é de 10%. Já no ET, a tabela (5.3) deixa claro que o erro em m provoca um erro significativo em  $\theta_{ET}$ .

Com os testes que realizamos neste capítulo, fica claro que as técnicas de LT e ET possuem grande potencial para a caracterização de materiais. Podemos estudar desde líquidos (com a LT) até metais (com o ET). Entretanto, ambas as técnicas são sofisticadas, exigindo muito cuidado na obtenção de cada parâmetro necessário para executar um experimento.

Os erros provocados por variações dos parâmetros geométricos, como  $m \in V$ , introduzem erros sistemáticos no experimento. Vimos também que obter um valor correto para a difusividade, por exemplo, não significa que o experimento foi bem realizado. Mesmo que um experimento seja realizado diversas vezes, e que em todas seja obtido o mesmo valor para a difusividade térmica, pode ser que todos eles estejam errados. E ainda, se os valores estiverem corretos, ainda é possível que exista um erro sistemático no segundo parâmetro de ajuste.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma análise teórica das técnicas de espelho térmico e lente térmica. Constatamos que as aproximações empregadas na construção dos modelos teóricos de ambas as técnicas são consistentes, principalmente com respeito a descrição do aquecimento da amostra induzido pelo laser de excitação.

Tratando de amostras sólidas, com parâmetros característicos de vidros, a aproximação de fluxos nulo entre a amostra e o ar introduz um erro insignificante em ambas as técnicas. Já a aproximação de amostra semi-infinita demonstrou ser consistente apenas para a técnica de espelho térmico.

Por outro lado, na lente térmica constatamos que uma aproximação simples é capaz de generalizar o modelo desenvolvido por Shen e colaboradores, tornando possível utilizar a técnica em uma faixa ainda mais ampla de materiais, pois com ela diminuimos as restrições teóricas quanto ao coeficiente de absorção óptica da amostra estudada. Deste modo continuamos com uma equação razoavelmente simples para o ajuste dos dados experimentais, mas agora com mais liberdade em aplicar a técnica.

No espelho térmico descrevemos todo o desenvolvimento matemático necessário, o que inclui obter a solução de uma equação termoelástica. Essa solução é basicamente uma descrição topográfica da amostra, em função do tempo, quando sua superfície é atingida por um feixe gaussiano. Verificamos assim que a técnica é muito sensível, sendo que deslocamentos superficiais da ordem de nanometros são detectáveis. Mostramos também exemplos de ajustes experimentais com ambas as técnicas, e alterando os valores dos parâmetros geométricos verificamos o quanto as técnicas são sensíveis a erros que podem ocorrer em um experimento.

Para o futuro, há trabalhos a serem desenvolvidos com ambas as técnicas. Uma análise do comportamento do modelo teórico para parâmetros mais gerais pode ser desenvolvida, de maneira semelhante a que fizemos neste trabalho para os vidros.

Uma outra vertente que desperta interesse é a possibilidade de aplicar a técnica de espelho térmico no estudo de filmes finos. Para isso um novo desenvolvimento teórico precisa ser feito, levando em conta as dimensões e condições de contorno da amostra.

## Apêndice A

# Amplificadores de ondas eletromagnéticas

Por volta da década de 50, havia muitos laboratórios apontando radiotelescópios para galáxias distantes, em busca de algum tipo de informação sobre o tamanho e a geometria do universo. O sinal captado pelos telescópios era muito fraco e por isso era necessário amplificá-lo.

Os melhores amplificadores utilizados nessa época usavam tubos, nos quais se obtinha um semi vacúo. Neles elétrons são emitidos por um cátodo e direcionados para bombardear uma chapa metálica, de maneira que o sinal a ser amplificado modula esse fluxo de elétrons. Por exemplo, se o potencial de entrada aumenta, ele aumenta o potencial que acelera os elétrons na direção da chapa. Por sua vez, a maior energia dos elétrons aumenta o potencial na chapa metálica.

O problema é que há flutuações naturais na energia dos elétrons emitidos pelo cátodo, que inevitavelmente se misturam ao sinal de entrada. Em determinadas situações, como no caso de microondas emitidas de uma galáxia distante captadas por um radiotelescópio, o sinal de entrada é tão fraco que na saida do amplificador não distinguimos o sinal de entrada do ruído.

Nesse contexto surgiu o maser (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation), um amplificador de ondas eletromagnéticas que praticamente não produz ruído. Com isso, tornou-se possível explorar regiões mais distantes do espaço com os mesmos radiotelescopios, uma vez que com o maser podia-se amplificar muito sem introduzir todo o ruído dos amplificadores convencionais.

O objetivo deste capítulo é descrever, de maneira conceitual, o que são e como funcionam os masers. Para isso vamos revisar alguns conceitos básicos da mecânica quântica, usando-os para explicar o funcionamento do maser. Isso nos conduzirá a uma discussão sobre o que é e como funciona um laser, um dos dispositivos que causaram maior impacto na sociedade no último século e que são de extrema importância na implementação das técnicas de LT e ET, assim como em diversas outras técnicas espectroscópicas.

### A.1 Masers

Observação: o conteúdo desta seção basea-se em textos de James P. Gordon[24], Charles H. Townes[25], Arthur L. Schawlow[26] e Richard Feynman[28].

Na mecânica quântica, a maior parte do tempo átomos e moléculas encontram-se em um estado estável (estado fundamental), no qual a partícula pode se manter por um tempo infinito sem perder energia. Existem diversos estados possíveis para cada sistema, cada um correspondendo a um nível de energia bem definido.

A radiação, por outro lado, consiste de partículas (fótons) transportadas por uma espécie de onda. A frequência dessa onda é a medida da energia do fóton, de acordo com a equação de Max Plank E = hf. Uma partícula de radiação é produzida quando um elétron decai de um estado de maior energia para outro de menor energia, sendo que a energia desse fóton emitido é exatamente igual a diferença de energia entre esses estados. O inverso também pode ocorrer. Um elétron pode saltar de um nível menos energético para outro mais energético, assim ele absorve uma quantidade de energia, ou seja, um fóton com a frequência determinada pela quantidade de energia absorvida e a equação de Plank.

Três coisas podem ocorrer quando radiação passa através de um conjunto de átomos. Se

a energia do fóton não é igual a diferença de energia entre um par de níveis dos átomos, não há interação. Se as energias são iguais, e o fóton colide com um átomo no menor dos dois níveis, a radiação será absorvida e o átomo vai para um estado excitado. Se no momento da colisão o átomo se encontrar no estado excitado, ele decairá para o estado de menor energia, emitindo um novo fóton.

Em qualquer conjunto de átomos haverá transições entre níveis de energia baixa e alta, nos dois sentidos, todo o tempo. Os átomos são impulsionados aos níveis de maior energia por colisões, e decaem aos níveis mais baixos pela tendência da natureza de evoluir para sistemas energéticamente mais baixos. Sobre condições normais, os estados de menor energia estão mais densamente oculpados do que aqueles de alta energia. Então, sob essas condições usuais, se um feixe de fótons incide sobre um material o feixe que sai é mais fraco que o feixe que entrou. Por conveniência, daqui em diante vamos chamar de átomo emissor (absorvedor) aquele que está no mais alto (baixo) dos dois estados.

Agora suponha que seja possível alterar a distribuição de elétrons nos níveis de energia, de maneira que existam mais átomos emissores. Assim um feixe de fótons com a frequência adequada produzira mais saltos para o nível mais baixo do que para o mais alto. Ou seja, o feixe de fótons será amplificado, sem gerar ruído, pois apenas aquela determinada frequência é amplificada. E isso é o que acontece em um maser.

A molécula de amônia  $(NH_3)$  possui uma particularidade importante, que foi utilizada para produzir os primeiros masers. Nela temos três hidrôgenios formando um triângulo e, de um dos lados do triângulo temos um nitrogênio. Na figura (A.1) temos um esboço dessa geometria.

Como qualquer outra molécula, a amônia possui um número infinito de estados quânticos possíveis. Porém, vamos considerar aqui que a molécula está girando em torno de seu eixo de simetria, que não há translação e que ela vibra tão pouco quanto for possível. Especificando essas condições ainda temos dois estados possíveis: o nitrogênio pode estar a baixo ou acima do plano definido pelos hidrôgenios. O vetor de estado pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = C_1|1\rangle + C_2|2\rangle,\tag{A.1}$$



Figura A.1: Geometria da molécula de amônia (Ref. [27], pg. 259).

em que  $|1\rangle e |2\rangle$  são os estados "up" e "down" da molécula (com o nitrôgenio acima e abaixo dos hidrogênios), e  $C_1$  e  $C_2$  são as amplitudes de cada estado.

O fato interessante é que esse vetor de estado não é constante no tempo. Suponha que você observe a molécula e a veja no estado  $|1\rangle$ . Alguns instantes depois existe a probabilidade da partícula ser encontrada no estado  $|2\rangle$ . Para descrever como as amplitudes  $C_1 \in C_2$  variam com o tempo, precisamos resolver as seguintes equações

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1 + H_{12}C_2, \tag{A.2}$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{21}C_1 + H_{22}C_2. \tag{A.3}$$

O problema é que não conhecemos os coeficientes  $H_{ij}$ , mas podemos fazer algumas considerações. Vamos supor que quando a molécula estiver no estado  $|1\rangle$  não há chance dela estar no estado  $|2\rangle$ , e vice-versa. Então as componentes  $H_{12}$  e  $H_{21}$  são nulas, e as equações diferenciais ficam

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1,$$
$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{22}C_2.$$

Resolvendo essas equações obtemos

$$C_1 = (const)e^{-(i/\hbar)H_{11}t},$$
$$C_2 = (const)e^{-(i/\hbar)H_{22}t}.$$

Os dois estados da molécula de amônia que estamos considerando possuem uma simetria muito bem definida. Por isso vamos supor que os elementos  $H_{11}$  e  $H_{22}$  devem ser iguais, o que parece ser razoável. Vamos chamar esse elemento de  $E_0$  porque ela é a energia da molécula quando  $H_{12}$  e  $H_{21}$  são iguais a zero.

Fazer o nitrôgenio cruzar o plano dos hidrôgenios é classicamente impossível. Porém, na mecânica quântica há uma possibilidade, mesmo que pequena, do nitrogênio "tunelar" até o outro lado do plano. Dizendo de outra maneira, uma molécula no estado  $|1\rangle$  pode evoluir para o estado  $|2\rangle$ , sem transladar ou girar fora de seu eixo de simetria. Por isso os coeficientes  $H_{12}$  e  $H_{21}$  não são iguais a zero.

Usando mais uma vez a simetria do problema, vamos supor por conveniencia que  $H_{12} = H_{21} = -A$ . Com isso as equações (A.2) e (A.3) ficam

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = E_0 C_1 - AC_2,$$
  
$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = E_0 C_2 - AC_1.$$

Que são resolvidas para obtermos

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} + \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t},$$
(A.4)

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} - \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t},$$
(A.5)

em que a e b são constantes de integração. Há então duas soluções estacionárias para a função de onda da molécula, nas quais as constantes  $C_1 e C_2$  oscilam com a mesma frequência. Fazendo a = 0 obtemos uma dessas soluções, que corresponde a frequência  $\frac{E_0+A}{\hbar}$ . A outra solução é obtida fazendo b = 0, onde as amplitudes oscilam com a frequência  $\frac{E_0-A}{\hbar}$ .

A diferença de energia entre os dois modos da função de onda corresponde a 2*A*. Utilizando a relação fundamental de Plank obtemos  $f = \frac{2A}{h}$ , que corresponde a uma frequência de 24 Ghz[27, 28]. Esse fato foi utilizado para produzir os primeiros masers, pois um fóton com essa frequência é duplicado ao passar por uma molécula que esteja oscilando no estado de energia  $(E_0 + A)$ , fazendo a molécula decair para o nível mais baixo  $(E_0 - A)$ .

Adicionando um campo elétrico estático a molécula de amônia, se ignorarmos a amplitude da molécula transitar entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , obteriamos para cada estado as energias  $E_0 + \mu \varepsilon$  e  $E_0 - \mu \varepsilon$ , respectivamente. Para resolver as equações (A.2) e (A.3), podemos tentar soluções do tipo

$$C_1 = a_1 e^{-(i/\hbar)Et},$$
$$C_2 = a_2 e^{-(i/\hbar)Et}.$$

Substituindo-as em (A.2) e (A.3), e rearranjando os termos obtemos

$$(E - H_{11})(E - H_{22}) - H_{12}H_{21} = 0,$$

que resolvendo para a energia E nos dá

$$E_{I} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^{2}}{4} + H_{12}H_{21}},$$
$$E_{II} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^{2}}{4} + H_{12}H_{21}},$$

Considerando  $H_{11} = E_0 + \mu \varepsilon$ ,  $H_{22} = E_0 - \mu \varepsilon$  e  $H_{21} = H_{12} = -A$ , a energia dos dois estados estacionários fica

$$E_I = E_0 + \sqrt{A^2 + \mu^2 \varepsilon^2},$$
$$E_{II} = E_0 - \sqrt{A^2 + \mu^2 \varepsilon^2}.$$

Há então uma diferença de energia entre os dois estados, e podemos alterar essa diferença variando a intensidade do campo elétrico  $\varepsilon$ . Esse é o príncipio utilizado no maser. Fazendo o gás passar por uma câmara onde um campo elétrico é aplicado separamos o gás nessas duas componentes, com energias  $E_I$  e  $E_{II}$ . Selecionando a componente emissora, ao incidir fotons com energia  $E_I - E_{II}$  sobre as moléculas as fazemos saltar para o nível de menor energia, de maneira que cada uma libera um novo fóton. Variando a intensidade do campo elétrico podemos selecionar a frequência desejada, que obedece a relação

$$f = \frac{E_I - E_{II}}{h} = 2\frac{\sqrt{A^2 + \mu^2 \varepsilon^2}}{h}.$$
 (A.6)

## A.2 Lasers

A semelhança entre as palavras maser e laser não é apenas uma coincidência. O termo vem do inglês "light amplification by stimulated emission of radiation", que significa amplificação de luz por emissão estimulada de radiação. Por definição luz é a porção do espectro eletromagnético a que o olho humano é sensível<sup>1</sup>, então, a diferença entre um maser e um laser é basicamente a frequência da onda amplificada. Claro que essa diferença acarreta em aplicações totalmente diferentes para cada um dos dispositivos.

Theodore Mainman fez o primeiro laser funcionar em 16 de maio de 1960. Ele imediatamente submeteu um artigo relatando suas experiências ao "Physical Review Letters", que recusou o artigo. Alguns editores explicaram que muitos artigos sobre masers estavam sendo submetidos, por isso havia uma política de reduzir as publicações sobre esse assunto. Mainman submeteu então seu texto a revista "Nature", que o publicou em 6 de agosto daquele ano. Este fato mostra que apesar de ser amplamente utilizado e conhecido por todos hoje, o laser nasceu como "uma solução em busca de um problema"<sup>2</sup>.

Para conseguir produzir emissão estimulada, basicamente precisamos de duas coisas. A primeira é um meio ativo, que geralmente é obtido ao fornecer energia para determinado material. Esse processo é chamado de bombeamento. O segundo dispositivo necessário é uma cavidade ressonante. É de fato nessa cavidade que a amplificação ocorre, pois nela o sinal de entrada "rouba" fótons do meio ativo, adquirindo amplitude.

A amplificação por emissão estimulada depende da existência de ressonância dentro da cavidade. Como masers amplificam ondas com comprimento de onda da ordem de 1 cm, é relativamente fácil construir uma cavidade com comprimento dessa ordem. Havendo um único modo de oscilação estácionaria permitido, apenas uma frequência é amplificada.

O espectro eletromagnético visível ao olho humano possui comprimento de onda entre 400-700 nm, de maneira que uma cavidade ressonante para a luz teria dimensões inconvenientemente pequenas. Para contornar esse problema, Townes e Schalow propulseram em 1958 que um "maser" para a luz poderia ser construido com um tipo especial de cavidade, que poderia ser milhares de vezes maior que o comprimento de onda da luz a ser amplificada.

No "maser óptico"<sup>3</sup> a cavidade ressonante possui dois espelhos pequenos, um virado <sup>1</sup>Alguns autores preferem definir luz como a porção do espectro eletromagnético que inclui o infravermelho, o visível e o ultravioleta.

<sup>2</sup>Essa frase é atríbuida a Charles Hard Townes, que recebeu o prêmio Nobel de física em 1964 por suas contribuições ao desenvolvimento dos masers e lasers.

 $^{3}$ Como dissemos, o **m** de maser significa microonda, entretanto, o nome "maser óptico" foi muito utilizado

para o outro. Fazendo a luz entrar nesse sistema a partir de um ponto próximo a um dos espelhos, o feixe é amplificado a medida que caminha para o segundo espelho. Nele uma nova reflexão faz o feixe atravessar o meio ativo mais uma vez, de maneira que o processo de amplificação continua. Isso gera uma onda estácionaria dentro da cavidade. Se um dos espelhos é semitransparente, uma porção dessa onda o atravessa enquanto a maior parte é refletida.

A luz emitida por um laser possui então algumas propriedades únicas, incomuns na natureza. O feixe é monocromático, confinado a uma pequena região do espaço, possuindo um espalhamento ângular muito pequeno e, acima de tudo, é coerente.

Na próxima seção temos uma breve discussão a respeito dos perfis de intensidade da luz emitida por um laser. Esta propriedade é de extrema importância na construção dos modelos de LT e ET.

#### A.2.1 Perfil de intensidade

Dentro da cavidade ressonante de um laser a função de onda pode oscilar de diversos modos. Para cada modo permitido temos um perfil de intensidade característico. A sigla  $TEM_{ij}$  significa "Transversal Eletromagnetic", indicando que nesse modo não há campo elétrico ou magnético na direção de propagação do feixe. Os índices *i* e *j* são inteiros que indicam as ordens radial e ângular da seguinte expressão

$$I_{ij}(r,\varphi) = I_0 \rho^j \left[ L_i^j(\rho) \right]^2 \cos^2(j\varphi) e^{-\rho}.$$
(A.7)

e  $L_i^j(\rho)$  são os polinômios associados de Laguerre, dados por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^{-x}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( e^{-x} x^{n+\alpha} \right).$$

A equação (A.7) descreve o perfil de intensidade de um seção transversal do feixe. Na figura (A.2) temos exemplos de perfis de intensidade, obtidos com essa expressão.

na década de 1960 para se referir a amplificadores de luz. Com os "masers de luz" já desenvolvidos, os autores passaram aos poucos a utilizar o nome laser.



Figura A.2: Perfis de intensidade dos diferentes modos de oscilação de ondas eletromagnéticas cilíndricas. Os índices *ij* indicam as ordens radial e ângular da expressão (A.7).

Os dispositivos lasers comerciais, geralmente são construídos para emitir luz no modo  $TEM_{00}$ . Essa é a distribuição de intensidade fundamental, e portanto a mais simples. Nela temos um máximo de intensidade no centro do feixe, e a intensidade decai radialmente seguindo uma curva Gaussiana.

As soluções da equação de difusão, encontradas no capítulo 2, e todo o tratamento da propagação do feixe de prova feito neste trabalho, consideram que os lasers de excitação e prova operam no modo  $TEM_{00}$ .

## Apêndice B

## Propagação do feixe de prova

Para descrever a propagação do feixe de prova utilizamos a teoria de difração de Fresnel e o príncipio de Huygens. Fixamos o plano de entrada como sendo o plano da superfície da amostra, e o plano de saída como o plano do fotodetector. O príncipio de Huygens diz que a amplitude de um ponto do plano de saída é o resultado da superposição de ondas emanando de todos os pontos do plano de entrada. Na figura (B.1) temos uma representação do sistema que estamos considerando.



Figura B.1: Representação da propagação do feixe de prova após passar pela amostra.

Matematicamente podemos escrever a amplitude da onda no centro do plano de saída como[6]

$$U_{PS}(t) = \frac{i}{\lambda} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_{PE}(r,t) \left(\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right) \frac{1}{|z_2-r|} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}|z_2-r|} r dr d\theta,$$
(B.1)

em que  $U_{PE}(r,t)$  é a amplitude da onda no plano de entrada.

Podemos aplicar algumas aproximações a essa expressão. Sendo a distância  $z_2$  suficientemente grande, teremos  $\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \approx 1$  e  $|z_2 - r| \approx z_2$ . Utilizando também a expansão

$$\frac{2\pi}{\lambda}|z_2 - r| = \frac{2\pi}{\lambda}(z_2^2 + r^2)^{1/2} \approx \frac{2\pi}{\lambda}\left(z_2 + \frac{r^2}{2z_2}\right),$$

podemos reescrever a equação (B.1) como

$$U_{PS}(t) = A \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_{PE}(r,t) e^{-i\frac{\pi}{\lambda}\frac{r^2}{z_2}} r dr d\theta.$$
 (B.2)

A expressão para a amplitude da onda antes da amostra  $\acute{e}[7]$ 

$$U_p(r,t) = \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} \frac{1}{\omega_{1p}} \left( e^{-\frac{r^2}{\omega_{1p}^2}} \right) e^{-\frac{i}{\lambda_p} \left(2z_1 + \frac{r^2}{R_{1p}}\right)},$$

em que  $P_p$  é a potência incidente e  $R_{1p}$  é o raio de curvatura em  $z_1$ . Ao atingir a amostra essa amplitude adquiri uma fase. Assim temos

$$U_p(r,t) = \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} \frac{1}{\omega_{1p}} \left( e^{-\frac{r^2}{\omega_{1p}^2}} \right) e^{-\frac{i}{\lambda_p} \left( 2z_1 + \frac{r^2}{R_{1p}} + \phi(r,t) \right)}.$$
 (B.3)

Utilizando a expressão (B.3) na expressão (B.2), introduzindo as definições

$$g = \left(\frac{r}{\omega_{1p}}\right)^{2},$$
  

$$B = \frac{1}{\omega_{1p}}\sqrt{\frac{2P_{p}}{\pi}}e^{-\frac{i2\pi z_{1}}{\lambda_{p}}},$$
  

$$C_{1} = B\left[i\pi\omega_{1p}^{2}/(\lambda_{p}Z_{2})\right]e^{-2i\pi Z_{2}/\lambda_{p}},$$

e fazendo a integral em dr, obtemos

$$U_p(z_1 + z_2, t) = C_1 \int_0^\infty e^{-g - i\left(\frac{\pi}{\lambda_p} \left(\frac{\omega_{1p}^2}{R_{1p}} + \frac{\omega_{1p}^2}{z_2}\right)g + \phi(g, t)\right)},$$
(B.4)

que é a amplitude do feixe de prova na posição do fotodetector. Como o feixe de prova é Gaussiano, para ele valem as relações

$$\begin{split} \omega_{1p}^2 &= \omega_{0p}^2 \left[ 1 + \left( \frac{z_1}{z_{cp}} \right)^2 \right], \\ R_{1p} &= \frac{z_1^2 + z_{cp}^2}{z_1}, \\ z_{cp} &= \frac{\pi \omega_{0p}^2}{\lambda_p}, \end{split}$$

com as quais podemos escrever (B.4) como

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C_1 \int_0^\infty e^{(iV - 1)g - i\Phi(g, t)} dg,$$
(B.5)

em que definimos

$$V = \frac{Z_1}{Z_c} + \frac{Z_c}{Z_2} \left[ 1 + \left(\frac{Z_1}{Z_c}\right)^2 \right].$$
(B.6)

Este é um parâmetro geométrico característico da montagem de LT ou ET utilizada.

## **Referências Bibliográficas**

- [1] A. Rosencwaig, Science **181** (1973) 657.
- [2] M. Sheik-bahae, A. A. Said, and E. W. Van Stryland, Opt. Lett. 14 (1989) 955.
- [3] A. C. Boccara, D. Fournier, J. Badoz, Appl. Phys. Lett. **36** (1979) 130.
- [4] D. Fournier, A. C. Boccara, Nabil M. Amer, and Robert Gerlach, Appl. Phys. Lett. 37, (1980) 519.
- [5] J.P. Gordon, R.C.C. Leite, R.S. Moore, S.P.S. Porto and J.R. Whinnery, J. Appl. Phys.
   36 (1965), 3.
- [6] P. R. B. Pedreira, Desenvolvimento de um protótipo de lente térmica resolvida no tempo para estudos de líquidos em condições transitórias em tempo real, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2005).
- [7] J. Shen, R. D. Lowe, and R.D. Snook, Chem. Phys. 165 (1992) 385.
- [8] A. Steimacher, Desenvolvimento e Caracterização de Vidros Aluminosilicato de Cálcio Dopados com Nd3+, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2008).
- [9] J. H. Rohling, Preparação e caracterização do vidro aluminosilicato de cálcio dopado com terras raras para emissão laser no infravermelho próximo e médio, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2004).

- [10] A. R. Nunes, Avaliação quantitativa das propriedades ópticas e térmicas do monocristal Nd:YAG em função da temperatura, Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2003).
- [11] F. Sato, Estudo da bebida do café utilizando a espectroscopia de lente térmica e a interferometria óptica, Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2005).
- [12] F. Sato, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, M. P. Belancon, R. S. Mendes, M. L. Baesso, N. G. C. Astrath and J. Shen, Journal of Applied Physics 104, (2008) 053520.
- [13] P.K. Kuo and M. Munidasa, Applied Optics (1990) 29.
- [14] Z.L. Wu, P.K. Kuo, Y.S. Lu, S.T. Gu and R. Krupka, Thin Solid Films (1996) 290-291.
- [15] H. Saito, M.I., M. Haraguchi and M. Fukui, Applied Optics **31** (1992).
- [16] B. C. Li, J. Appl. Phys. 68 (1990) 482.
- [17] N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, A. C. Bento, M. L. Baesso, and J. Shen, Appl. Phys. Lett. **91** (2007) 191908.
- [18] F. Sato, Desenvolvimento da técnica de espelho térmico, Tese de Doutorado apresentada ao Departamentode Física, UEM (2009).
- [19] C. A. Perottoni and J. A. H. Jornada, Cerâmica [online]. **51** (2005).
- [20] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids (Clarendon Press, Oxford, 1959), Vol. 1.
- [21] P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics (McGraw-Hill, 1953), Vol 1.
- [22] E. Butkov, Física Matemática (LTC Livros técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1988)

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [23] W. Nowacki, Thermoelasticity (Pergamon Press, London, 1962).
- [24] James P. Gordon, The Maser, Scientific American, **199** (1958) 42-50.
- $[25] http://www.press.uchicago.edu/Misc/Chicago/284158\_townes.html$
- [26] Arthur L. Schawlow, Optical Masers, Scientific American, 204 (1961) 52-61.
- [27] J. J. Sakurai, Modern quantum mechanics (1994), Addison-Wesley.
- [28] The Feynman Lectures On Physics, Vol III, Addison-Wesley Publishing.
- [29] M. L. Baesso, J. Shen, and R. D. Snook, Chem. Phys. Lett. **197** (1992) 615.
- [30] C. Jacinto, C.A.C. Feitosa, V.R. Mastelaro, T. Catunda. Journal of Non-Crystalline Solids 352 (2006) 3577.
- [31] N. G. C. Astrath, J. H. Rohling, A. N. Medina, A. C. Bento, M. L. Baesso, C. Jacinto, T. Catunda, S. M. Lima, F. G. Gandra, M. J. V. Bell and V. Anjos, Phys. Rev. B. 71 (2005), 214202.
- [32] N. G. C. Astrath, A. Steimacher, J. H. Rohling, A. N. Medina, A. C. Bento, M. L. Baesso, C. Jacinto, T. Catunda, S. M. Lima and B. Karthikeyan. Optics Express 16 (2008) 21248.
- [33] J. Shen, Theoretical Modelling of Phothermal Lens Spectrometry and Its Experimental Applications, A thesis submitted to the University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Technology, (1993).

