

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÕES DE DIFUSÃO
FRACIONÁRIAS E NÃO-LINEARES:
SOLUÇÕES E DIFUSÃO ANÔMALA

MARCELO FREITAS DE ANDRADE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

MARINGÁ, MARÇO DE 2006

AGRADEÇO

Em primeiro lugar a meus pais, irmãos e irmã que me acompanham em todos estes anos de estudos.

A Ervin Kaminski Lenzi pela diligente orientação deste trabalho, e a Luiz Roberto Evangelista por tornar o desenvolvimento do mesmo possível.

A todos aqueles com os quais tenho convivido nestes seis anos na Universidade Estadual de Maringá.

Marcelo Freitas de Andrade, 30/01/2006

*Como? Será que não posso mais contemplar o
Sol e as estrelas?
Será que não posso, sob os céus, meditar sobre
as verdades mais preciosas?*

Dante

Resumo

Nesta dissertação investigaremos as soluções da equação de difusão, principalmente no tocante a suas generalizações. Assim, começaremos nossa discussão pelas situações que envolvem, ou estão, relacionadas com ela. Dentro deste contexto, obteremos soluções para a equação de difusão na ausência e também na presença de uma força externa. Na etapa seguinte, estenderemos alguns resultados considerando os operadores diferenciais fracionários tanto para a variável temporal como para a variável espacial. Em particular, os operadores diferenciais fracionários, quando considerados sobre a variável espacial, nos conduzirão à distribuição de Lévy. Também abordaremos as equações de difusão que não são lineares e possuem operadores diferenciais fracionários aplicados à variável espacial. Situações d -dimensionais em ambos os casos (linear e não linear) serão abordadas. Completaremos nossa discussão sobre estas equações considerando as situações que envolvem anisotropias. Ao final, apresentaremos nossas conclusões.

Conteúdo

I - Introdução	1
1 O Movimento Browniano	4
1.1 Equação de Langevin	4
1.2 Passeio aleatório	6
1.3 Equação de difusão usual	7
2 Equação de difusão fracionária linear unidimensional	12
2.1 Derivadas fracionárias aplicadas à variável temporal	12
2.2 Equação de difusão: derivadas fracionárias no espaço	20
3 Equação de difusão não linear fracionária	24
3.1 Equação de difusão não linear inteira	24
3.2 Equação de difusão não linear fracionária	27
4 Equação de difusão fracionária em d dimensões	31
4.1 Equação de difusão linear fracionária d -dimensional	31
4.2 Equação de difusão não-linear fracionária d -dimensional	36
5 Equação de difusão fracionária anisotrópica	42
5.1 Equação de difusão fracionária anisotrópica: soluções	43
Discussões e Perspectivas	52
Apêndice: As funções H de Fox	54
Referências	55

Lista de Figuras

1.1	<i>Comportamento da Eq.(1.19) vs. x para alguns valores típicos de t e com $D=1$.</i>	9
1.2	<i>Comportamento da Eq.(1.26) vs. t para valores típicos de k.</i>	11
2.1	<i>Comportamento de $(4\pi\mathcal{D}t^\gamma)^{1/2}\mathcal{G}(x,t)$ vs. $x/(4\mathcal{D}t^\gamma)$, ilustra a Eq.(2.14) para valores típicos de γ.</i>	15
2.2	<i>Comportamento da Eq.(2.14) para grandes argumentos.</i>	16
2.3	<i>Comportamento de $(\mathcal{D}t)^\frac{1}{\mu}L_\mu(x,t)$ vs. $x/(\mathcal{D}t)^\frac{1}{\mu}$, ilustra a Eq.(2.40) para valores típicos de μ.</i>	22
3.1	<i>Comportamento de $\rho(z)$ vs. z, ilustra a Eq.(3.5) para valores típicos de ν.</i>	26
3.2	<i>Comportamento de $\Phi(t)\rho(x,t)$ vs. $x/\Phi(t)$, ilustra a Eq.(3.17) para valores típicos de μ e θ satisfazendo $-\infty < \mu < -1 - \theta$ e $\theta \geq 0$ com $a = 1$ e $b = -1$.</i>	29
3.3	<i>Comportamento de $\Phi(t)\rho(x,t)$ vs. $x/\Phi(t)$, ilustra a Eq.(3.17) para valores típicos de μ e θ satisfazendo $0 < \mu < 1/2$ e $0 \leq \theta < 1/2 - \mu$, com $a = 1$ e $b = 1$.</i>	30
4.1	<i>Nesta figura ilustramos o comportamento de $\mathcal{G}(r,\xi,t)$ versus r para alguns valores típicos de $\gamma + \delta$ considerando $a = 10.0$, $t = 1.0$, $\xi = 2.0$, $\mathcal{D} = 1.0$ e $d = 3$.</i>	33
4.2	<i>Comportamento da Eq.(4.32) vs. $x/\Phi(t)$ para o caso unidimensional considerando alguns valores típicos de μ, μ', θ e η. Note que dependendo da escolha particular desses parâmetros podemos ter um comportamento compacto (a) ($b = -1$) ou um comportamento de cauda longa (b) ($b = 1$).</i>	40
5.1	<i>Comportamento de $t^{(\gamma+\alpha)\xi}\rho(\bar{x},t)/\bar{\mathcal{N}}$ vs. $r^2/t^{\gamma+\alpha}$ para valores típicos de ξ considerando $\gamma+\alpha = 1/3$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} x_i ^{2+\theta_i}/(4\mathcal{D}_i)$ e $\bar{\mathcal{N}} = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (2 + \theta_i) / [2((2 + \theta_i)^2\mathcal{D}_i)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \Gamma(\frac{1}{2+\theta_i})]$.</i>	45

5.2	Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)/\bar{\mathcal{N}}$ vs. r^2 para valores típicos de t considerando $\gamma + \alpha = 1/3$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} x_i ^{2+\theta_i}/(4\mathcal{D}_i)$, $\xi = 1/2$ e $\bar{\mathcal{N}} = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (2 + \theta_i) / \left[2 ((2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i}\right) \right]$	46
5.3	Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $ x_1 $ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.9), $\gamma = 1/2$, $\theta_1 = 0$, $\xi_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$	47
5.4	Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $ x_1 $ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.20), $\gamma = 1/2$, $\mathcal{K}_1 = 0$, $\theta_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $k_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$. Observe que a Eq.(5.20) evolui para a Eq.(5.21) para tempos longos, indicando que a derivada fracionária produz uma relaxação anômala à situação de equilíbrio.	49
5.5	Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $ x_1 $ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.20), $\gamma = 1/2$, $\mathcal{K}_1 = 4$, $\theta_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $k_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$	50

I - Introdução

A compreensão dos chamados processos difusivos tem atraído considerável atenção devido ao grande número de situações físicas onde tais processos ocorrem e, principalmente, devido às inúmeras aplicações que deste campo podem surgir, especialmente com o desenvolvimento de estudos relacionados à difusão anômala. É realmente notável a evolução conseguida desde que, pela primeira vez, observou-se a manifestação da propriedade da matéria que está por trás dos processos de difusão, isto é, um movimento altamente irregular em nível microscópico com uma regularidade macroscópica. Por volta de 1785, o físico alemão Jan Ingenhousz (1730-1799) observou partículas de carvão efetuando um curioso movimento de “zigzag” sobre a superfície de um álcool. Movimento semelhante foi também observado por Robert Brown (1773-1858) em 1827; Botânico, Brown, ao estudar o processo de fertilização de flores, observou o movimento aleatório de grãos de pólen sobre uma superfície líquida. Muitas eram as possíveis explicações para este fenômeno, dentre elas a do próprio Brown de que a presença de minúsculos seres vivos nos grãos de pólen seria responsável pelo movimento observado. Correntes de convecção no líquido, perturbações mecânicas e gradientes de temperatura foram algumas outras tentativas de explicação que, junto com a hipótese de Brown, foram perdendo força à medida que experimentos mostravam que o aumento da intensidade dos movimentos era inversamente proporcional ao tamanho das partículas, independentemente de serem orgânicas ou inorgânicas. Foi somente na década de 1860 que o italiano G.Cantoni (1818-1897) e os belgas J.Delsaulx (1828-1891) e I.Carbonelle(1829-1889) [1] propuseram, de forma independente, que o movimento browniano fosse causado por movimentos internos do líquido, ou seja, que as partículas em suspensão eram abalroadas pelas moléculas do líquido. Proposições de tal natureza receberam, naturalmente, fortes críticas e a questão só foi resolvida, em favor da hipótese do movimento interno do líquido, no começo do século XX quando A.Einstein (1879-1955) apresentou seu trabalho acerca da natureza do movimento browniano [2].

Em 1926, Lewis Fry Richardson(1881-1953) publicou seu tratado com relação à difusão turbulenta [3], dando início assim ao estudo da difusão anômala. Os trabalhos de Scher e Montroll [4] acerca do transporte dispersivo em semicondutores amorfos, sistema no qual as abordagens usuais não se mostraram eficazes, impulsionaram o estudo de sistemas anômalos. Atualmente, é conhecido um grande número de sistemas que apresentam comportamento difusivo anômalo, dentre os quais podemos citar o transporte anômalo em sistemas desordenados [5], micelas dissolvidas em água salgada [6], a relaxação ao equilíbrio em sistemas com memória temporal longa [8] e até mesmo as flutuações de sistemas financeiros [7]. Tais sistemas poderiam ser estudados através de, por exemplo, uma abordagem via CTRW (do inglês continuous time random walk) ou de equações generalizadas de Langevin. Entretanto, estas abordagens não oferecem um tratamento simples quando se quer atacar problemas de valores de contorno e sistemas nos quais estejam presentes campos externos.

O formalismo de equações fracionárias que utilizaremos aqui lida de forma muito satisfatória com estes problemas, visto que os métodos de cálculo a serem utilizados são relativamente bem conhecidos. Veremos que o segundo momento é a “impressão digital” dos processos difusivos, sendo linear com o tempo para a difusão usual e não linear com o tempo para a anômala. As distribuições que apresentam segundo momento finito são representativas de uma difusão anômala do tipo correlacionada, enquanto que para as quais aquele parâmetro diverge dá-se o nome de difusão anômala do tipo Lèvy.

Neste contexto, algumas equações utilizadas na descrição destes processos são as equações fracionárias de difusão [8, 9] do tipo

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad (1)$$

(∂_t^γ é a derivada fracionária de Caputo [10] e \mathcal{D} é o coeficiente de difusão), a equação de meios porosos [11]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\nu \frac{\partial^2 \rho^\nu}{\partial x^2} \quad (2)$$

(D_ν representa o coeficiente de difusão) e a equação usual de Fokker-Plank [12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (3)$$

com $D(x) \propto |x|^{-\theta}$. Estas equações (1), (2) e (3) têm sido aplicadas ao estudo de, por exemplo, processos dinâmicos não Markovianos em proteínas [13],

processos envolvendo turbulência, onde podemos citar a lei de Richardson [3] e a lei de Kolmogorov [14]. A difusão anômala do tipo Lévy é caracterizada pelas distribuições de mesmo nome [15]. Dentro deste contexto, a distribuição

$$L_\mu(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx - D_\mu |k|^\mu t} \quad (4)$$

é solução da equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\mu \frac{\partial^\mu \rho}{\partial |x|^\mu} . \quad (5)$$

Com isso, vemos que a difusão anômala pode ser modelada mediante diferentes tipos de equações diferenciais, tornando seu estudo muito importante e interessante. Além disso, podemos associar processos difusivos anômalos do tipo correlacionado a um contexto termo-estatístico não extensivo, da mesma forma como podemos associar processos difusivos descritos pela equação de difusão usual à termo-estatística de Boltzmann-Gibbs.

Esta dissertação destina-se a um estudo formal de algumas equações relacionadas à difusão anômala e possíveis extensões da equação usual de difusão mediante o emprego de coeficientes de difusão com dependência espacial ou temporal, com presença de forças externas e, principalmente, com a aplicação de derivadas fracionárias em lugar das derivadas inteiras. Apresentamos esta dissertação dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo, analisaremos a equação de difusão usual, na ausência e na presença de uma força externa linear $F(x) = -kx$, além de discutirmos formulações alternativas do movimento Browniano. O segundo capítulo apresenta um breve estudo das equações de difusão que possuem derivadas fracionárias na variável temporal e na variável espacial. O terceiro capítulo apresenta um estudo acerca das equações de difusão não lineares inteiras e fracionárias. No quarto capítulo, fazemos uma extensão dos resultados obtidos nos capítulos precedentes considerando o caso d -dimensional. Finalizamos nossa análise apresentando no quinto capítulo um caso anisotrópico [16].

Capítulo 1

O Movimento Browniano

Neste capítulo inicial apresentaremos uma breve discussão acerca do movimento browniano, isto é, um movimento estocástico, sob o enfoque de equações de Langevin, caminhantes aleatórios com espaço e tempo contínuos e equações de difusão. Tais conceitos serão fundamentais na compreensão do desenvolvimento do presente trabalho.

1.1 Equação de Langevin

Vimos que um dos primeiros cientistas a observar e, conseqüentemente, reportar sobre o movimento aleatório de uma partícula foi o botânico R. Brown ao observar o movimento de grãos de pólen quando colocados em contato com a água. Tal movimento deve-se ao fato de as moléculas de água colidirem com os grãos de pólen fazendo com que estes experimentem uma força de natureza estocástica. Esse e muitos outros fenômenos, que possuem um comportamento altamente aleatório em nível microscópico com uma regularidade macroscópica, podem ser descritos, por exemplo, em termos de equações de Langevin, caminhantes aleatórios e equações de difusão.

Neste sentido, começaremos nossa discussão considerando a equação de Langevin, que é uma das formas de investigarmos fenômenos desta natureza. A equação de Langevin em sua forma mais simples pode ser escrita como

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x + F_{est.}(t) \quad , \quad (1.1)$$

ou seja, uma equação de Newton com um termo extra $F_{est.}(t)$ representando uma força de caráter aleatório (também chamada de força de Langevin ou

força estocástica) e $-\alpha v_x$ representando o arraste devido à viscosidade. Assim, a riqueza dos resultados que obtemos e, conseqüentemente, a descrição de forma adequada de um dado fenômeno físico fica vinculada à escolha da força de natureza estocástica. Continuando nossa discussão, precisamos fazer mais uma consideração sobre o termo F_{est} que está intimamente relacionado com as propriedades microscópicas do sistema. Por simplicidade, vamos admitir que

$$\begin{aligned}\langle F_{est}(t) \rangle &= 0 \\ \langle F_{est}(t)F_{est}(t') \rangle &= \bar{q}\delta(t-t'),\end{aligned}\tag{1.2}$$

com $\bar{q} = q/m^2$, onde $q = 2\alpha k_b T$. O conjunto de equações acima caracteriza um movimento tipicamente Browniano e, em particular, a escolha feita acima para a Eq.(1.2) recebe o nome de ruído branco. Sistemas nos quais se fazem presentes processos difusivos anômalos requerem outra força estocástica em suas descrições. De fato, ao escolhermos outra forma funcional para a Eq.(1.2) podemos ser conduzidos a situações que abrangem outros tipos de movimentos estocásticos que não o Browniano. Por exemplo, a escolha de um ruído (função aleatória) dependente da concentração [17] pode nos levar a uma situação que é caracterizada pela equação de meios porosos e conseqüentemente a estabelecermos uma relação com a mecânica estatística não extensiva. Em uma situação genérica podemos também considerar $\langle F_{est}(t)F_{est}(t') \rangle \propto \Phi(t-t')$. Este tipo de consideração pode ser útil na investigação de um processo aleatório do tipo “dichotomous”, fracionário e outros.

A partir de (1.1) e (1.2) podemos obter a dispersão (ou variância) do sistema, cuja importância reside no fato de que esta caracteriza a forma como o sistema se difunde. Neste caso, encontramos que

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \left(v_0^2 - \frac{q}{2\gamma} \right) \frac{1}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{q}{\gamma^2} t - \frac{q}{\gamma^3} (1 - e^{-\gamma t}) \quad , \tag{1.3}$$

onde $\gamma = \alpha/m$. A equação acima, para o limite de tempos longos, ou seja, ($\gamma t \gg 1$), se reduz a

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \approx 2\mathcal{D}t \quad , \tag{1.4}$$

com $\mathcal{D} = q/2\gamma^2 = kT/m\gamma$. Esse comportamento é característico de um processo difusivo usual, enquanto que processos difusivos anômalos apresentam uma variância diferente desta. Cabe mencionar aqui que a partir da equação

de Langevin (1.1) podemos obter uma equação de difusão associada a ela. Na seção que segue abordaremos o formalismo de caminhantes aleatórios com espaço e tempo contínuos.

1.2 Passeio aleatório

A origem de cada um dos termos que compõem uma equação de difusão pode ser discutida de uma forma muito interessante quando consideramos o formalismo de caminhantes aleatórios com espaço e o tempo contínuos (CTRW). Esta abordagem é baseada na idéia de usarmos uma formulação microscópica levando em conta propriedades como a distribuição das distâncias dos *pulos* efetuados por um sistema que se difunde em um substrato e a distribuição temporal de espera entre *pulos* consecutivos. Assim, para uma abordagem em termos de caminhantes aleatórios necessitamos definir uma função densidade de probabilidade (pdf) $\psi(x, t)$. De $\psi(x, t)$ podemos obter a distribuição relacionada ao comprimento (tamanho) do pulo

$$\lambda(x) = \int_0^{\infty} dt \psi(x, t) \quad (1.5)$$

e a distribuição relacionada ao tempo de espera

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t) . \quad (1.6)$$

Na Eq.(1.5), $\lambda(x)dx$ representa a probabilidade de ocorrência de um salto com um dado comprimento no intervalo $(x, x+dx)$ e $w(t)dt$, dado pela Eq.(1.6), é a probabilidade de termos um dado tempo de espera entre pulos no intervalo de tempo $(t, t+dt)$. Com estas definições podemos formular o CTRW mediante a seguinte equação [18]

$$\eta(x, t) = \delta(x)\delta(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dt \eta(x', t')\psi(x - x', t - t') , \quad (1.7)$$

que relaciona a pdf $\eta(x, t)$ de chegada na posição x no tempo t , com o evento de chegada em x' no tempo t' , $\eta(x', t')$. O segundo termo denota a condição inicial que aqui foi escolhida como sendo do tipo $\delta(x)$. Conseqüentemente, a pdf $\rho(x, t)$ de se encontrar a partícula em x no tempo t é

$$\rho(x, t) = \int_0^t dt' \eta(x, t')\Psi(t - t') \quad (1.8)$$

sendo $\Psi(t)$ a probabilidade cumulativa, definida por

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t dt' w(t') . \quad (1.9)$$

No espaço de Fourier - Laplace a Eq.(1.8) adquire o seguinte aspecto:

$$\rho(k, s) = \frac{1 - \omega(s)}{s} \frac{1}{1 - \psi(k, s)}, \quad (1.10)$$

que é o propagador geral que emerge da abordagem CTRW, completando assim nossa descrição breve e introdutória desta abordagem.

Agora vamos relacionar a equação de difusão usual com o CTRW de forma a associarmos cada termo presente naquela equação com o desenvolvimento feito acima para o CTRW. Mais especificamente, pretendemos identificar o comportamento de $\omega(t)$ e $\lambda(x)$ para um processo difusivo usual. Esta compreensão será muito útil ao investigarmos situações que estendem a equação de difusão usual, pois quando a estendemos estamos, implicitamente, modificando o comportamento destas grandezas. A equação de difusão usual

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

pode ser reescrita na seguinte forma integral:

$$\rho(x, t) = \rho(x, 0) + \mathcal{D} \int_0^t dt' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t'). \quad (1.12)$$

Tomando a transformada de Laplace-Fourier da equação acima, considerando $\rho(x, 0) = \delta(x)$, obtemos

$$\rho(k, s) = \frac{1}{s + \mathcal{D}k^2}. \quad (1.13)$$

Com uma simples comparação entre a equação acima e a equação (1.10) vemos que a descrição do movimento Browniano requer que o tempo característico (τ) e a variância do comprimento dos pulos (σ) sejam finitas, o que implica em $w(s) \sim 1 - s\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$ e em $\lambda(k) = 1 - \sigma^2 k^2$. Desta forma, quando modificamos a equação de difusão, na tentativa de incorporar efeitos que não são convenientemente descritos pela equação de difusão usual, estamos modificando a forma com que o sistema se difunde, alterando a forma com que faz seus passeios e o tempo com que estes passeios são feitos. Particularmente, ao incorporarmos derivadas de ordem fracionária na equação de difusão este fato fica visível.

1.3 Equação de difusão usual

A equação de difusão pode formalmente ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) - F(x, t)\rho(x, t) \right], \quad (1.14)$$

onde \mathcal{D} é o coeficiente de difusão, aqui considerado constante, $F(x, t)$ representa uma força externa atuando no sistema e $\rho(x, t)$ representa uma densidade de probabilidade. Na Eq.(1.14), identificando o termo

$$J(x, t) = -\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) + F(x, t)\rho(x, t), \quad (1.15)$$

podemos reescrevê-la como

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) = 0 \quad (1.16)$$

e conseqüentemente mostrar que $\int dx \rho(x, t) = cte.$. De fato, a Eq.(1.16) é a equação de continuidade para a nossa densidade de probabilidade $\rho(x, t)$, onde $J(x, t)$ representa a densidade de corrente. Assim, levando em conta as condições de contorno sobre $J(x, t)$, ao integrar-se (1.16) mostrar-se-á que $\int dx \rho(x, t) = const.$, fato que analisaremos novamente nos capítulos que virão. Abordaremos agora a equação de difusão, mais especificamente suas soluções, considerando duas situações; (i) na ausência de força externa e (ii) na presença de uma força externa linear. Tais casos são relativamente interessantes, pois nos levam a uma distribuição gaussiana que, no primeiro caso, tende a uma distribuição uniforme com o passar do tempo. No segundo caso temos a presença de uma solução estacionária devida ao potencial associado à força externa escolhida.

No primeiro caso, ao empregarmos a condição requerida, a equação de difusão fica dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t). \quad (1.17)$$

Utilizando as transformadas de Fourier e Laplace, considerando a condição inicial $\rho(x, 0) = \delta(x)$, a equação acima fica dada por

$$\rho(k, s) = \frac{1}{s + \mathcal{D}k^2}. \quad (1.18)$$

Assim, invertendo as transformadas, chegamos na solução desejada

$$\rho(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathcal{D}t}}}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \quad (1.19)$$

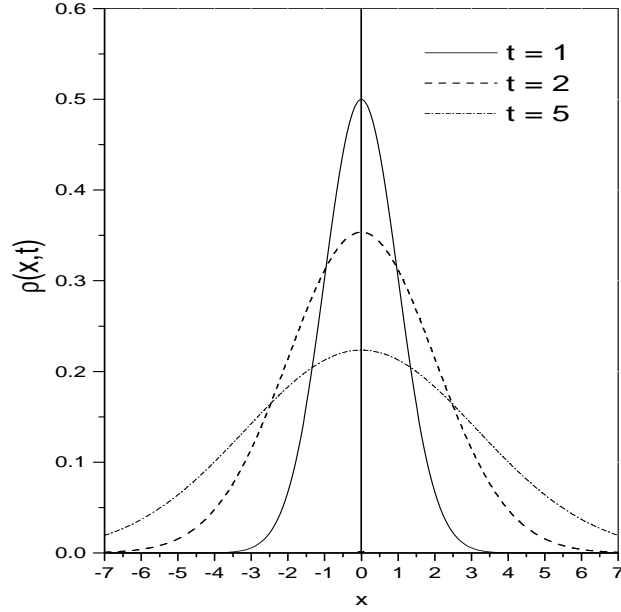


Figura 1.1: *Comportamento da Eq.(1.19) vs. x para alguns valores típicos de t e com $D=1$.*

(veja Fig.(1.1)).

Da distribuição acima, obtida da Eq.(1.17), podemos calcular o segundo momento, que para nós desempenha um papel importante. De fato, ao conhecermos o segundo momento podemos obter a variância e conseqüentemente saber como a distribuição alarga-se. Neste caso temos $\langle x^2 \rangle = 2Dt$. Esta linearidade do comportamento do segundo momento com relação ao tempo será o que caracterizará um processo difusivo usual.

Neste ponto consideraremos a presença da força $F = -kx$ e as conseqüências que surgem desta escolha. A equação de difusão nesta situação fica dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [kx \rho(x, t)] . \quad (1.20)$$

Para resolvermos esta equação vamos empregar o método de separação de variáveis. Assim sendo, vamos considerar que a nossa solução possa ser escrita como

$$\rho(x, t) = \sum_n \psi_n(x) \phi_n(t) , \quad (1.21)$$

onde $\psi_n(x)$ é obtida da equação espacial e $\phi_n(t)$ da equação que envolve a variável temporal. Dessa forma, substituindo a equação (1.21) em (1.20) e usando as propriedades de ortogonalidade inerentes a estas funções, obtemos

$$\mathcal{D} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) - \frac{d}{dx} [k\psi_n(x)] = -\lambda_n \psi_n(x) \quad (1.22)$$

e

$$\frac{d}{dt} \phi_n(t) = -\lambda_n \phi_n(t) . \quad (1.23)$$

Após alguns cálculos é possível mostrar que

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{k}{2\mathcal{D}}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{k}{2\mathcal{D}}} x \right) , \quad (1.24)$$

onde $H_n(x)$ representa os polinômios de Hermite, $\lambda_n = 2nk$ e $\phi_n(t) = \phi_n(0)e^{-\lambda_n t}$. Utilizando os resultados encontrados na Eq.(1.24) e usando novamente as propriedades de ortogonalidade obtemos

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(x, \xi, t) dx \\ \mathcal{G}(x, \xi, t) &= \sqrt{\frac{k}{2\mathcal{D}\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{kx^2}{2\mathcal{D}} - 2nkt}}{2^n \Gamma(n+1)} H_n \left(\sqrt{\frac{k}{2\mathcal{D}}} \xi \right) H_n \left(\sqrt{\frac{k}{2\mathcal{D}}} x \right) , \end{aligned} \quad (1.25)$$

para uma condição inicial genérica do tipo $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$. Na equação acima podemos verificar dois fatos importantes. O primeiro deles consiste na presença de uma situação estacionária. Este fato sugere a possibilidade de usarmos o princípio de entropia máxima para obtermos soluções exatas ou aproximadas, já que podemos conectar esta distribuição a um contexto termoestatístico. O segundo diz respeito ao segundo momento, que agora comporta-se da seguinte forma:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\mathcal{D}}{k} \left(1 - e^{-2kt} \right) , \quad (1.26)$$

que difere do caso anterior devido à presença da força externa. Em particular, da Eq.(1.26) vemos que quanto maior for k mais rapidamente o segundo momento fica constante (veja Fig.(1.2)) indicando que nesta situação a distribuição estacionária é atingida com maior rapidez também.

Nos capítulos que seguem investigaremos possíveis extensões da equação de difusão. Basicamente, analisaremos as situações que envolvem a presença de derivadas fracionárias tanto na variável espacial como na variável temporal e/ou situações que empregam termos não lineares.

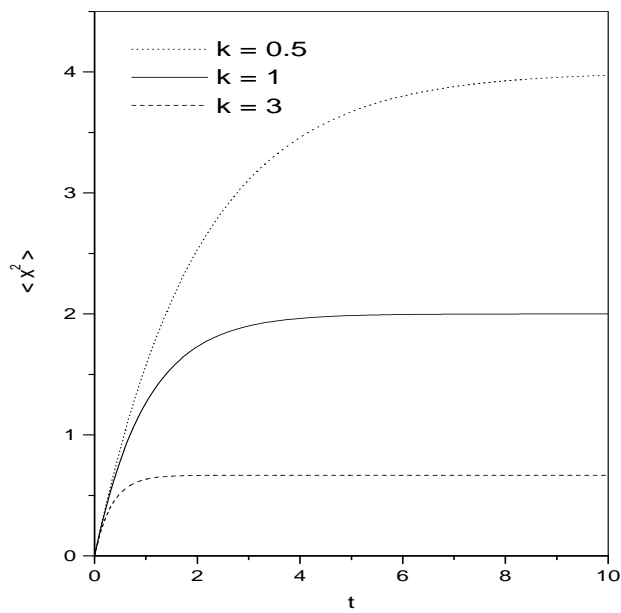


Figura 1.2: *Comportamento da Eq.(1.26) vs. t para valores típicos de k.*

Capítulo 2

Equação de difusão fracionária linear unidimensional

Neste capítulo, vamos abordar algumas equações de difusão que envolvem derivadas fracionárias na variável temporal ou na variável espacial, usualmente empregadas na descrição de processos difusivos anômalos. Como veremos, a aplicação de derivadas fracionárias na variável temporal nos leva a uma difusão anômala com o segundo momento finito, i.e., $\langle x^2 \rangle \propto t^\alpha$, em contraste com a derivada fracionária aplicada na variável espacial, que resulta em uma difusão anômala cujo segundo momento não é finito. Neste contexto, usaremos o formalismo de caminhantes aleatórios descrito no capítulo anterior para explorar as implicações obtidas pelo uso de derivadas fracionárias na equação de difusão. Deixaremos para os capítulos seguintes as extensões que contemplam situações d -dimensionais com simetria radial ou anisotropias.

2.1 Derivadas fracionárias aplicadas à variável temporal

Começaremos nosso estudo considerando a seguinte equação fracionária de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \rho(x, t)] \quad , \quad (2.1)$$

onde o operador $\partial^\gamma / \partial t^\gamma$ representa o operador de derivada fracionária de Caputo, aplicado neste caso à variável temporal. Este operador é definido

como

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \gamma)} \int_0^t dt' \frac{\rho^{(n)}(x, t')}{(t - t')^{\gamma+1-n}} , \quad (2.2)$$

com $n - 1 < \gamma < n$ e $\rho^{(n)}(x, t)$ é a n -ésima derivada de $\rho(x, t)$ em relação ao tempo. Temos ainda a presença do termo de força externa $F(x, t)$ e do coeficiente de difusão \mathcal{D} , que inicialmente consideraremos constante. Mais adiante veremos situações nas quais \mathcal{D} poderá apresentar uma dependência, por exemplo, com o espaço e com o tempo. Ainda com relação à equação (2.1), vale comentar que ela generaliza a equação usual de difusão, conforme vimos acima, mediante a presença do operador fracionário atuando na variável temporal, e que para $\gamma = 1$ recuperamos a equação usual de difusão. Com o intuito de mostrar que a distribuição $\rho(x, t)$ na Eq.(2.1) é normalizável, vamos reescrevê-la na forma

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}(x, t) = 0 , \quad (2.3)$$

ou seja, na forma de uma equação de continuidade, com

$$\mathcal{J}(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) - F(x, t) \rho(x, t) . \quad (2.4)$$

A normalização é verificada quando integramos a Eq.(2.3) sobre todo o espaço e consideramos que $\mathcal{J}(x = \pm\infty, t) = 0$, pois estamos admitindo que $\rho(x = \pm\infty, t) = 0$. Assim, esta importante propriedade das densidades de probabilidades continua válida mesmo com a presença do operador de derivada fracionária do tipo Caputo.

Voltando à análise das soluções da Eq.(2.1) faremos desenvolvimentos para esta equação considerando diferentes situações para o coeficiente de difusão \mathcal{D} , para a força externa $F(x, t)$ e para as condições de contorno. Inicialmente, consideraremos uma situação caracterizada pela ausência de força externa, com \mathcal{D} constante e a condição inicial $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$. Como condição de contorno vamos tomar inicialmente $\rho(x = \pm\infty, t) = 0$. Devido a estas considerações, a equação a ser resolvida é

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) , \quad (2.5)$$

sujeita às já referidas condições de contorno e inicial. Tal situação é melhor trabalhada se fizermos uso de transformadas integrais. Realmente, empregando as transformadas de Fourier e Laplace na Eq.(2.5), obtemos

$$\rho(k, s) = \frac{\rho(k, 0)}{s + \mathcal{D} s^{1-\gamma} k^2} , \quad (2.6)$$

com $0 < \gamma < 1$, onde empregamos o resultado

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) \right\} = s^\gamma \rho(x, s) + \sum_{i=0}^{i-1} s^{\gamma-i-1} \left[\frac{\partial^{\gamma-1-i}}{\partial t^{\gamma-1-i}} \rho(x, t) \right]_{t=0}, \quad (2.7)$$

que é válido para $n - 1 < \gamma < n$. Agora, para obtermos a solução desejada temos que inverter ambas as transformadas. Realizando inicialmente a inversão da transformada de Fourier e levando em conta o teorema de convolução obtemos

$$\hat{\rho}(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \tilde{\rho}(x - x') \mathcal{G}(x', s) \quad (2.8)$$

onde

$$\mathcal{G}(x, s) = \frac{1}{2s} \left(\frac{s^\gamma}{\mathcal{D}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \left(\frac{s^\gamma}{\mathcal{D}} \right)^{\frac{1}{2}} |x| \right]. \quad (2.9)$$

Em particular, observando a Eq.(2.8) vemos que $\mathcal{G}(x, s)$ é a função de Green associada à condição inicial considerada. Por sua vez, para invertermos a transformada de Laplace faremos uso do seguinte procedimento: relacionaremos a transformada de Laplace com a transformada de Mellin, invertaremos esta transformada (Mellin) mediante a identificação do integrando da operação inversa desta transformada com o integrando das funções H de Fox, obtendo então $\rho(x, t)$. Observamos que as funções de Fox são definidas como [19]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \mid \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_L ds \chi(s) x^s \\ \chi(s) &= \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - B_i s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i + A_i s)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i + B_i s) \prod_{i=1+n}^p \Gamma(a_i - A_i s)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim, aplicando o procedimento discutido acima, após alguns cálculos é possível mostrar que as transformadas de Laplace e de Mellin estão relacionadas uma com a outra por meio de

$$\rho(x, s') = \frac{1}{\Gamma(1 - s')} \int_0^\infty ds s^{-s'} \rho(x, s), \quad (2.11)$$

onde $\rho(x, s')$ representa a função transformada em Mellin e $\rho(x, s)$ representa a função transformada em Laplace. Lembrando que a transformada de Mellin é definida como

$$\rho(x, s') = \int_0^\infty dt t^{s'-1} \rho(x, t) \quad \left(\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \rho(x, s') t^{-s'} ds' \right). \quad (2.12)$$

Assim, utilizando a relação (2.11) na Eq.(2.9), obtemos

$$\mathcal{G}(x, s') = \frac{1}{\gamma|x|} \left(\frac{|x|}{\sqrt{\mathcal{D}}} \right)^{\frac{2}{\gamma}s'} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}s'\right)}{\Gamma(1 - s')} . \quad (2.13)$$

A partir de (2.13), após a inversão da transformada de Mellin, obtemos

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t^\gamma}} \mathbf{H}_{1,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4\mathcal{D}t^\gamma} \left| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right. \right]_{(0,1)} . \quad (2.14)$$

(veja Fig.(2.1) e Fig.(2.2)) Este resultado é obtido mediante a comparação direta entre a integral de inversão de Mellin

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{G}(x, s') t^{-s'} ds' \quad (2.15)$$

e a forma integral das funções H de Fox anteriormente representadas pela relação (2.10). Com base nesses resultados, concluímos que nossa solução é

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t^\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \tilde{\rho}(x') \mathbf{H}_{1,2}^{2,0} \left[\frac{(x-x')^2}{4\mathcal{D}t^\gamma} \left| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right. \right]_{(0,1)} . \quad (2.16)$$

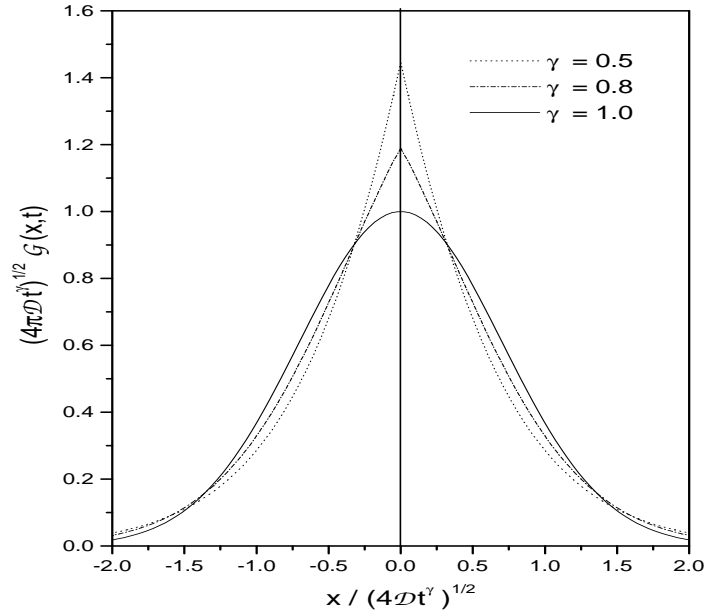


Figura 2.1: Comportamento de $(4\pi\mathcal{D}t^\gamma)^{1/2}\mathcal{G}(x, t)$ vs. $x/(4\mathcal{D}t^\gamma)^{1/2}$, ilustra a Eq.(2.14) para valores típicos de γ .

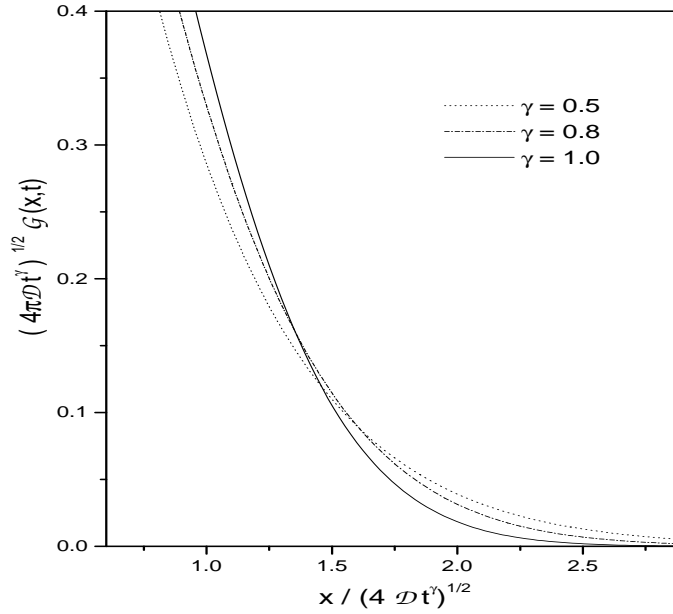


Figura 2.2: *Comportamento da Eq.(2.14) para grandes argumentos.*

Vamos agora considerar situações nas quais há a presença de barreiras absorventes e refletoras no sistema. Para estes casos a aplicação de transformadas integrais não é, ao contrário do caso anterior, apropriada. De fato, a imposição de condições de contorno finitas faz necessário o emprego de outros métodos para encontrarmos a solução desejada. Considerando inicialmente o caso de barreiras absorventes, ou seja, situação na qual $\rho(0, t) = \rho(L, t) = 0$, faremos uso de uma transformada finita no intervalo $0 < x < L$. Com a condição de contorno em mente, vamos considerar que a solução procurada possa ser escrita em termos de uma série em senos de Fourier. Assim, a série

$$\rho(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n(t) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (2.17)$$

com

$$\mathcal{B}_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \rho(x, t) \quad (2.18)$$

é apropriada para o tratamento deste caso, pois satisfaz a condição de contorno. Substituindo a Eq.(2.17) na Eq.(2.5), multiplicando ambos os lados

por $\text{sen}(nx\pi/L)$, integrando desde 0 a L e identificando $\mathcal{B}_n(t)$, obtemos

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \mathcal{B}_n(t) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \mathcal{D} \mathcal{B}_n(t). \quad (2.19)$$

Para resolver a equação acima aplicaremos uma transformada de Laplace, permitindo-nos uma clara identificação do resultado a ser invertido com as funções de Mittag-Leffler $E_\alpha(x)$. Isto deve-se ao fato de que

$$\begin{aligned} E_\alpha(-t^\alpha) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + s^{1-\alpha}} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^n}{\Gamma(1 + n\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então, após alguns cálculos podemos mostrar que

$$\mathcal{B}_n(t) = \mathcal{B}_n(0) E_\gamma \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \mathcal{D} t^\gamma \right). \quad (2.21)$$

Agora, considerando uma condição inicial do tipo $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$ e utilizando o resultado acima em (2.17) temos

$$\rho(x, t) = \int_0^L dx' \mathcal{G}(x, x', t) \tilde{\rho}(x')$$

com

$$\mathcal{G}(x, x', t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x' \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) E_\gamma \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \mathcal{D} t^\gamma \right). \quad (2.22)$$

Por outro lado, para o caso de barreiras refletoras, onde no contorno devemos ter $\partial_x \rho|_{x=0} = \partial_x \rho|_{x=L} = 0$, consideramos que a solução possa ser expressa em termos de uma série em cossenos de Fourier. Assim, aplicando o procedimento do caso anterior, obtemos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L dx' \tilde{\rho}(x') + \int_0^L dx' \mathcal{G}(x, x', t) \tilde{\rho}(x')$$

com

$$\mathcal{G}(x, x') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x' \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) E_\gamma \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \mathcal{D} t^\gamma \right). \quad (2.23)$$

Neste ponto, é interessante observar que para esta situação podemos obter uma solução estacionária. De fato, considerando $t \rightarrow \infty$ na solução acima chegamos em

$$\rho(x, t \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{L} \int_0^L dx' \tilde{\rho}(x'),$$

pois $E_\gamma(-n^2\pi^2\mathcal{D}t^\gamma/L^2) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isto se verifica porque a função $E_\alpha(x)$ no intervalo de γ considerado é uma função que decai de forma monotônica sem apresentar oscilações. O fato de termos uma solução estacionária nos permite também o cálculo da função de autocorrelação estacionária [20], que mostra de que forma as soluções geral e inicial estão relacionadas. Esta função é definida como

$$\langle x(t)x(0) \rangle_s = \int_0^L dx \int_0^L dx' x x' \rho(x, t) \rho_s(x), \quad (2.24)$$

onde $\rho_s(x)$ é a solução para o regime estacionário. Considerando, por simplicidade, $\rho(x, 0) = \delta(x - x')$ como nossa condição inicial, obtemos $\rho_s(x) = 1/L$. Com este resultado e a solução (2.23) encontramos, após alguns cálculos,

$$\langle x(t)x(0) \rangle_s = \frac{L^2}{4} + \frac{8L^4}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} E_\gamma \left[-\frac{(2n+1)^2}{L^2} \mathcal{D}t^\gamma \right]. \quad (2.25)$$

Se tomarmos o limite de tempos longos na equação acima verificaremos que $\langle x(t)x(0) \rangle \sim L^2/4$. Este resultado foi obtido em [20] para a equação de difusão usual, indicando que a derivada fracionária somente fará com que o sistema relaxe de forma anômala até a situação de equilíbrio.

Voltemos nossa atenção agora para a forma do segundo momento obtido para a Eq.(2.5), a partir da qual discutimos os três casos precedentes. Como foi mencionado no capítulo anterior, o segundo momento rotula um processo difusivo como anômalo ou usual. Para a situação que aqui está em consideração, ou seja, aquela na qual há a presença de derivadas não inteiras na variável temporal de uma equação de difusão, o segundo momento se mostra na forma de uma potência de t , ou seja, $\langle x^2 \rangle \propto t^\gamma$. Além disso, é marcante a forma com que a presença do operador de Caputo altera a distribuição de tempo de espera $\omega(t)$. Neste sentido, utilizando os conceitos de caminhantes aleatórios anteriormente discutidos, chegamos em uma distribuição de probabilidades para a parte temporal da forma

$$w(t) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma} \left(-\frac{t^\gamma}{\tau_0^\gamma} \right), \quad (2.26)$$

onde τ_0 é uma constante e $E_{\alpha, \beta}(t)$ é a função de Mittag-Leffler generalizada

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}. \quad (2.27)$$

Vemos que agora a distribuição apresenta uma dependência com o parâmetro γ , que pode dar forma tanto a processos subdifusivos quanto a superdifusivos. Assim, a presença de operadores diferenciais fracionários na equação

de difusão representa uma situação na qual as distribuições de probabilidades para o tempo e para o espaço, que emergem da abordagem de caminhantes aleatórios, são alteradas, ou seja, a difusão ocorre de forma anômala. Neste caso em particular, a alteração ocorreu apenas na distribuição de tempos, já que a derivada fracionária foi aplicada na variável temporal. Mais à frente veremos a alteração causada na distribuição de saltos quando da aplicação de derivadas fracionárias na variável espacial.

Vejamos agora o caso em que o coeficiente de difusão é dado por $\mathcal{D}(x, t) = \mathcal{D}|x|^{-\theta}$. Cabe mencionar aqui que esta dependência espacial no coeficiente de difusão tem sido empregada na investigação de, por exemplo, sistemas turbulentos e difusão em fractais. Ainda considerando $F(x, t) = 0$ na Eq.(2.1) e utilizando transformadas integrais definidas anteriormente, podemos mostrar que

$$\rho(x, t) = \frac{2 + \theta}{2\Gamma\left(\frac{1}{2+\theta}\right)} \left[\frac{1}{(2 + \theta)^2 \mathcal{D} t^\gamma} \right]^{\frac{1}{2+\theta}} \mathbf{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[\frac{|x|^{2+\theta}}{(2 + \theta)^2 \mathcal{D} t^\gamma} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{\gamma}{2+\theta}, \gamma) \\ (1 - \frac{1}{2+\theta}, 1) \end{matrix} \right]_{(0,1)}, \quad (2.28)$$

lembrado que para $\gamma = 1$ e $\theta = 0$ recuperamos a solução gaussiana obtida para o caso usual. Se, além desta dependência do coeficiente de difusão com o espaço, tivermos a presença de uma força externa do tipo linear, ou seja, $F(x) = -kx$, obteremos mediante separação de variáveis o resultado

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int_0^\infty d\xi \tilde{\rho}(\xi) \xi^{-\theta-1} \mathcal{G}(x, \xi, t) \\ \mathcal{G}(x, \xi, t) &= \left[\frac{k}{(2 + \theta)\mathcal{D}} \right]^{-\frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}} \sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{k|x|^{2+\theta}}{(2+\theta)\mathcal{D}}} \mathbf{L}_n^{-\frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}} \left[\frac{k|\xi|^{2+\theta}}{(2 + \theta)\mathcal{D}} \right] \times \\ &\times \mathbf{L}_n^{-\frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}} \left[\frac{k|x|^{2+\theta}}{(2 + \theta)\mathcal{D}} \right] \mathbf{E}_\gamma [-(2 + \theta) n k t^\gamma] \times \\ &\times \frac{\Gamma(1 + n)}{\Gamma(1 + n - a)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

com $\lambda_n = (2 + \theta)nk$.

Da discussão feita acima percebemos que são poucos os potenciais cuja presença na equação de difusão nos conduz a uma solução exata expressa em termos de funções especiais conhecidas. Entretanto, na maioria das situações somos obrigados a fazer aproximações da situação original devido à dificuldade de encontrarmos uma solução em forma fechada. Neste sentido, é interessante obter a equação integral relativa à Eq.(2.1) que torna possível uma solução recursiva na forma de uma abordagem perturbativa que pode ser

relevante na análise do problema. Assim, vamos reescrever a Eq.(2.1) como

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \alpha(x, t), \quad (2.30)$$

com

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t)\rho(x, t)]. \quad (2.31)$$

Empregando transformadas de Fourier e Laplace na Eq.(2.30) obtemos

$$\rho(k, s) = \frac{\rho(k, 0)}{s + \mathcal{D}s^{1-\gamma}k^2} - \frac{\alpha(k, s)}{s + \mathcal{D}s^{1-\gamma}k^2}. \quad (2.32)$$

A inversão destas transformadas fornece

$$\rho(x, t) = \rho^{(0)}(x, t) - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{G}_\gamma(x - x', t - t') \alpha(x', t'). \quad (2.33)$$

com

$$\mathcal{G}_\gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t^\gamma}} \mathbf{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[\frac{x^2}{4\mathcal{D}t^\gamma} \left| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right. \right]_{(0,1)}. \quad (2.34)$$

Substituindo $\alpha(x, t)$ na equação (2.33) obtemos, via integração por partes,

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho^{(0)}(x, t) \\ &+ \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{G}_\gamma^{(2)}(x - x', t - t') [F(x', t')\rho(x', t')] \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\gamma^{(2)}(x, t) &= \frac{d}{dx} \mathcal{G}_\gamma(x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\mathcal{D}t^\gamma}} \mathbf{H}_{2\ 3}^{2\ 1} \left[\frac{x^2}{4\mathcal{D}t^\gamma} \left| \begin{matrix} (0,2) & (1-\frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) & (0,1) & (1,2) \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde utilizamos a propriedade (A.2) do apêndice. A Eq.(2.35) é a forma integral correspondente à Eq.(2.1) e pode ser empregada no cálculo da influência de uma força externa aplicada ao sistema.

2.2 Equação de difusão: derivadas fracionárias no espaço

Até o presente momento tratamos apenas de situações onde foram empregadas derivadas fracionárias na variável temporal, de modo que, à luz

da abordagem de caminhantes aleatórios, obtivemos alterações somente na função distribuição de tempos de espera $\omega(t)$. Além disso, vimos que as soluções obtidas forneciam segundos momentos finitos, embora não fossem, como no caso usual, lineares com o tempo. O emprego de derivadas fracionárias na variável espacial é representativo de uma situação onde o segundo momento diverge. Este comportamento é característico de distribuições do tipo Lèvy, que têm sido aplicadas, por exemplo, no estudo de sistemas caóticos [21], na descrição de transporte em plasma turbulento [22], no movimento bacteriano [23, 24, 25] e também em estudos de Econofísica [26, 27] lembrando que estas distribuições apresentam a propriedade da auto-similaridade. Não entraremos em mais detalhes acerca do emprego de distribuições do tipo Lèvy em sistemas que apresentam comportamento caótico pois isto transcende os objetivos desta dissertação.

Iniciaremos com a observação de que a distribuição de Lèvy

$$L_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx - |k|^\mu \mathcal{D}t} \quad (2.37)$$

é solução da equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^\mu \rho}{\partial |x|^\mu} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \rho(x, t)] , \quad (2.38)$$

quando consideramos a ausência de força externa. Para demonstrarmos esse resultado basta utilizarmos o fato de que $\mathcal{F}\{\partial_{|x|}^\mu \rho(x, t)\} \equiv -|k|^\mu \rho(k, t)$, onde

$$\mathcal{F}\{\rho(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \rho(x, t) \quad (2.39)$$

é a transformada de Fourier. Esta consideração conduz a $\rho(x, t) = L_\mu(x)$, confirmando nossa afirmação inicial. Neste contexto, aplicando o procedimento do capítulo anterior relativo a caminhantes aleatórios na Eq.(2.38) obtemos que a distribuição relacionada ao comprimento dos saltos é agora dada por $\lambda(k) = 1 - \sigma^\mu |k|^\mu$, com $\sigma^\mu = \mathcal{D}/\tau^\mu$, para a qual recuperamos o caso usual com $\mu = 2$. Esta distribuição apresenta comportamento assintótico de cauda longa, ou seja, saltos longos possuem uma maior probabilidade de ocorrerem quando comparados com o caso usual.

Ainda na ausência de força externa, vamos considerar agora que o coeficiente de difusão apresenta uma dependência temporal do tipo $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Utilizando transformadas integrais e propriedades das funções

de Mittag-Leffler e de Fox pode-se mostrar que

$$\rho(x, t) = \frac{\pi}{\mu|x|} \mathbf{H}_{33}^{21} \left[\frac{|x|}{(\mathcal{D}t^{\alpha+1})^{\frac{1}{\mu}}} \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}) & (1, \frac{\alpha+1}{\mu}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1) & (1, \frac{1}{\mu}) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.40)$$

(veja Fig.(2.3)).

Se, por outro lado, considerarmos \mathcal{D} constante e $F(x) = -kx$ obtemos, empregando método semelhante ao do caso anterior, a solução

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\mu|x|} \mathbf{H}_{11}^{22} \left[\left(\frac{\alpha\mu}{\overline{\mathcal{D}}(t)} \right)^{\frac{1}{\mu}} |x| \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}) & (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1) & (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right], \quad (2.41)$$

onde $\overline{\mathcal{D}}(t) = \mathcal{D}[1 - \exp(-\alpha\mu t)]$. Vamos analisar agora a Eq.(2.38) para uma condição inicial do tipo $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$. Repetindo o procedimento empregado acima obtemos, tomando a transformada de Laplace e Fourier da equação (2.38), que

$$\rho(k, s) = \frac{\rho(k, 0)}{s + \mathcal{D}|k|^\mu}. \quad (2.42)$$

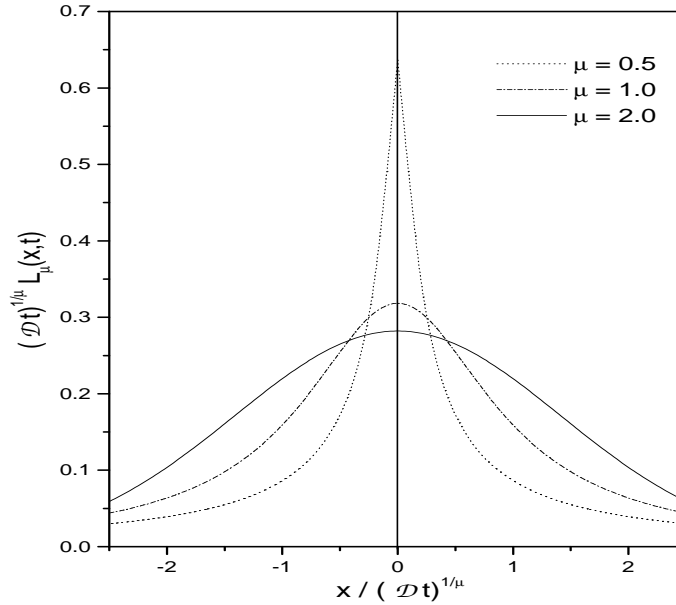


Figura 2.3: Comportamento de $(\mathcal{D}t)^{\frac{1}{\mu}} L_\mu(x, t)$ vs. $x/(\mathcal{D}t)^{\frac{1}{\mu}}$, ilustra a Eq.(2.40) para valores típicos de μ .

Invertendo a equação anterior obtemos

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{G}_\mu(x - x', t - t') \tilde{\rho}(x') \quad , \quad (2.43)$$

onde $\mathcal{G}_\mu(x, t) = L_\mu(x, t)$. E a equação integral associada a Eq.(2.38) é

$$\rho(x, t) = \rho^{(0)}(x, t) - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathcal{G}_\mu^{(2)}(x - x', t - t') F(x', t') \rho(x', t') \quad .(2.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mu^{(2)}(x, t) &= -\frac{d}{dx} L_\mu(x, t) \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} k \sin(kx) e^{-t\mathcal{D}|k|^\mu} \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

A Eq.(2.44) é justamente a equação integral correspondente à Eq.(2.38) que pode ser usada para calcular perturbativamente a influência de uma força externa qualquer aplicada ao sistema.

Discutimos neste capítulo as conseqüências do emprego de derivadas fracionárias na equação de difusão, considerando também dependência espacial e temporal para o coeficiente de difusão, além da presença de uma força externa. Vimos que, quando aplicadas à variável espacial, a derivada fracionária nos conduz às distribuições de Lèvy, que apresentam comportamento superdifusivo. No próximo capítulo veremos algumas equações de difusão não lineares e suas soluções.

Capítulo 3

Equação de difusão não linear fracionária

Este capítulo destina-se à discussão das soluções da equação de difusão não linear com derivada fracionária na variável espacial

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial |x|} \left\{ \mathcal{D}(x, t) \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial |x|^{\mu-1}} [\rho(x, t)]^\nu - F(x, t)\rho(x, t) \right\}, \quad (3.1)$$

para a qual consideraremos duas situações: (i) o coeficiente de difusão dado por $\mathcal{D} = \mathcal{D}|x|^{-\theta}$ ($\theta \in \mathcal{R}$) na ausência de força externa, para a qual faremos também uma extensão para um coeficiente de difusão dependente do tempo $\mathcal{D}(x, t) = \mathcal{D}(t)|x|^{-\theta}$, e (ii) a presença de uma força externa do tipo $F(x) \propto x|x|^{\alpha-1}$ com a mesma dependência espacial para o coeficiente de difusão do caso anterior. Também analisaremos a conexão entre resultados obtidos aqui e os resultados presentes na mecânica estatística não extensiva.

3.1 Equação de difusão não linear inteira

Inicialmente recordaremos alguns resultados apresentados em [28, 29, 30, 31] que são soluções da Eq.(3.1), onde a posição e o tempo aparecem escalados na forma

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \tilde{\rho} \left[\frac{x}{\Phi(t)} \right]. \quad (3.2)$$

Observe que investigar este tipo de solução para a equação de difusão é basicamente usar o método de similaridade [32]. Desta forma, conseguiremos

reduzir a Eq.(3.1) a uma equação ordinária cuja dependência explícita dependerá das condições de contorno ou das restrições que aparecerão sob forma de leis de conservação. Considerando $\mu = 2$, $F(x) = 0$, $D(x) = \mathcal{D} = \text{constante}$, empregando a equação acima na Eq.(3.1), com $z = x/\Phi(t)$, obtemos

$$-\frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)^2} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)] = \frac{\mathcal{D}}{\Phi(t)^{2+\nu}} \frac{d^2}{dz^2} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \quad . \quad (3.3)$$

A solução para $\Phi(t)$ é

$$\Phi(t) = [(1 + \nu)kt]^{1/(1+\nu)} \quad , \quad (3.4)$$

obtida via integração direta, onde k é uma constante arbitrária de separação que pode ser obtida da condição de normalização. Para esta situação, adotamos a solução que satisfaz $\Phi(0) = 0$. Para a variável $z = x/\Phi(t)$, obtemos a solução

$$\rho(z) = \left[1 - \frac{(\nu - 1)}{2\mathcal{D}\nu} kz^2 \right]^{\frac{1}{\nu-1}} \quad (3.5)$$

(veja a Fig.(3.1)). Esta solução pode ser facilmente identificada com a função q -exponencial que surge do formalismo não extensivo. Esta função é escrita como $\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$. Assim, com $q = 2 - \nu$, podemos escrever nossa solução como

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \exp_q \left[-\frac{k}{2\mathcal{D}\nu} z^2 \right] \quad . \quad (3.6)$$

O interesse na identificação com a função q -exponencial reside na idéia de que, da mesma forma que se pode associar um processo difusivo usual ao contexto termo-estatístico de Boltzmann-Gibbs, podemos associar os processos difusivos anômalos à termo-estatística generalizada de Tsallis.

Agora veremos o caso em que o coeficiente apresenta a já discutida dependência espacial do tipo $D(x) = \mathcal{D}|x|^{-\theta}$ ($\theta \in \mathcal{R}$) ($\theta = 0$ recuperamos o caso em que $D(x)$ é constante). Empregando método análogo ao anterior obtemos que

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \exp_q \left[-\frac{k}{\nu(2 + \theta)\mathcal{D}} z^{2+\theta} \right] \quad , \quad (3.7)$$

com $\Phi(t) = [(\nu + \theta + 1)k\mathcal{D}t]^{1/(1+\nu+\theta)}$ [31]. Como estamos interessados em soluções que decaiam para longas distâncias, temos que impor $\theta > -2$. Além disso, verificamos que os casos $\theta + \nu > 1$, $\theta + \nu = 1$ e $\theta + \nu < 1$ correspondem,

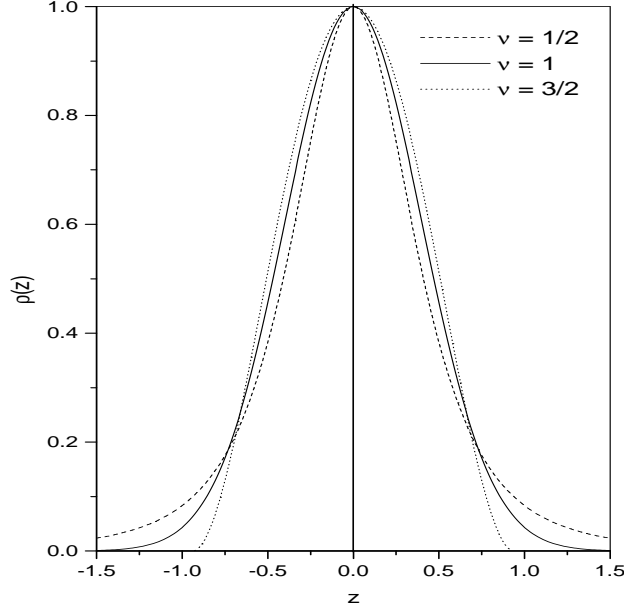


Figura 3.1: *Comportamento de $\rho(z)$ vs. z , ilustra a Eq.(3.5) para valores típicos de ν .*

respectivamente, aos regimes subdifusivo, normal e superdifusivo. Se quisermos estender a dependência do coeficiente de difusão também à variável temporal, considerando que $\mathcal{D}(x, t) = \bar{\mathcal{D}}(t)|x|^{-\theta}$, a única mudança que temos é na função $\Phi(t)$, como segue abaixo

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(t_0))^{1+\theta+\nu} + (1 + \nu + \theta) \int_{t_0}^t dt \bar{\mathcal{D}}(t) \right]^{\frac{1}{1+\theta+\nu}}. \quad (3.8)$$

Faremos agora a extensão da solução (3.7) considerando a presença da força externa $F(x) = kx|x|^{\alpha-1}$ e mantendo $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}|x|^{-\theta}$. Embora não saibamos o que acontece no caso geral, (α, θ, ν) quaisquer, há uma situação especial para a qual a solução escalada (3.2) ainda é válida. Este caso corresponde a $\alpha = q - \theta - 2$, ou seja, $\alpha + \theta + \nu = 0$. Com esta condição obtemos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \exp_q \left[-\frac{1}{\mathcal{D}\nu} \left(\frac{k}{2 + \theta} \left(\frac{|x|}{\Phi(t)} \right)^{2+\theta} - k \ln_{2-q} \left(\frac{|x|}{\Phi(t)} \right) \right) \right], \quad (3.9)$$

onde $\ln_q x \equiv (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$ é a função q -logarítmica (que é a função inversa da função q -exponencial) e $\Phi(t) = [(1 + \nu + \theta)kt]^{1/(1+\nu+\theta)}$, onde k

é uma constante de separação e pode ser obtida mediante a condição de normalização. Na seção que segue obteremos soluções gerais para a Eq.(3.1) considerando posteriormente que $0 < \mu < 1$.

3.2 Equação de difusão não linear fracionária

Nesta seção analisaremos, inicialmente, a equação (3.1) na ausência de força externa e já considerando $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}|x|^{-\theta}$. Assim, devemos resolver a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial |x|} \left\{ \mathcal{D}|x|^{-\theta} \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial |x|^{\mu-1}} [\rho(x, t)]^\nu \right\}, \quad (3.10)$$

que unifica as equações presentes em [29, 31]. Faremos uso do procedimento empregado na seção anterior, levando em conta a propriedade

$$\frac{d^\delta}{dx^\delta} \mathcal{G}(ax) = a^\delta \frac{d^\delta}{dz^\delta} \mathcal{G}(\bar{z}), \quad (\delta \in \mathcal{R}) \quad (3.11)$$

com $\bar{z} = ax$. Esta propriedade não só é válida para derivadas ordinárias mas também para todos os operadores fracionários que aqui temos considerado. Dessa forma, aplicando (3.2) na Eq.(3.10) obtemos

$$\Phi(t) = [\bar{k}_1 \mathcal{D}t + \bar{k}_2]^{\frac{1}{\mu+\nu+\theta-1}}, \quad (3.12)$$

com $\bar{k}_1 \equiv \bar{k}(1 - \theta - \nu - \mu)$ e \bar{k}_2 é outra constante arbitrária. Lembrando que estamos usando a variável $|z| = |x|/\Phi(t)$, a outra equação a ser resolvida é

$$\frac{d}{d|z|} \left\{ |z|^{-\theta} \frac{d^{\mu-1}}{d|z|^{\mu-1}} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right\} = \bar{k} \frac{d}{dz} [z\tilde{\rho}(z)] \quad (3.13)$$

que, após uma integração, reduz-se a

$$\frac{d^{\mu-1}}{d|z|^{\mu-1}} [\tilde{\rho}(z)]^\nu = \bar{k}|z|^{1+\theta} \tilde{\rho}(z) + \mathcal{C}, \quad (3.14)$$

onde \mathcal{C} é outra constante arbitrária que, devido às condições de contorno, é nula. Para obtermos a solução desejada utilizaremos o “ansatz” $\tilde{\rho}(z) = \mathcal{N}z^{\alpha/\nu}(a + bz)^{\beta/\nu}$, pois dessa forma poderemos fazer uso do resultado

$$D_x^\delta [x^\alpha (a + bx)^\beta] = a^\delta \frac{\Gamma[1 + \alpha]}{\Gamma[1 + \alpha - \delta]} x^{\alpha-\delta} (a + bx)^{\beta-\delta}, \quad (3.15)$$

com $D_x^\delta \equiv d^\delta/dx^\delta$ e $\delta \equiv \alpha + \beta + 1$. Cabe lembrar aqui que apesar de termos dito que obteríamos soluções gerais para a Eq.(3.1), o vínculo na derivada

que o uso da propriedade acima restringe a “amplitude” de nossos resultados. O emprego do que foi definido acima nos leva a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(2-\mu)(\mu+\theta)}{1-2\mu-\theta}, \\ \beta &= -\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1-2\mu-\theta}, \\ \nu &= \frac{2-\mu}{1+\mu+\theta}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

É importante notar que estes resultados recuperam aqueles obtidos em [29] para $\theta = 0$. Estes resultados nos levam a escrever a solução da seguinte forma

$$\rho(x, t) = \frac{\mathcal{N}}{\left(|\bar{k}_1|t\right)^{\frac{1+\mu+\theta}{\mu^2+2\mu\theta-\mu+\theta^2-1}}} \left[\frac{z^{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}}{(a+bz)^{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}} \right]^{\frac{1}{1-2\mu-\theta}},\tag{3.17}$$

com

$$\mathcal{N} = \left[\bar{k} \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} \right]^{\frac{1+\mu+\theta}{1-2\mu-\theta}} \text{ e } z \equiv \frac{x}{\left(|\bar{k}_1|t\right)^{\frac{1+\mu+\theta}{1+\mu^2+2\mu\theta-\mu+\theta^2}}},\tag{3.18}$$

onde b é uma constante arbitrária que será considerada, mais tarde, como ± 1 de acordo com as soluções a serem estudadas. Escolhemos $\bar{k}_2 = 0$ mas esta constante pode ser incorporada mediante uma simples mudança na origem dos tempos.

A partir destes resultados poderíamos discutir várias regiões de intervalos para os parâmetros μ e θ . Vamos ilustrar apenas duas situações: (i) $-\infty < \mu < -1 - \theta$ com $\theta \geq 0$, e (ii) $0 < \mu < 1/2$ com $0 \leq \theta < 1/2 - \mu$. Para o primeiro caso, sem perda de generalidade, vamos escolher $a = 1$ e $b = -1$. A condição de normalização

$$\mathcal{N} \int_{-1}^1 \left[\frac{z^{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}}{(1-z)^{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}} \right]^{\frac{1}{1-2\mu-\theta}} dz = 1\tag{3.19}$$

implica em

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma[1-\mu-\theta]}{2\Gamma\left[\frac{\mu^2+\mu\theta-2\theta-2\mu}{1-2\mu-\theta}\right] \Gamma\left[\frac{1-\mu+\mu^2+\theta^2+2\mu\theta}{1-2\mu-\theta}\right]}\tag{3.20}$$

(veja Fig.(3.2)).

Para a região $0 < \mu < 1/2$ e $0 \leq \theta < 1/2 - \mu$, onde $b = 1$, a condição de normalização implica que

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma\left(\frac{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}{1-2\mu-\theta}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}{1-2\mu-\theta}\right) \Gamma(\mu+\theta)}.\tag{3.21}$$

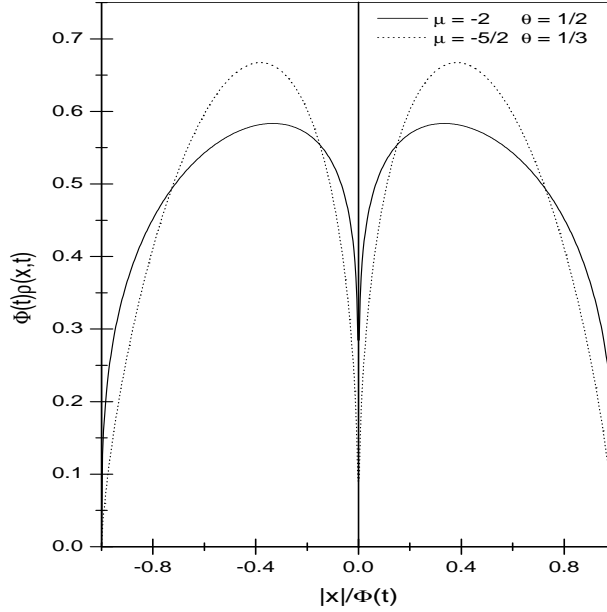


Figura 3.2: *Comportamento de $\Phi(t)\rho(x,t)$ vs. $x/\Phi(t)$, ilustra a Eq.(3.17) para valores típicos de μ e θ satisfazendo $-\infty < \mu < -1 - \theta$ e $\theta \geq 0$ com $a = 1$ e $b = -1$.*

(veja Fig.(3.3)).

Consideraremos também os casos particulares referentes à Eq.(3.14) quando $\mu = 0$ e também quando $\mu = 1$. Assim, considerando inicialmente $\mu = 0$ e ν qualquer, a Eq.(3.14) reduz-se a

$$\bar{k}z^{1+\theta}\tilde{\rho}(z) = \int_0^z d\bar{z} [\tilde{\rho}(\bar{z})]^\nu, \quad (3.22)$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\tilde{\rho}(z) \propto \frac{1}{z^{1+\theta}} \left(1 + \tilde{\mathcal{C}}z^{1-\nu(1+\theta)}\right)^{1/(1-\nu)}, \quad (3.23)$$

onde $\tilde{\mathcal{C}}$ é uma constante. Agora, considerando $\mu = 1$ na Eq.(3.14), obtemos a igualdade

$$\bar{k}z\tilde{\rho}(z) = z^{-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\nu + \bar{\mathcal{C}}, \quad (3.24)$$

que determina implicitamente $\tilde{\rho}(z)$. Considerando uma situação na qual $\bar{\mathcal{C}} = 0$ a solução pode ser escrita como $\tilde{\rho}(z) \propto z^{(1+\theta)/(\nu-1)}$.

Uma conexão entre os resultados que obtivemos aqui e as soluções que surgem da otimização da entropia de Tsallis [33] pode ser estabelecida. Estas distribuições não coincidem para um valor arbitrário de x . Porém, a

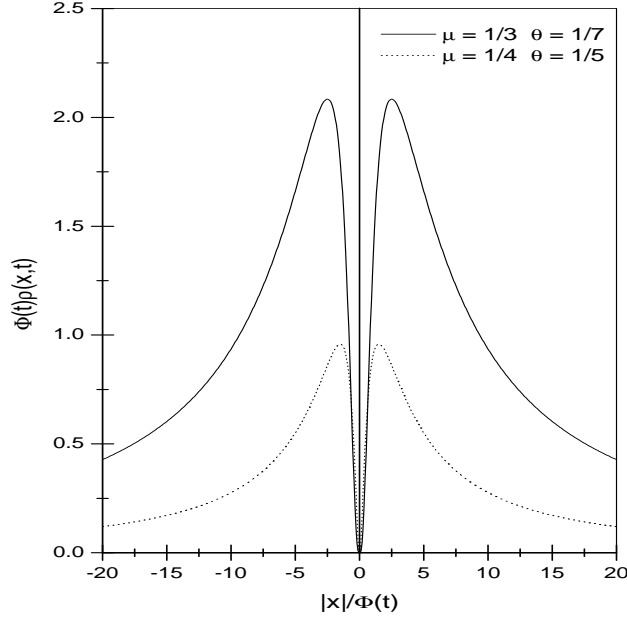


Figura 3.3: *Comportamento de $\Phi(t)\rho(x,t)$ vs. $x/\Phi(t)$, ilustra a Eq.(3.17) para valores típicos de μ e θ satisfazendo $0 < \mu < 1/2$ e $0 \leq \theta < 1/2 - \mu$, com $a = 1$ e $b = 1$.*

comparação dos comportamentos assintóticos ($|x| \rightarrow \infty$) nos permite identificar os tipos de caudas. Assim, identificando o comportamento exibido pela Eq.(3.17) com o comportamento assintótico $1/|x|^{2/(q-1)}$ que vem do problema entrópico [33], obtemos

$$q = \frac{3 + \mu + \theta}{1 + \mu + \theta} . \quad (3.25)$$

Esta relação, para $\theta = 0$, foi estabelecida em [29].

Vimos neste capítulo algumas soluções para uma equação de difusão não linear fracionária considerando algumas situações para o coeficiente de difusão e levando em conta a presença de uma força externa. Para estas soluções procuramos uma possível conexão com a mecânica estatística não extensiva. Assim como no capítulo anterior, tratamos apenas de situações unidimensionais. O próximo capítulo é dedicado ao estudo da equação de difusão linear e não linear fracionária d -dimensional.

Capítulo 4

Equação de difusão fracionária em d dimensões

Este capítulo e o subsequente são dedicados à análise de possíveis extensões dos casos que trabalhamos nos capítulos anteriores. Para estas extensões consideraremos situações d dimensionais, a presença de derivadas fracionárias e termos não lineares na mesma equação, situações que possuem anisotropias, entre outras. Nesta direção, começaremos este capítulo com a análise da equação de difusão linear que emprega derivadas fracionárias na variável temporal considerando o caso d dimensional. Em seguida, analisaremos o caso não linear. O caso anisotrópico será discutido no capítulo seguinte.

4.1 Equação de difusão linear fracionária d -dimensional

Analisaremos nesta seção uma equação de difusão fracionária em d dimensões com simetria radial, ou seja, a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(r, t) &= \int_0^t dt' \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1} \left[\mathcal{D}(r, t-t') \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t') \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{d-1} F(r) \rho(r, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Inicialmente consideraremos uma condição de contorno definida em um intervalo finito $[0, a]$, que será posteriormente estendida a uma situação semi-infinita quando fizermos $a \rightarrow \infty$. Trataremos também de casos em que o

coeficiente de difusão dependa das variáveis espaciais e temporais, além da presença de forças externas. É importante lembrar que para $\gamma = 1$ a Eq.(4.1) recupera a forma da equação de difusão usual d -dimensional com simetria radial.

Como primeira análise trataremos da equação (4.1) na ausência de força externa e com o coeficiente de difusão do tipo $\mathcal{D}(r, t) = \mathcal{D}t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$. Neste caso temos que resolver a equação

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(r, t) = \frac{\mathcal{D}}{\Gamma(\delta) r^{d-1}} \int_0^t dt' (t - t')^{\delta-1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t') \right\}. \quad (4.2)$$

Analisaremos a equação anterior levando em conta uma condição de contorno de Dirichlet, ou seja, $\rho(a, t) = 0$. Com esta condição de contorno, a solução da Eq.(4.2) fica dada por

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^a d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{\frac{2-d}{2}} r^{\frac{2-d}{2}}}{\left\{ J_{\frac{d}{2}}(\lambda_n a) \right\}^2} J_{\frac{d-2}{2}}(\lambda_n \xi) J_{\frac{d-2}{2}}(\lambda_n r) \\ &\quad \times E_{\gamma+\delta}(-\lambda_n^2 \mathcal{D} t^{\gamma+\delta}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

para $d \geq 2$. Nesta solução $J_\nu(x)$ é uma função de Bessel, λ_n pode ser obtido de

$$J_{\frac{d-2}{2}}(\lambda_n a) = 0$$

e a condição inicial é $\rho(r, 0) = \tilde{\rho}(r)$ (veja a Fig.(4.1)). Na Eq. (4.3), $\mathcal{G}(r, \xi, t)$ é, a exemplo do que vimos no segundo capítulo, a função de Green associada à condição inicial. A presença da função de Mittag-Leffler em nossa solução dá conta das alterações produzidas na função densidade de probabilidade de tempo de espera por parte do emprego da derivada fracionária e pela dependência temporal do coeficiente de difusão. Se considerarmos $\gamma + \delta = 1$ recuperamos a solução da equação de difusão usual d -dimensional com simetria radial, uma vez que, nesse caso, a função de Mittag-Leffler toma a forma da função exponencial.

Incorporamos agora uma dependência espacial ao coeficiente de difusão da forma $\mathcal{D}(r) = \mathcal{D}r^{-\theta}t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ que, como foi mencionado anteriormente, tem sido aplicada no estudo de várias situações de interesse físico, dentre as quais, além das já citadas, estão elétrons rápidos em um plasma aquecido na presença de um campo elétrico e difusão em fractais. Com esta consideração

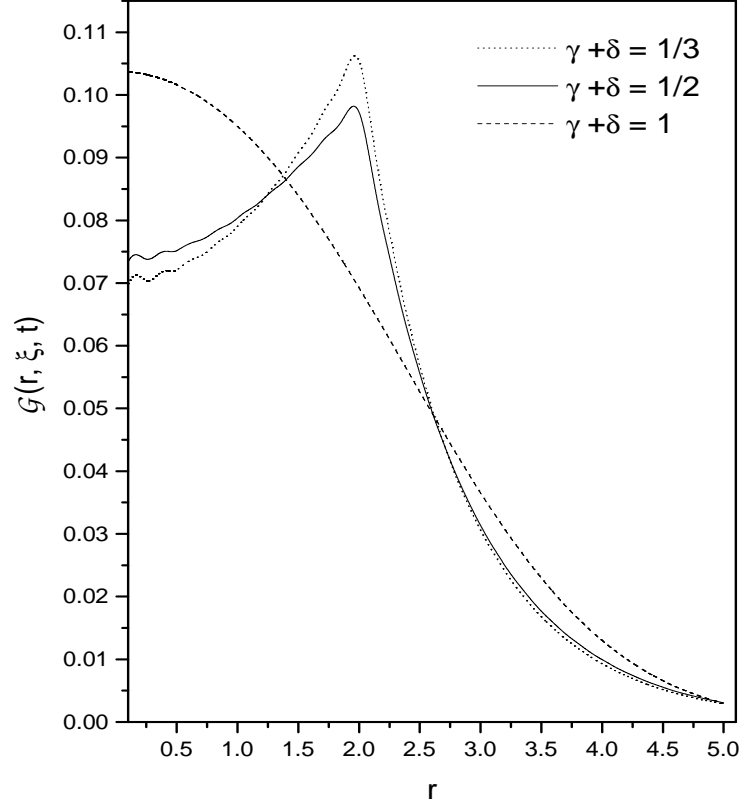


Figura 4.1: Nesta figura ilustramos o comportamento de $\mathcal{G}(r, \xi, t)$ versus r para alguns valores típicos de $\gamma + \delta$ considerando $a = 10.0$, $t = 1.0$, $\xi = 2.0$, $\mathcal{D} = 1.0$ e $d = 3$.

a equação a ser resolvida é

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(r, t) = \frac{\mathcal{D}}{\Gamma(\delta) r^{d-1}} \int_0^t dt' (t-t')^{\delta-1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1-\theta} \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t') \right\}, \quad (4.4)$$

cuja solução, aplicando-se método análogo ao do caso anterior, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^a d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2+\theta}{a^{2+\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{\frac{1}{2}(2+\theta-d)} r^{\frac{1}{2}(2+\theta-d)}}{\left\{ J_{\frac{d}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n}{2+\theta} a^{\frac{1}{2}(2+\theta)} \right) \right\}^2} E_{\gamma+\delta}(-\mathcal{D}\lambda_n^2 t^{\gamma+\delta}) \\ &\times J_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n \xi^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) J_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n r^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde novamente temos que $d \geq 2 + \theta$ e que λ_n pode ser determinado mediante

$$J_{\frac{d}{2+\theta}-1} \left(\frac{2\lambda_n}{2+\theta} a^{\frac{1}{2}(2+\theta)} \right) = 0 .$$

Para este caso vamos também considerar a situação em que temos uma condição de contorno do tipo mista, ou seja, $\partial_r \rho + \mathcal{H}\rho|_{r=a} = 0$, que é empregada no estudo de processos de condução de calor. Com esta condição de contorno a solução da Eq.(4.4) passa a ser

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^a d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2+\theta}{a^{2+\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{\frac{1}{2}(2+\theta-d)} r^{\frac{1}{2}(2+\theta-d)}}{\bar{d}_n \left\{ J_{\frac{d}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n}{2+\theta} a^{\frac{1}{2}(2+\theta)} \right) \right\}^2} E_{\gamma+\delta}(-\mathcal{D}\lambda_n^2 t^{\gamma+\delta}) \\ &\times J_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n \xi^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) J_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left(\frac{2\lambda_n r^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) , \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $\bar{d}_n = [(\lambda_n/\mathcal{H})^2 a^\theta + 1 - (d - (2 + \theta))/(\mathcal{H}a)]$. Como havíamos dito no início do capítulo, iremos estender o resultado acima para a Eq. (4.4) fazendo $a \rightarrow \infty$. Nesse sentido, faremos uso de

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^\infty dk \mathcal{C}(k, t) \Psi(r, k) \\ \Psi(r, k) &= r^{\frac{2+\theta-d}{2}} J_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left(\frac{2kr^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) , \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde devemos determinar $\mathcal{C}(k, t)$. Esta operação é o equivalente de empregarmos uma transformada integral, cujo núcleo contém uma função de Bessel, à Eq.(4.7). Substituindo a Eq.(4.7) na Eq.(4.4), obtemos

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \mathcal{C}(k, t) = -\frac{\mathcal{D}k^2}{\Gamma(\delta)} \int_0^t dt' (t-t')^{\delta-1} \mathcal{C}(k, t') . \quad (4.8)$$

A equação acima possui como solução $\mathcal{C}(k, t) = \mathcal{C}(k, 0) E_{\gamma+\delta}(-k^2 \mathcal{D}t^{\gamma+\delta})$, onde $\mathcal{C}(k, 0)$ pode ser determinado pela condição inicial. Aqui, usando uma condição inicial genérica $\rho(r, 0) = \tilde{\rho}(r)$, obtemos

$$\mathcal{C}(k, 0) = \frac{2k}{2+\theta} \int_0^\infty d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \Psi(\xi, k) . \quad (4.9)$$

Dessa forma, nossa solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^\infty d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2}{2+\theta} \int_0^\infty dk k \Psi(\xi, k) \Psi(r, k) E_{\gamma+\delta}(-k^2 \mathcal{D}t^{\gamma+\delta}) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como caso particular vamos considerar, por simplicidade, $\gamma + \delta = 1$. Com esta condição podemos simplificar a Eq.(4.10) mediante o emprego da identidade

$$\int_0^\infty dk k J_\nu(\alpha k) J_\nu(\beta k) e^{-a^2 k^2} = \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{\beta^2 + \alpha^2}{4a^2}} I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2a^2}\right). \quad (4.11)$$

Desta forma, aplicando a Eq.(4.11) na Eq.(4.10) obtemos

$$\mathcal{G}(r, \xi, t) = \frac{e^{-\frac{r^{2+\theta} + \xi^{2+\theta}}{(2+\theta)^2 \mathcal{D}t}}}{(2+\theta)(\xi r)^{\frac{d-2-\theta}{2}} \mathcal{D}t} I_{\frac{d-2-\theta}{2+\theta}} \left[\frac{2(\xi r)^{\frac{2+\theta}{2}}}{(2+\theta)^2 \mathcal{D}t} \right], \quad (4.12)$$

onde $I_\nu(x)$ é uma função de Bessel modificada.

Consideramos agora a presença do termo de força externa $F(r) = \mathcal{K}r^\epsilon$ com $\epsilon = -1 - \theta$ na Eq.(4.1). Além disso vamos utilizar com um coeficiente de difusão dado por $\mathcal{D}(r, t) = \mathcal{D}r^{-\theta}\delta(t)$. Assim como no caso livre, esta situação não apresenta solução estacionária. Com estas considerações temos que resolver a equação

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(r, t) = \frac{\mathcal{D}}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1-\theta} \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t) \right\} - \frac{\mathcal{K}}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1+\epsilon} \rho(r, t) \right\}. \quad (4.13)$$

Seguindo o procedimento efetuado para o caso livre, trataremos inicialmente desta situação procurando por uma solução no intervalo $[0, a]$ e em seguida faremos a extensão para o caso semi-infinito. Dessa forma, com $\rho(a, t) = 0$, obtemos a solução

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \int_0^a d\xi \xi^{d-1-\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{D}}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2+\theta}{a^{2+\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{\frac{1}{2}(2+\theta-d) + \frac{\mathcal{K}}{2\mathcal{D}}} r^{\frac{1}{2}(2+\theta-d) + \frac{\mathcal{K}}{2\mathcal{D}}}}{\left\{ J_{\bar{\nu}+1} \left(\frac{2\lambda_n}{2+\theta} a^{\frac{1}{2}(2+\theta)} \right) \right\}^2} E_\gamma(-\mathcal{D}\lambda_n^2 t^\gamma) \\ &\times J_{\bar{\nu}} \left(\frac{2\lambda_n \xi^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) J_{\bar{\nu}} \left(\frac{2\lambda_n r^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $\bar{\nu} = 2\sqrt{\bar{k} + k'^2}/(2+\theta)$, $\bar{k} = [d - (2+\theta)]\mathcal{K}/\mathcal{D}$ e $k' = [d - (2+\theta) - \mathcal{K}/\mathcal{D}]/2$. O autovalor λ_n pode ser obtido da equação $J_{\bar{\nu}} \left(\frac{2\lambda_n}{2+\theta} a^{\frac{2+\theta}{2}} \right) = 0$.

Conforme havíamos dito, faremos a extensão para o caso semi-infinito, fazendo $a \rightarrow \infty$. Fazendo uso de método análogo ao do caso livre, utilizando agora

$$\bar{\Psi}(r, k) = r^{\frac{1}{2}(2+\theta-d) + \frac{\mathcal{K}}{2\mathcal{D}}} J_{\bar{\nu}} \left(\frac{2kr^{\frac{2+\theta}{2}}}{2+\theta} \right), \quad (4.15)$$

e considerando uma condição inicial genérica $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$, obtemos a solução

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \int_0^\infty d\xi \xi^{d-1-\frac{\kappa}{\mathcal{D}}} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= \frac{2}{2+\theta} \int_0^\infty dk k \bar{\Psi}(\xi, k) \bar{\Psi}(r, k) E_\gamma(-k^2 \mathcal{D} t^\gamma). \quad (4.16)\end{aligned}$$

Podemos também analisar a solução proveniente da Eq.(4.1) quando da presença de uma força externa do tipo $F(r) = -kr + \mathcal{K}r^\epsilon$, com $\epsilon = -1 - \theta$. Esta força externa pode fornecer uma solução estacionária, dependendo da escolha de ϵ . Para obter nossa solução vamos considerá-la como uma expansão de suas autofunções, ou seja, vamos empregar

$$\rho(r, t) = r^{\frac{\kappa}{\mathcal{D}}} e^{-\frac{kr^{2+\theta}}{(2+\theta)\mathcal{D}}} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r) \Phi_n(t). \quad (4.17)$$

Após a determinação de $\Psi_n(r)$ e $\Phi_n(t)$ e considerando $\rho(x, 0) = \tilde{\rho}(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \int_0^\infty d\xi \xi^{d-1} \tilde{\rho}(\xi) \mathcal{G}(r, \xi, t) \\ \mathcal{G}(r, \xi, t) &= r^{\frac{\kappa}{\mathcal{D}}} e^{-\frac{kr^{2+\theta}}{(2+\theta)\mathcal{D}}} \left(\frac{k}{(2+\theta)\mathcal{D}} \right)^{\frac{\kappa+d\mathcal{D}}{(2+\theta)\mathcal{D}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+\theta)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\kappa+d\mathcal{D}}{(2+\theta)\mathcal{D}} + n\right)} E_\gamma(-\lambda_n t^\gamma) \\ &\times L_n^{(\alpha)}\left(\frac{kr^{2+\theta}}{(2+\theta)\mathcal{D}}\right) L_n^{(\alpha)}\left(\frac{k\xi^{2+\theta}}{(2+\theta)\mathcal{D}}\right), \quad (4.18)\end{aligned}$$

onde $\alpha = \{(\mathcal{K} + d\mathcal{D}) / [(2 + \theta)\mathcal{D}]\} - 1$, e $L_n^{(\alpha)}(x)$ são os polinômios de Laguerre associados com $\lambda_n = (2 + \theta)nk$. Com este resultado encerramos a discussão do caso linear. Veremos na seção que segue situações onde a densidade de probabilidade $\rho(r, t)$ apresenta, na equação de difusão, comportamento não-linear.

4.2 Equação de difusão não-linear fracionária d -dimensional

Nesta seção, discutiremos algumas soluções da equação de difusão não linear d -dimensional com a presença de derivadas fracionárias na variável espacial. Particularmente, será foco de nossa discussão a equação:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) &= \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial^{\mu'}}{\partial r^{\mu'}} \left\{ r^{d-1} \mathcal{D}(r, t; \rho) \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} [r^{-\eta} \rho(r, t)^\nu] \right\} \\ &- \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{d-1} F(r, t) \rho(r, t) \right\} + \bar{\alpha}(t) \rho(r, t), \quad (4.19)\end{aligned}$$

onde consideraremos o coeficiente de difusão $\mathcal{D}(r, t, \rho) = \tilde{\mathcal{D}}(t)r^{-\theta}\rho^\gamma$, $\bar{\alpha}(t)$ representará um possível termo de fonte ou sorvedouro e $F(r, t)$ representa uma força externa atuando sobre o sistema a qual consideraremos dada por $F(r, t) = -k(t)r$. É importante notar a presença do termo $r^{-\eta}$ na segunda derivada espacial, cujo emprego na Eq.(4.19) generaliza vários casos recentemente estudados em [34]. Nossa análise da Eq.(4.19), assim como as anteriormente realizadas, é restrita às soluções que possam ser expressas como funções escaladas do tipo

$$\bar{\rho}(r, t) = \frac{1}{\Phi(t)}\tilde{\rho}\left[\frac{r}{\Phi(t)}\right]. \quad (4.20)$$

Assim, começaremos nossa investigação sobre as soluções da Eq.(4.19) considerando a mudança de variáveis $\rho(r, t) = e^{\int_0^t d\tilde{\alpha}(\tilde{t})} \bar{\rho}(r, t) / r^{d-1}$ onde $\bar{\rho}(r, t)$ é a função a ser determinada. Aplicando esta mudança na Eq.(4.19) e considerando inicialmente a ausência de força externa, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho}(r, t) = \bar{\mathcal{D}}(t)\frac{\partial^{\mu'}}{\partial r^{\mu'}}\left\{r^{(1-\gamma)(d-1)-\theta}[\bar{\rho}(r, t)]^\gamma\frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\{r^{-\eta-\nu(d-1)}[\bar{\rho}(r, t)]^\nu\}\right\} \quad (4.21)$$

com $\bar{\mathcal{D}}(t) = e^{(\nu+\gamma-1)\int_0^t d\tilde{\alpha}(\tilde{t})}\tilde{\mathcal{D}}(t)$. Agora, empregando a Eq.(4.20) na Eq.(4.19) e utilizando $z = r/\Phi(t)$, obtemos um conjunto de duas equações como segue:

$$\frac{d^{\mu'}}{dz^{\mu'}}\left\{z^{(1-\gamma)(d-1)-\theta}[\tilde{\rho}(z)]^\gamma\frac{d^\mu}{dz^\mu}\{z^{m-\nu(d-1)}[\tilde{\rho}(z)]\}\right\} = \bar{k}\frac{d}{dz}[z\tilde{\rho}(z)^\nu] \quad (4.22)$$

e

$$\dot{\Phi}(t) = -\bar{\mathcal{D}}(t)\bar{k}[\Phi(t)]^{2-\xi}, \quad (4.23)$$

onde $\xi = (d-1)(\gamma+\nu-1) + \theta + \gamma + \nu - m + \mu + \mu'$ e \bar{k} é uma constante arbitrária de separação.

A solução para a função relacionada com a variável temporal, i.e., $\Phi(t)$, é dada por

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(0))^{\xi-1} + (1-\xi)\bar{k}\int_0^t \bar{\mathcal{D}}(t')dt'\right]^{\frac{1}{\xi-1}}. \quad (4.24)$$

Por sua vez, a presença de uma força externa linear, conforme mencionado anteriormente, somente produz mudanças no comportamento temporal da nossa solução. De fato, se tivéssemos considerado a presença de $F(r, t) = -k(t)r$ a única mudança ocorreria na Eq.(4.23) que passaria a ser dada por

$$\dot{\Phi}(t) = -\bar{k}\bar{\mathcal{D}}(t)[\Phi(t)]^{2-\xi} - k(t)\Phi(t) \quad (4.25)$$

cuja solução é dada por

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(0))^{\xi-1} + (1-\xi)\bar{k} \int_0^t d\tilde{t} \bar{\mathcal{D}}(\tilde{t}) e^{(\xi-1) \int_0^{\tilde{t}} dt' k(t')} \right]^{\frac{1}{\xi-1}} e^{-\int_0^t dt' k(t')} \quad (4.26)$$

Seguindo nossa análise com relação às soluções da Eq.(4.19), vamos efetuar uma integração na Eq.(4.22) com o intuito de simplificar nossa análise. Assim, a equação a ser resolvida é

$$\frac{d^{\mu'-1}}{dz^{\mu'-1}} \left\{ z^{(d-1)(1-\gamma)-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\gamma \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left[z^{-\eta-(d-1)\nu} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right] \right\} = \bar{k} z \tilde{\rho}(z) + \mathcal{C} . \quad (4.27)$$

A partir da Eq.(4.27) várias situações podem ser discutidas dependendo dos valores dos parâmetros envolvidos. Em especial, cabe ressaltar que podemos obter soluções com comportamento de cauda longa ou de forma compacta. Por simplicidade, inicialmente apresentamos o desenvolvimento para o caso onde $\mu' = 1$ e depois para o caso $\mu' \neq 1$. Esta consideração, $\mu = 1$, implica em

$$z^{(d-1)(1-\gamma)-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\gamma \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left[z^{-\eta-(d-1)\nu} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right] = \bar{k} z \tilde{\rho}(z) \quad (4.28)$$

onde, sem perda de generalidade, escolhemos $\mathcal{C} = 0$. Para este caso propomos o “ansatz” $\tilde{\rho}(z) = \mathcal{N} z^{\frac{\alpha}{\nu}} (a + bz)^{\frac{\beta}{\nu}}$ como uma solução para a equação acima. Este “ansatz” é muito apropriado porque podemos utilizar novamente a Eq.(3.15). Mediante o emprego da solução proposta junto com a Eq.(3.15) na Eq.(4.28), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\nu} &= \frac{(\theta + \mu + \eta + 1)(2 + \mu + \theta)}{(\gamma - 1)(\theta + 2\mu + \eta + 1)} + d - 1 , \\ \frac{\beta}{\nu} &= \frac{\mu(2 + \theta + \mu)}{(\gamma - 1)(\theta + \eta + 1 + 2\mu)} , \\ \nu &= \frac{(1 - \gamma)(1 - \eta - \mu)}{(2 + \mu + \theta)} , \end{aligned} \quad (4.29)$$

e \mathcal{N} , bem como \bar{k} , são definidos pela condição de normalização. A partir desses resultados podemos escrever a solução para este caso como

$$\tilde{\rho}(z) = \mathcal{N} z^{d-1} \left[z^{\theta+\mu+1+\eta} (a + bz)^\mu \right]^{\frac{2+\mu+\theta}{(\gamma-1)(\theta+2\mu+\eta+1)}} , \quad (4.30)$$

onde b é uma constante que deve ser considerada como ± 1 dependendo da situação a ser analisada. Note que uma escolha para $b = -1$ implica uma distribuição com forma compacta, enquanto que para $b = 1$ a solução cobre todo o espaço. Em particular, para o último caso podemos relacionar as

soluções encontradas com as distribuições que emergem do formalismo de Tsallis quando consideramos grandes argumentos. Com as distribuições de Lévy tal relação também é possível.

Aplicando o mesmo procedimento, estenderemos agora estas soluções para o caso mais geral onde $\mu' \neq 1$. Dessa forma, a equação a ser resolvida agora é

$$\frac{d^{\mu'-1}}{dz^{\mu'-1}} \left\{ z^{(d-1)(1-\gamma)-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\gamma \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left[z^{m-(d-1)\nu} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right] \right\} = \bar{k} z \tilde{\rho}(z), \quad (4.31)$$

onde novamente nós escolhemos $\mathcal{C} = 0$. Assim, usando o mesmo “ansatz” e a Eq.(3.15) na Eq.(4.31) obtemos como solução

$$\tilde{\rho}(z) = \bar{\mathcal{N}} z^{d-1} \left[z^{\theta-m+\mu+\mu'} (1+bz)^{\mu+\mu'-1} \right]^{\frac{\theta+2\mu'+\mu}{(1-\gamma)(1-\theta-\eta-2(\mu+\mu'))}}, \quad (4.32)$$

onde $\gamma = (d + \theta - \mu' - \mu)/(\mu' + d)$, $\bar{\mathcal{N}}$ e \bar{k} são definidos pela condição de normalização e de forma análoga ao caso anterior $b = \pm 1$ dependendo dos valores dos parâmetros presentes na equação (veja Fig.(4.2)). Desta forma, para este caso também temos soluções compactas ou que se distribuem ao longo de todo eixo dos x .

É também importante discutirmos alguns casos particulares da Eq.(4.31) com o intuito de aumentarmos as possibilidades de aplicação, visto que, embora tenhamos considerado μ e μ' arbitrários, estes estão vinculados à propriedade (3.15). Em particular, vamos investigar as soluções para três casos particulares: (i) $\mu = \mu' = 1$, (ii) $\mu' = 1$ e $\mu = -1$ e (iii) $\mu' = 2$ e $\mu = 0$. Em todos estes casos, vamos considerar $\bar{k} = -k'$ para obtermos soluções fisicamente aceitáveis e estas serão dadas em termos da função q -exponencial, cuja definição foi feita no capítulo anterior. Então, substituindo as condições requeridas para o primeiro caso, a Eq.(4.31) fica reduzida a

$$z^{(d-1)(1-\gamma)-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\gamma \frac{d}{dz} \left[z^{-\eta-(d-1)\nu} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right] = -k' z \tilde{\rho}(z). \quad (4.33)$$

A solução para esta equação é

$$\tilde{\rho}(z) = z^{d-1+\frac{\eta}{\nu}} \exp_q \left[-\mathcal{K} z^{2+\theta+\frac{\eta}{\nu}} \right], \quad (4.34)$$

com $\mathcal{K} = k'/[\nu(2 + \theta) + \eta/\nu]$. Para o segundo caso obtemos

$$z^{(d-1)(1-\gamma)-\theta} [\tilde{\rho}(z)]^\gamma \int_0^z dz z^{-\eta-(d-1)\nu} [\tilde{\rho}(z)]^\nu = -k' z \tilde{\rho}(z), \quad (4.35)$$

cujas soluções é dada por

$$\tilde{\rho}(z) = z^{d-1+\frac{\theta+1}{\gamma-1}} \exp_q \left[-z^{1-\eta+\frac{(\theta+1)}{\gamma-1}\nu} / \mathcal{K} \right], \quad (4.36)$$

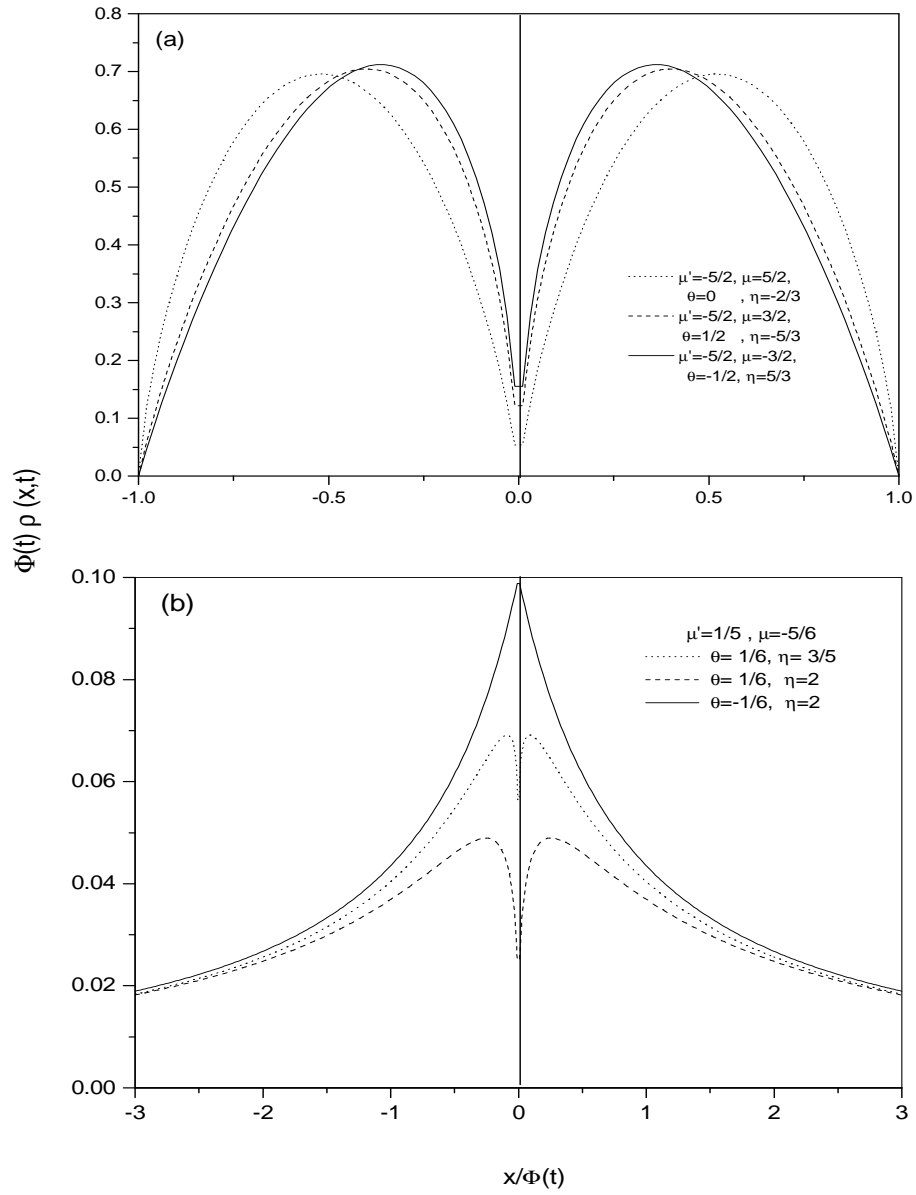


Figura 4.2: Comportamento da Eq.(4.32) vs. $x/\Phi(t)$ para o caso unidimensional considerando alguns valores típicos de μ, μ', θ e η . Note que dependendo da escolha particular desses parâmetros podemos ter um comportamento compacto (a) ($b = -1$) ou um comportamento de cauda longa (b) ($b = 1$).

com $\mathcal{K} = k'[(1 - \gamma)(1 + m) - \nu(\theta + 1)]$ e $q = \nu + \gamma$. Já para o terceiro caso em que $\mu' = 2$ e $\mu = 0$ a Eq.(4.31) fica

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{(d-1)(1-\gamma-\nu)-\theta-\eta} [\tilde{\rho}(z)]^{\gamma+\nu} \right\} = -k' z \tilde{\rho}(z), \quad (4.37)$$

para a qual a solução, novamente em termos da função q -exponencial, é dada por

$$\tilde{\rho}(z) = z^{d-1+\frac{\eta+\theta-(d-1)}{\gamma+\nu}} \exp_q \left[-\mathcal{K} z^{2+(d-1)\frac{\gamma+\nu-1}{\gamma+\nu}} \right], \quad (4.38)$$

com $\mathcal{K} = k'/[(d-1)(\gamma+\nu-1) + 2(\gamma+\nu)]$ e $q = 2 - \nu - \gamma$. As soluções encontradas para estes casos particulares podem exibir um comportamento de cauda longa ou curta dependendo da escolha dos parâmetros ν , γ , θ e η .

Com estes casos particulares finalizamos o quarto capítulo. Escrevemos soluções para algumas equações de difusão que foram estendidas para englobarem situações d -dimensionais, com destaque para a presença do termo $r^{-\eta}$ na Eq.(4.19) e para a possibilidade de escrevermos algumas soluções em termos da função q -exponencial. A seguir concluiremos nosso trabalho considerando uma situação anisotrópica.

Capítulo 5

Equação de difusão fracionária anisotrópica

Os capítulos precedentes trataram de equações de difusão que foram entendidas com o emprego de derivadas fracionárias, com a presença de coeficientes de difusão com dependência espacial e temporal e com a presença de forças externas, além das situações d -dimensionais com simetrias radiais. Apesar de retratarem situações gerais, os casos com os quais temos trabalhado até o presente momento são representativos de situações onde considera-se um meio isotrópico. Assim, com o intuito de aplicarmos o formalismo de equações diferenciais a uma situação que também englobe a presença de anisotropias, ou seja, a variação dos parâmetros conforme a direção sob análise, vamos buscar soluções para a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) &= \sum_{i,j=1}^d \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t-t') \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\bar{x}, t')] \right\} \\ &- \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i(\bar{x}) \rho(\bar{x}, t)] \quad , \end{aligned} \quad (5.1)$$

com $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $F_i(\bar{x})$ é uma força externa e $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}; t)$ são os coeficientes de difusão. A exemplo do que temos feito em todo o texto utilizaremos o operador de Caputo para a derivada temporal. Além disso, empregaremos a condição de contorno $\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}, t) \rightarrow 0$. Para este caso pode-se também demonstrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^d dx_i \rho(\bar{x}, t)$ é independente do tempo, de modo que, se $\rho(\bar{x}, t)$ está normalizado em $t = 0$, assim permanecerá para qualquer tempo futuro. Assim como fizemos nos capítulos anteriores, podemos escrever a Eq.(5.1) como $\partial_t^\gamma \rho(\bar{x}, t) = -\nabla \cdot \mathcal{J}$ e utilizar a condição de contorno

$\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\bar{x}, t) = 0$ para demonstrar esta afirmação. Investigaremos, conforme mencionado acima, as soluções da Eq.(5.1) para o caso d -dimensional, considerando inicialmente um coeficiente de difusão dependente do tempo na forma $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i \delta_{ij} t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$. Em seguida estenderemos este coeficiente incorporando também uma dependência espacial a ele, de modo que empregaremos $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i \delta_{ij} t^{\alpha-1} |x_i|^{-\theta_i} / \Gamma(\alpha)$. Ambos os casos são resolvidos na ausência de força externa. Obteremos também solução quando da presença de uma força externa do tipo $F_i(\bar{x}) = (2 + \theta_i)(\mathcal{K}_i/x_i)|x_i|^{-\theta_i}$. Neste caso empregaremos $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \delta_{ij} \delta(t)$. As soluções para estes casos são expressas em termos das funções H de Fox. A presença do termo de força externa $F_i(\bar{x}) = -k_i x_i + (\mathcal{K}_i/x_i)|x_i|^{-\theta_i}$ assim como a de uma fonte absorvente na Eq.(5.1) são também consideradas.

5.1 Equação de difusão fracionária anisotrópica: soluções

Iniciaremos considerando o caso caracterizado pelo coeficiente de difusão $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i(t) \delta_{ij}$ na ausência de força externa. Para este caso a Eq.(1.1) fica dada por

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^d \int_0^t dt' \mathcal{D}_i(t-t') \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \rho(\bar{x}, t') . \quad (5.2)$$

Esta equação, embora seja um caso particular da Eq.(5.1), pode ser usada na investigação de uma grande variedade de cenários. Em particular, por uma escolha apropriada do núcleo presente na integral, uma limitação bem conhecida da descrição de processos difusivos com a equação de difusão, i.e., a velocidade infinita de propagação da informação inerente a uma equação parabólica, pode ser evitada. Antes de analisarmos as soluções para a equação acima, vamos estudar o segundo momento $\langle x_i^2 \rangle$ para esta equação. Tal análise é importante, pois o segundo momento traz informação sobre como a solução escala com o tempo e como ocorre o espalhamento da solução da Eq.(5.2). Após alguns cálculos é possível mostrar que

$$\langle x_i^2 \rangle = \frac{2}{\Gamma(1 + \gamma)} \int_0^t dt' (t-t')^\gamma \mathcal{D}_i(t') . \quad (5.3)$$

Esta equação mostra que os momentos para a equação acima não são acoplados, indicando que o espalhamento da solução da Eq.(5.2) ocorre de forma

independente para cada direção. Situação similar ocorre para o caso usual. Entretanto, como discutiremos em breve, a solução da Eq.(5.2) tem todas as direções acopladas quando consideramos as variáveis espaciais, diferindo do caso usual. Note que empregando $\mathcal{D}_i(t) = \mathcal{D}_i\delta(t)$ na equação acima recuperamos o caso unidimensional analisado em [8] e para $\gamma = 1$ com $\mathcal{D}_i(t) = \mathcal{D}_i\delta(t)$ temos a situação usual.

Para investigar as soluções da Eq.(5.2), aplicamos uma transformada de Laplace a esta equação com o intuito de reduzi-la a

$$s^\gamma \rho(\bar{x}, s) - s^{\gamma-1} \rho(\bar{x}, 0) = \sum_{i=1}^d \mathcal{D}_i(s) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \rho(\bar{x}, s) . \quad (5.4)$$

A solução para a Eq.(5.4) é

$$\rho(\bar{x}, s) = \frac{s^{\frac{\gamma}{4}(2+d)-1}}{(2\pi \bar{\mathcal{D}}_{1\dots d}(s))^{\frac{d}{2}}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{\mathcal{D}_i(s)} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{d}{4}} K_{\frac{d}{2}-1} \left[s^{\frac{\gamma}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{\mathcal{D}_i(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5.5)$$

para a condição inicial $\rho(\bar{x}, 0) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i)$, onde $\bar{\mathcal{D}}_{1\dots d}(s) = \prod_{i=1}^d [\mathcal{D}_i(s)]^{\frac{1}{d}}$ e $K_\nu(x)$ é uma função de Bessel modificada. Obter a transformada inversa de Laplace da Eq.(5.5) para um coeficiente de difusão genérico é uma tarefa nada fácil. Entretanto, para algumas situações é possível obter a transformada inversa como, por exemplo, no caso em que $\mathcal{D}_i(s) = \mathcal{D}_i s^{-\alpha}$. Note que a transformada inversa é a dependência inicialmente proposta ($\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i \delta_{ij} t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$). Para esta situação obtemos a solução

$$\rho(\bar{x}, t) = \frac{1}{(4\pi \bar{\mathcal{D}}_{1\dots d} t^{\alpha+\gamma})^{\frac{d}{2}}} \mathbf{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{4\mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha}} \middle| \begin{matrix} (1-\frac{d}{2}(\gamma+\alpha), \gamma+\alpha) \\ (1-\frac{d}{2}, 1) \quad (0,1) \end{matrix} \right] , \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right]$ é, como vimos, a função H de Fox. Da Eq.(5.6) podemos verificar um espalhamento anômalo, o que também fica evidente na forma do segundo momento para este caso, i.e., $\langle x_i^2 \rangle \propto t^{\gamma+\alpha}$, com $\gamma + \alpha < 1, = 1$ ou > 1 , caracterizando processos sub, normal ou superdifusivo respectivamente.

Faremos agora uma extensão do resultado anterior mediante o emprego de um coeficiente de difusão com dependência espacial na forma $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i t^{\alpha-1} \delta_{ij} |x_i|^{-\theta_i} / \Gamma(\alpha)$. Para este caso a Eq.(5.1) fica dada por

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^d \int_0^t dt' (t-t')^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[|x_i|^{-\theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\bar{x}, t') \right] . \quad (5.7)$$

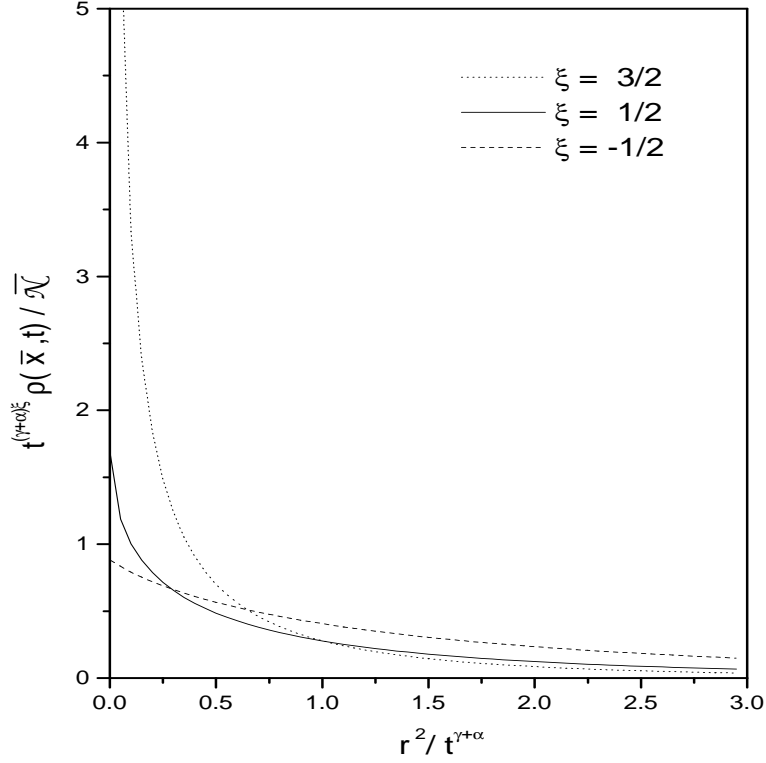


Figura 5.1: Comportamento de $t^{(\gamma+\alpha)\xi}\rho(\bar{x}, t)/\bar{\mathcal{N}}$ vs. $r^2/t^{\gamma+\alpha}$ para valores típicos de ξ considerando $\gamma + \alpha = 1/3$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} |x_i|^{2+\theta_i}/(4\mathcal{D}_i)$ e $\bar{\mathcal{N}} = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (2 + \theta_i) / [2((2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i}\right)]$.

Utilizando o procedimento anterior, obtemos a solução

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) &= \prod_{i=1}^d \frac{2 + \theta_i}{2\Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i}\right)} \\ &\times \left(\frac{1}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha}} \right)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \mathbb{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{4\mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha}} \left| \begin{matrix} (1-\xi(\gamma+\alpha), \gamma+\alpha) \\ (1-\xi, 1) \quad (0, 1) \end{matrix} \right. \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $\xi = \sum_{i=1}^d 1/(2 + \theta_i)$ (ver Figs.(5.1) e (5.2)).

A Eq.(5.8) estende os resultados apresentados em [35] com a consideração da presença de anisotropia e uma dependência temporal no coeficiente de difusão, e os resultados apresentados em [36] para o caso bidimensional. É importante notar que a solução dada pela Eq.(5.8) pode manifestar um comportamento anômalo na origem dependendo da dimensão d e dos parâmetros θ_i em consideração. De fato, a Eq.(5.8) pode ser, perto da origem, desenvolvida em termos da série da Função H de Fox, resultando em $\rho(\bar{x}, t) \sim r^{-2(\xi-1)}/t^{(\gamma+\alpha)\xi}$ para $\xi > 1$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^d |x_i|^{2+\theta_i}/[(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^\gamma]$, que apresenta um comportamento divergente na origem ($r = 0$).

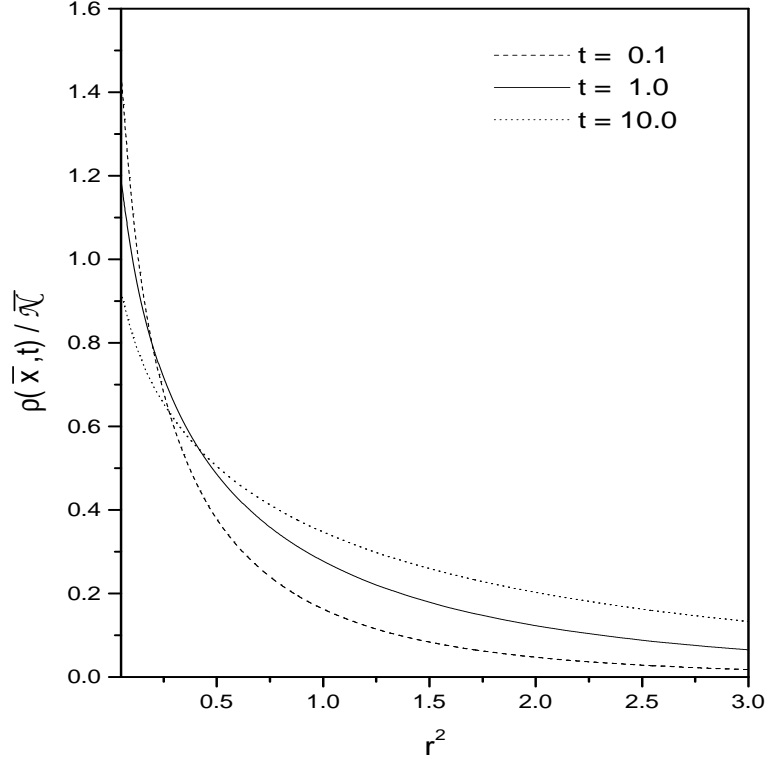


Figura 5.2: Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)/\bar{\mathcal{N}}$ vs. r^2 para valores típicos de t considerando $\gamma + \alpha = 1/3$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} |x_i|^{2+\theta_i}/(4\mathcal{D}_i)$, $\xi = 1/2$ e $\bar{\mathcal{N}} = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (2 + \theta_i) / \left[2 \left((2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i \right)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \Gamma \left(\frac{1}{2+\theta_i} \right) \right]$.

Outro caso interessante aparece quando incorporamos a condição de contorno $\lim_{|\bar{x}| \rightarrow 0} \rho(\bar{x}, t) = 0$ à análise anterior. Neste caso a solução para a Eq.(5.7) sujeita à condição inicial $\rho(\bar{x}, 0) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i - \xi_i)$ é dada por

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) &= \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{2(x_i \xi_i)^{\frac{1+\theta_i}{2}}}{2 + \theta_i} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} dk_i k_i J_{\frac{1+\theta_i}{2+\theta_i}} \left(\frac{2k_i \xi_i^{\frac{2+\theta_i}{2}}}{2 + \theta_i} \right) \\ &\times J_{\frac{1+\theta_i}{2+\theta_i}} \left(\frac{2k_i x_i^{\frac{2+\theta_i}{2}}}{2 + \theta_i} \right) E_{\gamma+\alpha} \left(- \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i^2 \mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

(ver Fig.(5.3)).

Para o caso particular $\gamma + \alpha = 1$ a equação acima pode ser escrita como

$$\rho(\bar{x}, t) = \prod_{i=1}^d \frac{(\xi_i x_i)^{\frac{1+\theta_i}{2}}}{(2 + \theta_i) \mathcal{D}_i t} e^{-\frac{x_i^{2+\theta_i} + \xi_i^{2+\theta_i}}{(2+\theta_i)^2 \mathcal{D}_i t}} I_{\frac{1+\theta_i}{2+\theta_i}} \left[\frac{2(\xi_i x_i)^{\frac{2+\theta_i}{2}}}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t} \right], \quad (5.10)$$

onde $I_\nu(x)$ é uma função modificada de Bessel. Podemos também incorporar a força externa $F_i(\bar{x}) = (2 + \theta_i)(\mathcal{K}_i/x_i)|x_i|^{-\theta_i}$ na Eq.(1.1) e considerar o coeficiente de difusão $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \delta(t) \delta_{ij}$. O potencial relacionado a esta

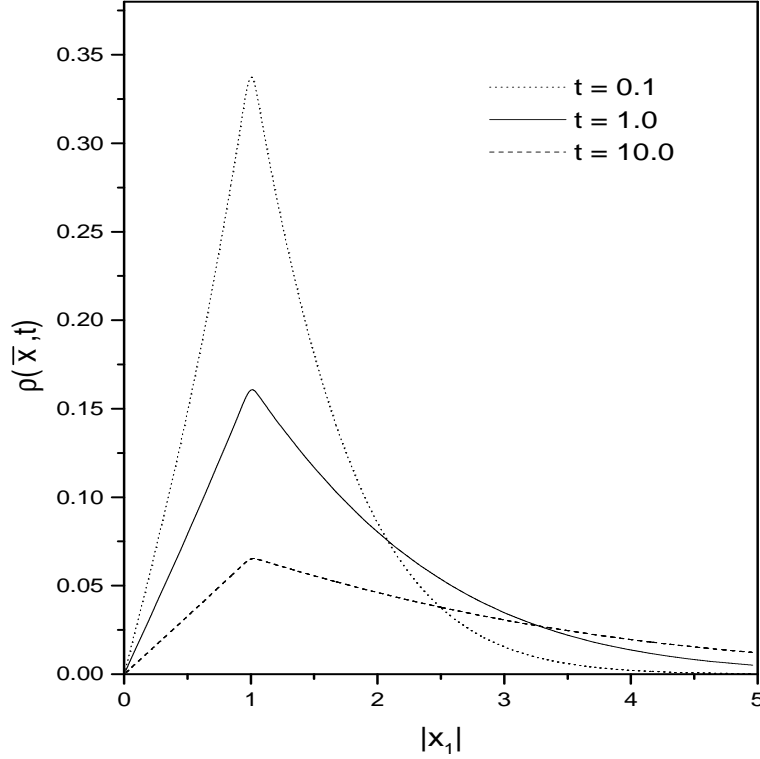


Figura 5.3: Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $|x_1|$ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.9), $\gamma = 1/2$, $\theta_1 = 0$, $\xi_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$.

força externa estende o potencial logarítmico utilizado, por exemplo, para estabelecer a conexão entre o coeficiente de difusão fracionário e a mobilidade generalizada [37]. Após estas considerações a equação a ser resolvida é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\bar{x}, t) \right\} \\ &- \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(2 + \theta_i) \frac{\mathcal{K}_i}{x_i} |x_i|^{-\theta_i} \rho(\bar{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Esta equação não possui soluções estacionárias, o que pode ser verificado a partir do segundo momento $\langle x_i^2 \rangle \sim t^{\gamma/(2+\theta_i)}$ que implica em $\rho(\bar{x}, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A solução para a Eq.(1.11) é dada por

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) &= \prod_{i=1}^d \frac{2 + \theta_i}{2\Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i} + \frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}\right)} \left(\frac{1}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^\gamma} \right)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \left(\frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^\gamma} \right)^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} \\ &\times \mathbb{H}_{1,2}^{2,0} \left[\sum_{i=1}^N \frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{4\mathcal{D}_i t^\gamma} \middle| \begin{matrix} (1-\gamma\Delta, \gamma) \\ (1-\Delta, 1) \end{matrix} \right]_{(0,1)}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^d \mathcal{K}_i/\mathcal{D}_i + \xi$. O comportamento assintótico para a equação acima é

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) \sim & \prod_{i=1}^d \frac{2 + \theta_i}{2\Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i} + \frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}\right)} \left(\frac{1}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^\gamma}\right)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \left(\frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^\gamma}\right)^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} \\ & \times \left(\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{4\mathcal{D}_i t^\gamma}\right)^{\frac{(\gamma-1)\Delta}{2-\gamma}} \exp\left[(\gamma - 2)\gamma^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{4\mathcal{D}_i t^\gamma}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}}\right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Outro caso interessante é aquele no qual consideramos a presença da força externa $F_i(\bar{x}) = -k_i x_i + (\mathcal{K}_i/x_i)|x_i|^{-\theta_i}$ que é derivada de um potencial que contém um termo quadrático e de lei de potência. Para esta força externa a equação de difusão fica dada por

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\bar{x}, t) + \left(k_i x_i - \frac{\mathcal{K}_i}{x_i} |x_i|^{-\theta_i}\right) \rho(\bar{x}, t) \right\} \quad (5.14)$$

Para resolver esta equação vamos considerar que a solução possa ser escrita como

$$\rho(\bar{x}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \Psi_{n_1 \dots n_d}(\bar{x}) \phi_{n_1 \dots n_d}(t) \quad (5.15)$$

onde $\Psi_{n_1 \dots n_d}(\bar{x})$ é a autofunção a ser encontrada e $\phi_{n_1 \dots n_d}(t)$ é uma função dependente do tempo. Substituindo a equação acima na Eq.(5.14) obtemos

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \phi_{n_1 \dots n_d}(t) = -\lambda_{n_1 \dots n_d} \phi_{n_1 \dots n_d}(t) \quad (5.16)$$

e

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(\bar{x}) + \left(k_i x_i - \frac{\mathcal{K}_i}{x_i} |x_i|^{-\theta_i}\right) \Psi(\bar{x}) \right\} = -\lambda_{n_1 \dots n_d} \Psi(\bar{x}). \quad (5.17)$$

A solução para a Eq.(5.16) é dada em termos da função de Mittag-Leffler, a saber

$$\phi_{n_1 \dots n_d}(t) = \phi_{n_1 \dots n_d}(0) E_\gamma(-\lambda_{n_1 \dots n_d} t^\gamma) \quad (5.18)$$

com $\lambda_{n_1 \dots n_d} = (2 + \theta_1)k_1 n_1 + \dots + (2 + \theta_d)k_d n_d$. Já a solução para a parte espacial $\Psi_{n_1 \dots n_d}(\bar{x})$ é dada em função dos polinômios associados de Laguerre na forma

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1 \dots n_d}(\bar{x}) = & \prod_{i=1}^d \frac{(2 + \theta_i)\Gamma(n_i + 1)}{2\Gamma\left(\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2+\theta)\mathcal{D}_i} + n_i\right)} \left(\frac{k_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right)^{\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2+\theta_i)\mathcal{D}_i}} |x_i|^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} \\ & \times e^{-\frac{k_i |x_i|^{2+\theta_i}}{(2+\theta_i)\mathcal{D}_i}} L_{n_i}^{(\bar{\alpha}_i)}\left(\frac{k_i |x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde $\bar{\alpha}_i = [(\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i)/(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i] - 1$. Assim, considerando a condição inicial $\rho(\bar{x}, 0) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i - \xi_i)$, obtemos a seguinte solução para a Eq.(5.14):

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \prod_{i=1}^d \frac{(2 + \theta_i)\Gamma(n_i + 1)}{2\Gamma\left(\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i} + n_i\right)} \left(\frac{k_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right)^{\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}} e^{-\frac{k_i|x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}} \\ &\times |x_i|^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} L_{n_i}^{(\bar{\alpha}_i)}\left(\frac{k_i|x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right) L_{n_i}^{(\bar{\alpha}_i)}\left(\frac{k_i|\xi_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right) E_{\gamma}(-\lambda_{n_1 \dots n_d} t^{\gamma}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

(veja Fig.(5.4) e Fig.(5.5)).

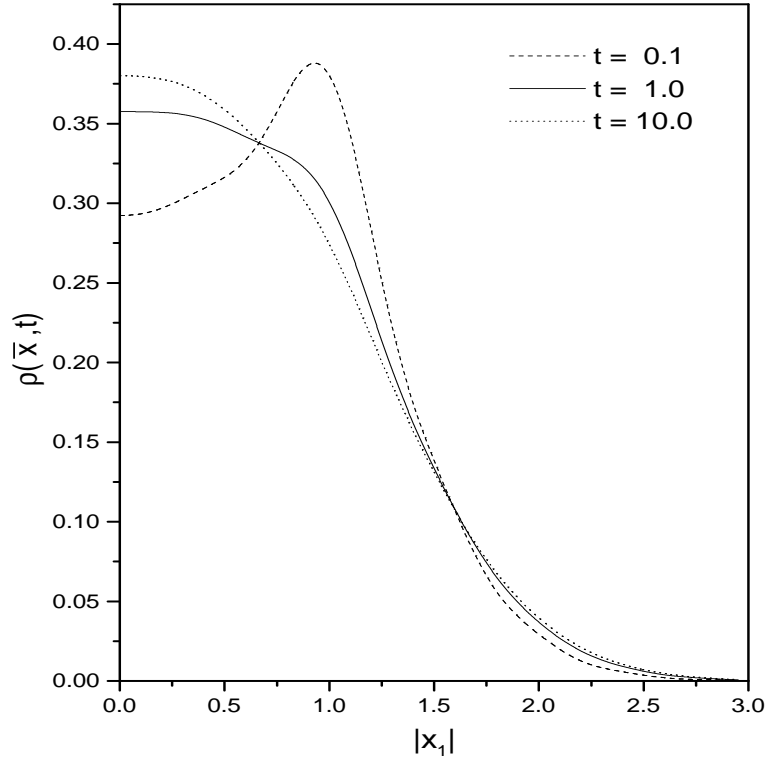


Figura 5.4: Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $|x_1|$ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.20), $\gamma = 1/2$, $\mathcal{K}_1 = 0$, $\theta_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $k_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$. Observe que a Eq.(5.20) evolui para a Eq.(5.21) para tempos longos, indicando que a derivada fracionária produz uma relaxação anômala à situação de equilíbrio.

Para este caso temos a solução estacionária

$$\rho(\bar{x}) = \prod_{i=1}^d \frac{2 + \theta_i}{2\Gamma\left(\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right)} \left(\frac{k_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}\right)^{\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}} |x_i|^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} e^{-\frac{k_i|x_i|^{2+\theta_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}} \quad (5.21)$$

que em particular é igual à do caso usual. Além da dependência do coeficiente de difusão e da presença de força externa podemos ainda considerar a

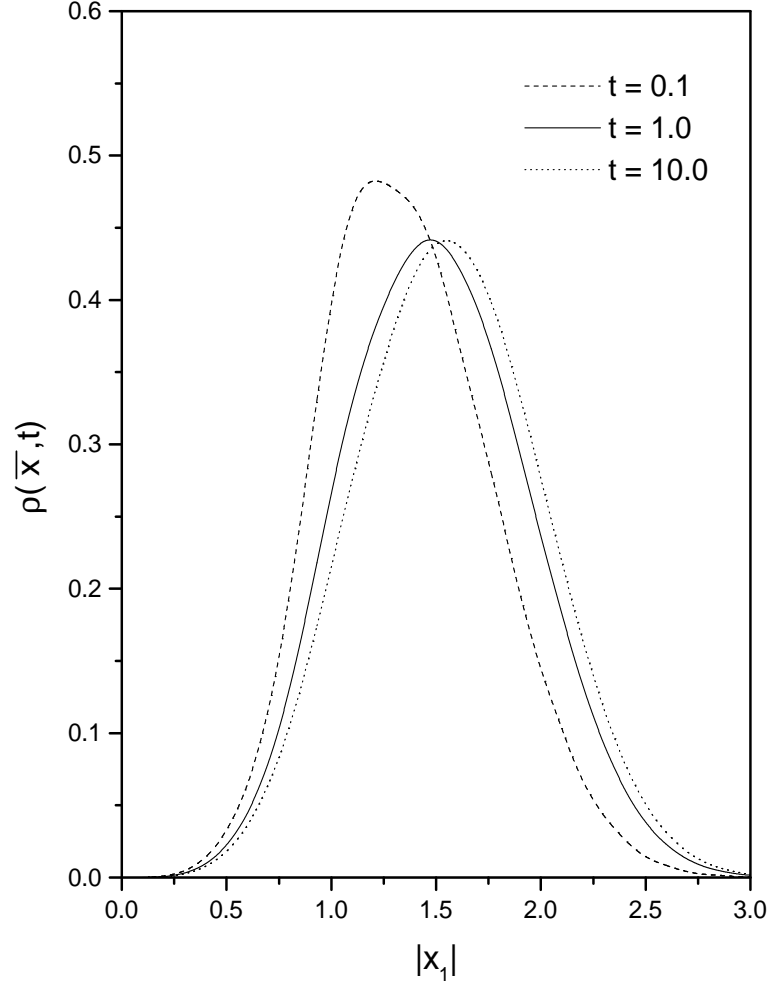


Figura 5.5: Comportamento de $\rho(\bar{x}, t)$ vs. $|x_1|$ para valores típicos de t considerando, por simplicidade, o caso unidimensional da Eq.(5.20), $\gamma = 1/2$, $\mathcal{K}_1 = 4$, $\theta_1 = 1$, $\xi_1 = 1$, $k_1 = 1$ e $\mathcal{D}_1 = 1$.

existência de um termo de fonte na equação de difusão da forma $\alpha|x_i|^{\eta_i}\rho(\bar{x}, t)$ com $\eta_i = 2 + \theta_i$. A presença deste termo aparece, por exemplo, quando se analisa o fluxo de calor envolvendo a sua produção [38]. Para este caso, a equação de difusão é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rho(\bar{x}, t) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_i |x_i|^{-\theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\bar{x}, t) \right\} - \sum_{i=1}^d \alpha |x_i|^{2+\theta_i} \rho(\bar{x}, t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(-k_i x_i + \frac{\mathcal{K}_i}{x_i} |x_i|^{-\theta_i} \right) \rho(\bar{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Utilizamos o procedimento anterior para a encontrar a solução

$$\rho(\bar{x}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \prod_{i=1}^d |x_i|^{\frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{D}_i}} e^{-\frac{k_i(|x_i|^{2+\theta_i} - |\xi_i|^{2+\theta_i})}{2(2+\theta_i)\mathcal{D}_i}} e^{-\frac{\sqrt{k_i^2 + 4\alpha\mathcal{D}_i}}{2(2+\theta_i)\mathcal{D}_i} (|x_i|^{2+\theta_i} + |\xi_i|^{2+\theta_i})}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{\sqrt{k_i^2 + 4\alpha\mathcal{D}_i}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i} \right)^{\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i}} \frac{(2 + \theta_i)\Gamma(n_i + 1)}{2\Gamma\left(\frac{\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i} + n\right)} \mathbb{L}_{n_i}^{(\bar{\alpha}_i)} \left(\frac{\sqrt{k^2 + 4\alpha\mathcal{D}}}{(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i} |x_i|^{2+\theta} \right) \\
& \times \mathbb{L}_{n_i}^{(\bar{\alpha}_i)} \left(\frac{\sqrt{k_i^2 + 4\alpha\mathcal{D}}}{(2 + \theta)\mathcal{D}_i} |\xi_i|^{2+\theta} \right) \mathbb{E}_\gamma(-\bar{\lambda}_{n_1 \dots n_d} t^\gamma), \tag{5.23}
\end{aligned}$$

onde $\bar{\lambda}_{n_1 \dots n_d} = \sum_{i=1}^d \sqrt{k_i^2 + 4\bar{\alpha}\mathcal{D}_i} (2 + \theta_i) \{n_i + [\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i] / [2\mathcal{D}_i(2 + \theta_i)] - k_i[\mathcal{K}_i + \mathcal{D}_i] / [2(2 + \theta_i)\mathcal{D}_i\sqrt{k_i^2 + 4\bar{\alpha}\mathcal{D}_i}]\}$ e a condição inicial é dada por $\rho(\bar{x}, 0) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i - \xi_i)$.

Com isso encerramos nossa análise acerca da difusão anômala em um meio anisotrópico. Vimos situações com o coeficiente de difusão dependente do espaço e do tempo, com a presença de forças externas e um caso com a presença de um termo de fonte. As soluções estacionárias, quando presentes, são iguais às do caso usual.

Este capítulo finaliza o presente trabalho; na seqüência apresentamos nossas conclusões gerais.

Discussões e Perspectivas

Ao longo do presente trabalho abordamos vários tipos de equações de difusão que generalizam a equação de difusão usual. Começamos pela análise da equação usual de difusão devido ao fato de que a sua compreensão e, conseqüentemente, das situações físicas que a rodeiam é de suma importância para o entendimento das situações generalizadas. Assim, depois de uma rápida introdução sobre a equação de difusão usual e alguns formalismos relacionados a ela abordamos as equações de difusão que empregam derivadas fracionárias na variável temporal e espacial. Estas equações são resultados de mudanças, pensando no formalismo de caminhantes aleatórios, na distribuição do tempo de espera entre saltos ou na distribuição do tamanho dos saltos, fatos estes que podem ser verificados utilizando-se aquele formalismo. O resultado de tais modificações diretamente verificou-se nas soluções que passaram a ser expressas em termos das funções H de Fox ou das distribuições de Levy. Neste sentido, o segundo momento associado a estas distribuições, quando finito, nos levou a obter um alargamento da distribuição de uma forma anômala, diferente do caso usual que é linear com o tempo. Seguindo com nossas investigações consideramos as equações de difusão que são não lineares e empregam ou não derivadas fracionárias na variável espacial. Neste caso, as soluções obtidas são expressas em termos da função q -exponencial que aparece no formalismo de Tsallis, sugerindo assim uma base termoestatística para tais equações. Nas situações em que as soluções não são expressas em termos dessa função elas são relacionadas a ela de forma assintótica. Nos demais capítulos que seguiram analisamos as extensões destes casos para situações d -dimensionais ou situações anisotrópicas. Ressaltamos que nos casos trabalhados aqui obtivemos soluções exatas, direcionando desta forma nossos esforços à parte formal dessas equações. Uma etapa futura seria investigar situações físicas onde o formalismo abordado aqui pudesse ser aplicado e buscar extensões dos nossos resultados. Neste sentido, temos por exem-

plo o modelo do pente (“comb model”)[39, 40, 41] que tem sido empregado, entre outras coisas, no estudo da propagação de células cancerígenas [42]. Outra possível extensão seria considerar a presença de termos convectivos não-lineares. Por fim, esperamos que os resultados obtidos aqui venham a ser úteis na discussão de situações que envolvam ou estejam relacionadas a processos difusivos anômalos.

Apêndice: As funções H de Fox

As funções H foram propostas por Fox [19] em 1961 e, devido à sua natureza geral, são utilizadas no estudo de várias situações de interesse físico, incluindo, como vimos, a difusão anômala. Como adiantamos no segundo capítulo, as funções H de Fox são definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_L ds \chi(s) x^s \\ \chi(s) &= \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - B_i s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i + A_i s)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i + B_i s) \prod_{i=1+n}^p \Gamma(a_i - A_i s)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde os parâmetros m, n, p e q satisfazem às desigualdades $0 \leq n \leq p$ e $1 \leq m \leq q$. Nos atemos aqui à listagem de algumas propriedades das funções H que são úteis na simplificação de vários resultados.

(i) As derivadas das funções de Fox são expressas como

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^\alpha \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[(ax)^\beta \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \right\} = x^{\alpha-1} \mathbf{H}_{(m, n+1)}^{(p+1, q+1)} \left[(ax)^\beta \left| \begin{matrix} (-\alpha, \beta), (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q), (\nu - \alpha, \beta) \end{matrix} \right. \right] \quad (5.25)$$

(ii) Para $k > 0$, vale

$$\mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = k \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x^k \left| \begin{matrix} (a_1, kA_1), (a_2, kA_2), \dots, (a_p, kA_p) \\ (b_1, kB_1), (b_2, kB_2), \dots, (b_q, kB_q) \end{matrix} \right. \right] \quad (5.26)$$

(iii) Se $c > 0$, temos

$$\mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x^c \left| \begin{matrix} (a_1, cA_1), (a_2, cA_2), \dots, (a_p, cA_p) \\ (b_1, cB_1), (b_2, cB_2), \dots, (b_q, cB_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{c} \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \quad (5.27)$$

(iv) Sua transformada em cosseno de Fourier

$$\int_0^\infty \mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \cos(kx) dx = \frac{\pi}{k} \mathbf{H}_{q+1, p+2}^{n+1, m} \left[k \left| \begin{matrix} (1-b_q, B_q), (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1), (1-a_p, A_p), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (5.28)$$

é útil quando se quer transformar uma distribuição simétrica.

(v) Podemos obter várias funções dependendo da escolha dos parâmetros m, n, p e q ; por exemplo

$$\frac{1}{(1+x)^r} = \mathbf{H}_{1,1}^{1,1} \left[x \left| \begin{matrix} (1-x, 1) \\ (0, 1) \end{matrix} \right. \right]. \quad (5.29)$$

(vi) As funções H e as de Mittag-Leffler são relacionadas por

$$\mathbf{E}_\alpha(-x) = \mathbf{H}_{1,2}^{1,1} \left[x \left| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (0, \alpha) \end{matrix} \right. \right], \quad (5.30)$$

de modo que a função exponencial pode ser obtida quando escolhemos $\alpha = 1$, ou seja,

$$e^{-x} = \mathbf{E}_1(-x) = \mathbf{H}_{1,2}^{1,1} \left[x \left| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (0, 1) \end{matrix} \right. \right]. \quad (5.31)$$

Com isso, encerramos este breve comentário acerca de algumas propriedades das funções H de Fox.

Bibliografia

- [1] Abraham Pais, *Sútil é o senhor: A ciência e a vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira S.A., 1995.
- [2] A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 549 (1905).
- [3] L.F. Richardson, Proc. Roy. Soc. **110**, 709 (1926).
- [4] H.Sher,E.W.Montroll, Phys.Rev.B **12**, 2455 (1975).
- [5] R.Metzler,E.Barkai,J.Klafter, Physica A **266**, 343 (1999).
- [6] A. Ott, J.P. Bouchaud, D. Langevin and W.Urbach, Phys. Rev. Lett. **65**, 2201 (1990); J.P. Bouchaud, A. Ott, D. Langevin and W. Urbach, J. Phys. II France **1**, 1465 (1991).
- [7] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. A. N. Amaral, et al., Phys. Rev. E **62**, R3023 (2000).
- [8] J.F. Douglas, in: R. Hilfer (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000 ver também R. Metzler, J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 241 (2000).
- [9] J. Klafter, M.F. Shlesinger e G. Zumofen, Physics Today **49**, 35 (1996).
- [10] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, San Diego, 1999); K. B. Oldham e J. Spanier, *The Fractional Calculus* (Academic Press, New York, 1974).
- [11] N. Goldenfeld, *Lectures On Phase Transitions and The Renormalization Group*, (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1992).
- [12] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer, New York, 1984); C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, (Springer Series in Synergetics, New York, 1996).

- [13] S. S. Plotkin and P. G. Wolynes, Phys. Rev. Lett. **80**, 5015 (1998).
- [14] A. N. Komolgorov, C. R. Dokl. Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941).
- [15] M.F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frisch. *Lévy Flights and Related Topics in Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [16] M.F. de Andrade, E.K. Lenzi, L.R. Evangelista, R.S. Mendes, L.C. Malacarne, Physics Letters A **347**, 160 (2005).
- [17] L. Borland, Phys. Rev. E **57**, 6634 (1998).
- [18] R. Metzler e J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [19] C.Fox, The G and H functions as symmetrical Fourier kernels, Trans.Amer.Matth.Soc. **98**, 395 (1961).
- [20] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer Series in Synergetics, New York, 1996).
- [21] G.M.Zaslavsky, Physics Reports **371**, 461 (2002).
- [22] R.Balescu, Phys. Rev. E **51**, 4807 (1995).
- [23] J.Klafter,B.S. White,M.Levandowsky, in:W.Alt, G.Hoffmann (Eds.), Biological motion, *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 89, Spriger, Berlin, 1990.
- [24] C.K. Mathews,K.E.van Holde, *Biochemistry*, 2nd Edition, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA,1996.
- [25] H.Linder,J.B.Metzler, *Biologie*, Stuttgart,1984.
- [26] N.M. Rosario, Physica A **179**, 232 (1991).
- [27] A.Figueiredo, I.Gleria, R.Matsushita e S.Da Silva Physica A **323**, 601 (2003).
- [28] C. Tsallis and D.J. Bukman, Phys. Rev. E **54**, R2197 (1996).
- [29] M. Bologna, C. Tsallis and P. Grigolini, Phys. Rev. E **62**, 2213 (2000).
- [30] C. Tsallis, Physica A **221**, 227 (1995).

- [31] L. C. Malacarne, I. T. Pedron, R. S. Mendes and E.K. Lenzi, Phys. Rev. E **63**, 30101R (2001).
- [32] F.W. Ames, *Nonlinear Differential Equations - Partial Differential Equations*, Academic Press, Inc., New York, 1967.
- [33] S.R.A. Salinas and C. Tsallis, Braz. J. Phys. **29**, Number 1 (1999); S. Abe and Y. Okamoto, *Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001); P. Grigolini, C. Tsallis and B.J. West, Chaos, Solitons and Fractals **13**, Number 3 (Pergamon-Elsevier, Amsterdam, 2002); G. Kaniadakis, M. Lissia and A. Rapisarda, Physica A **305**, (2002).
- [34] E.K. Lenzi, R.S. Mendes, K.S. Fa, L.R. da Silva, L.S. Lucena, Journal of Mathematical Physics **46**, 8 (2005).
- [35] R.Metzler, W.G.Glockle, T.F.Nonnenmacher, Physica A **211**,13(1994).
- [36] G.A.Mendes, E.K.Lenzi, R.S.Mendes e L.R. da Silva, Physica A **346**, 271 (2005).
- [37] M.O.Vlad, Chaos Solitons and Fractals **4**, 191 (1994).
- [38] H.S.Carslaw and J.C.Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford University Press, London, 1959).
- [39] E.Baskin and A.Iomin, Phys.Rev.Lett. **93**,120603 (2004).
- [40] V.E. Arkhincheev, Physica A, **307**, 131 (2002).
- [41] S.A.Elwakil, M.A.Zahran, E.M.Abulwafa, Chaos, Solitons and Fractals **20**, 1113 (2004).
- [42] A.Iomin, Journ. of Phys.: Conference Series **7**, 57 (2005).