



LEANDRO HERCULANO DA SILVA

TEORIA UNIFICADA PARA A VARIAÇÃO DO CAMINHO
ÓPTICO EM SÓLIDOS ISOTRÓPICOS: APLICAÇÃO NA
ESPECTROSCOPIA DE LENTE TÉRMICA

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath**

Co-orientador: **Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne**



LEANDRO HERCULANO DA SILVA

TEORIA UNIFICADA PARA A VARIAÇÃO DO CAMINHO
ÓPTICO EM SÓLIDOS ISOTRÓPICOS: APLICAÇÃO NA
ESPECTROSCOPIA DE LENTE TÉRMICA

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath**

Co-orientador: **Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Estadual de Maringá para obtenção do título de doutor em Física.

Agradecimentos

De maneira geral, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre os quais gostaria de agradecer:

Aos professores Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath e Dr. Luis Carlos Malacarne, pela orientação neste trabalho e aos ensinamentos à mim transmitidos ao longo do desenvolvimento de meu doutorado.

A minha esposa Flávia, pela paciência e compreensão às tantas horas de ausência.

Aos meus familiares, especialmente aos meus pais Francisco Herculano da Silva e Maria dos Santos Silva, pelas valiosas lições que guardarei para toda a de minha vida.

Aos professores do departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, em especial aos professores do Grupo de Estudo de Fenômenos Fototérmicos (GEFF), Prof. Dr. Antônio Carlos Bento, Prof. Dr. Antônio Medina Neto, Profa. Dra. Francielle Sato, Prof. Dr. Jurandir Hillman Rohling e Prof. Dr. Mauro Luciano Baesso.

Aos amigos que fiz durante minha jornada ao longo da graduação e pós-graduação, em especial aos amigos do GEFF.

Aos funcionários do departamento de Física, dentre eles, Akiko, Jurandir, Marcio, Marcos, Mônica e Sergio.

Às agências de fomento CAPES, Fundação Araucária, FINEP e CNPQ.

Resumo

A distorção da frente de onda em componentes ópticos induzido pelo efeito de lente térmica pode afetar a performance e estabilidade de sistemas ópticos, como lasers de alta potência. No entanto, apesar de problemas que esse efeito pode induzir em alguns sistemas, ele é a base de muitas técnicas fototérmicas. A distorção na frente de onda é resultado de um complexo efeito fotoelástico que caracteriza a degradação e propagação do feixe de laser e sua capacidade de ser focalizado em regiões tão pequenas quanto permitidas pelo comprimento de onda utilizado. Uma solução analítica simples para descrição destes efeitos somente é obtida para materiais fracamente absorvedores, assumindo que as componentes do stress obedecem as aproximações de amostra fina ou amostra grossa. Nesse trabalho, foi desenvolvido um modelo teórico generalizado para descrever a variação do caminho óptico relacionado com o perfil de temperatura para todas as classes de materiais absorvedores. A modelagem é baseada na solução da equação termoelástica e fornece a evolução temporal para temperatura, deformação superficial e para as componentes de stress independente da espessura do elemento óptico, considerando materiais semitransparentes, isotrópicos, homogêneos e sujeitos a uma carga térmica com simetria axial. Com a finalidade de aplicar o modelo aqui desenvolvido no design de sistemas laser, foi simulado a variação do caminho óptico para diferentes tipos de vidros ópticos, sendo possível também, determinar a espessura para a correta aplicação das aproximações de amostra fina e amostra grossa. Usando as expressões para a variação do caminho óptico foi possível desenvolver um novo modelo teórico para a técnica de lente térmica, habilitando sua aplicação no estudo de materiais sólidos independente da espessura. O modelo teórico para a variação do caminho óptico pode ter significativo impacto no design de sistemas laser e tem aplicação direta em técnicas fototérmicas que relacionam a variação do caminho óptico com propriedades térmicas, ópticas e mecânicas de materiais sólidos.

Abstract

Wavefront distortion in optical components induced by thermal lensing may affect performance and stability of optical systems, such as high-power lasers. Despite of the problems, this effect is the base of several photothermal techniques. The wavefront distortion is a result of complex photoelastic effects that characterize the degradation and propagation of the beam and its ability to be focused in spot so small as allowed by the wavelength used. A simple analytical solution for this induced optical path change is known only for low absorbing materials, with the assumption that the stresses obey either thin-disk or long-rod approximations. In this work, it is developed a generalized theoretical model for optical path change for all classes of absorbing materials, which is related to the temperature profile in a simple way . The modeling is based on the solution of the thermoelastic equation and provides time-dependent expressions for the temperature, surface displacement, and stresses for a semi transparent, isotropic and homogeneous material, subjected to an axially-symmetric thermal loads, regardless of the optical element thickness. In order to apply the theoretical model developed here to the design of the optical elements, it is simulated the optical path change for different optical glasses, allowing us to determine the correct thickness to apply the thin-disk and long-rod approximations. Using the optical path change expression, a new theoretical thermal lens model is presented, enabling the thermal lens technique to be applied in the study of solid materials regardless of the sample thickness. The theoretical model to the optical path change could have significant impact on designing laser systems and has direct application in photothermal techniques, which correlate optical path change to thermal, optical, and mechanical properties of solid materials.

Sumário

Lista de Figuras	1
1 Introdução	7
2 Termoelasticidade	11
2.1 Introdução	11
2.2 Equação termoelástica	12
2.3 Potenciais de deslocamento	14
2.4 Componentes de stress e de deslocamento	16
2.5 Componentes de stress generalizadas	21
2.6 Componentes de stress generalizadas para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica	22
3 Variação do caminho óptico	23
3.1 Introdução	23
3.2 Variação do caminho óptico para materiais com absorção óptica descrito pela lei de Beer	27
3.3 Variação do caminho óptico para materiais com absorção óptica moderada	28
3.4 Variação do caminho óptico para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica	29
4 Simulações	31
4.1 Validação do modelo utilizando o método dos elementos finitos	31
4.1.1 O método dos elementos finitos	31
4.1.2 Validação das expressões para variação de temperatura	33
4.1.3 Validação das componentes de stress	35
4.2 Comparação entre os modelos	37
4.3 Variação do caminho óptico para diferentes materiais	41
5 A Técnica de Lente térmica	49
5.1 Introdução	49

5.2	Histórico	51
5.3	Intensidade do sinal de lente térmica	53
5.4	Modelo de Shen para a técnica de lente térmica	55
5.5	Modelo BAM para a técnica de lente térmica	57
5.6	Modelo ABAM para a técnica de lente térmica	59
5.7	Modelo LAM para a técnica de lente térmica	60
5.8	Análise das aproximações de <i>plane-strain</i> e <i>plane-stress</i>	61
5.9	Eficiência quântica de fluorescência	66
5.9.1	Método da normalização pela base	66
5.9.2	Método dos múltiplos comprimentos de onda	68
6	Determinação dos coeficientes de stress óptico	70
7	Conclusão	76
A	Feixes gaussianos	78
B	Equação de difusão de calor	81
C	Contribuição do stress para a variação do caminho óptico	88
D	Obtenção da integral de difração	94
E	Trabalhos publicados	97
F	Rotinas empregando o software Mathematica 9.0	99
G	Referências Bibliográficas	104

Lista de Figuras

2.1	Representação das forças internas e trações atuando em uma porção arbitrária de um corpo sólido.	12
4.1	Representação da malha utilizando o software Comsol 4.2. A imagem tridimensional é obtida girando-se a figura em torno do eixo de simetria.	32
4.2	Perfil tridimensional da variação de temperatura e deformação térmica em um sistema com simetria radial, utilizando o software Comsol 4.2. Demais propriedades físicas utilizadas na simulação estão listadas na Tabela (4.1).	32
4.3	Dependência radial da variação de temperatura em função do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via o modelo BAM descrita pela Eq. (B.38) (linha contínua em cor vermelha).	33
4.4	Dependência temporal da variação de temperatura em função do coeficiente de absorção óptica, em $z = r = 0$, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (B.38) (linha contínua em cor vermelha).	34
4.5	Dependência temporal da componente $\sigma_z(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.61) (linha contínua em cor vermelha).	35
4.6	Dependência temporal da componente $\sigma_r(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.62) (linha contínua em cor vermelha).	35
4.7	Dependência temporal da componente $\sigma_\phi(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.63) (linha contínua em cor vermelha).	36

4.8	Dependência radial da variação de temperatura para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).	37
4.9	Dependência temporal da variação de temperatura para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).	37
4.10	Erro percentual na descrição da variação de temperatura quando utilizado o modelo ABAM (a) e quando utilizado o modelo LAM (b) em relação à descrição da variação de temperatura descrita pelo modelo BAM.	38
4.11	Variação do caminho óptico em função do tempo para diferentes valores do coeficiente de absorção, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).	39
4.12	Erro percentual na descrição da variação do caminho óptico, quando utilizado o modelo ABAM (a) e LAM (b), comparados à descrição realizada com o modelo BAM.	40
4.13	Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro BK7, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculos em cor vermelha) e a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculos em cor azul).	41
4.14	Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro CAS, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculos em cor vermelha) e a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculos em cor azul).	42
4.15	Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro OFG, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculos em cor vermelha) e a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculos em cor azul).	42
4.16	Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro QX, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculos em cor vermelha) e a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculos em cor azul).	43
4.17	Porcentagem das contribuições térmicas, de expansão e de stress para a variação do caminho óptico, no regime de <i>plane-stress</i>	44
4.18	Porcentagem das contribuições térmicas e de stress para a variação do caminho óptico, no regime de <i>plane-strain</i>	44

4.19	Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de BK7, quando utilizado a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculo em cor azul).	45
4.20	Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de CAS, quando utilizado a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculo em cor azul).	46
4.21	Determinação do erro percentual em função da espessura, para uma amostra de OFG, quando utilizado a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculo em cor azul).	46
4.22	Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de QX, quando utilizado a aproximação de <i>plane-stress</i> (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de <i>plane-strain</i> (círculo em cor azul).	47
4.23	Erro percentual entre diferentes materiais quando assumida a aproximação de <i>plane-strain</i> (barras em cor azul) ou de <i>plane-stress</i> (barras em cor vermelha) para uma amostra com espessura de $L = 500\mu m$	47
5.1	Representação da configuração experimental do considerado primeiro espectrômetro de lente térmica. Na figura, F são fotodetectores, E são espelhos, TG é o tubo de gás He-Ne, PA é a cubeta contendo a amostra, DV é um divisor de feixe, S é um obturador e I são íris utilizadas para selecionar o modo de propagação do feixe TEM_{00} [1].	51
5.2	Esquema da configuração extracavidade para a técnica de lente térmica utilizada por Hu e Whinnery [2].	51
5.3	Esquema da configuração com feixe duplo utilizado por Swofford [3,4].	52
5.4	Representação esquemática da configuração com feixe duplo em modo descasado.	52
5.5	Transientes de LT para uma amostra de BK7, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).	61
5.6	Transientes de LT para uma amostra de CAS, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).	62
5.7	Transientes de LT para uma amostra de OFG, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).	62
5.8	Transientes de LT para uma amostra de QX, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).	63

5.9	Valores dos parâmetros θ/P para o vidro BK7 em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando o ajuste com modelo Shen na aproximação de <i>plane-stress</i> (vermelho) e <i>plane-strain</i> (azul).	63
5.10	Valores dos parâmetros θ/P para o vidro CAS em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de <i>plane-stress</i> (vermelho) e <i>plane-strain</i> (azul).	64
5.11	Valores dos parâmetros θ/P para o vidro OFG em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de <i>plane-stress</i> (vermelho) e <i>plane-strain</i> (azul).	64
5.12	Valores dos parâmetros θ/P para o vidro QX em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de <i>plane-stress</i> (vermelho) e <i>plane-strain</i> (azul).	65
5.13	Parâmetro Θ/PL em função do comprimento de onda de excitação para os vidros BK7, CAS, OFG e QX. Ajuste linear utilizando a Eq. (5.35). Os valores para EQF são obtidos por meio da relação $\eta = b\langle\lambda_{em}\rangle/a$	68
6.1	Representação esquemática dos feixes de prova (linha em cor vermelha) e de excitação (linha em cor verde) na técnica de lente térmica na configuração descasada e colinear. Detalhe para os feixes ao longo da espessura da amostra.	73
6.2	Dependência do parâmetro m médio (esferas de cor azul) e do raio médio do feixe de excitação (esferas de cor vermelha) o raio médio de prova é praticamente constante para esta faixa de espessuras. Demais parâmetros utilizados foram: $\lambda_e = 514,5nm$, $\lambda_p = 632,8nm$, $z_{0e} = 0,35cm$ e $z_{0p} = 0,1cm$	74
6.3	Resultados obtidos para os parâmetros θ (esferas em cor vermelha) e t_c (esferas em cor azul), utilizando $\omega_{0e} = 100\mu m$, $m = 26,4$, $d = 5,0 \times 10^{-7}m^2/s$ e $V = 5,4$. As linhas contínuas são apenas uma guia visual. . . .	74
A.1	Distribuição radial de intensidade para feixes gaussianos de diferentes ordens.	80
C.1	Representação da estrutura atômica da teoria de Mueller com as contribuições para a birrefringência fotoelástica.	92
C.2	Representação da estrutura atômica para um vidro silicato.	93
F.1	Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo BAM.	99
F.2	Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo ABAM.	100
F.3	Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo LAM.	100
F.4	Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo BAM. . . .	100

F.5	Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo ABAM. . .	101
F.6	Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo LAM. . . .	101
F.7	Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo BAM.	101
F.8	Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo ABAM.	101
F.9	Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo LAM.	101
F.10	Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo BAM.	102
F.11	Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo ABAM.	102
F.12	Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo LAM.	102

Lista de símbolos

α	Variável no espaço de Hankel.
λ	Variável no espaço de Fourier cosseno.
λ'	Primeiro parâmetro de Lamé.
s	Variável no espaço de Laplace.
σ_{ij}	Tensor de stress.
α_T	Coefficiente linear de expansão térmico.
C_{ijkl}	Tensor de rigidez.
ϵ_{ij}	Tensor de strain.
ν	Razão de Poisson.
ν	Segundo parâmetro de Lamé.
Y	Módulo de Young.
u	Vetor deslocamento.
L	Espessura da amostra.
J_0	Função de Bessel de ordem zero.
n_0	Índice de refração inicial.
dn/dT	Coefficiente térmico da variação do índice de refração.
q_{\perp} e q_{\parallel}	Coefficientes de stress óptico.
β	Coefficiente de absorção óptica.
k	Condutividade térmica.
c	Calor específico a pressão constante.
D_{th}	Difusividade térmica.
ρ	Densidade.
$T(\alpha, \lambda, t)$	Variação da temperatura no espaço Hankel-Fourier.
η	Eficiência quântica de fluorescência.
φ	Taxa de conversão de energia absorvida em calor gerado.
P	Potência do laser de excitação.
λ_{exc}	Comprimento de onda de excitação.
$\langle \lambda_{em} \rangle$	Comprimento de onda médio de emissão.

Introdução

Quando um feixe de luz de baixa intensidade incide em um material, pouco ou nenhum efeito pode ser observado. Aumentando a intensidade do feixe de laser, alguns efeitos reversíveis podem ser observados, como mudança na temperatura, deformação térmica, efeitos de transmitância e absorção não linear, efeitos eletro-ópticos, geração de segundo harmônico. Quando a intensidade do feixe torna-se ainda maior, efeitos irreversíveis podem ocorrer, como, por exemplo, fusão, fratura e vaporização. O advento do laser possibilitou que alta intensidade de luz necessária para a geração desses efeitos pudessem ser atingidas. Os efeitos advindos da utilização de lasers de alta potência limitam sua aplicação, principalmente em sistemas miniaturizados, devido à tendência dos altos fluxos de energia induzirem danos aos componentes ópticos presentes nesses sistemas [5].

Desde a construção do primeiro laser de estado sólido, em 1960 por T. Maiman [6] os efeitos que alteram a qualidade de sistemas laser vêm sendo investigados, contribuindo para a obtenção de sistemas laser com maiores valores de potência óptica. Dentre eles, o estudo dos fenômenos termicamente induzidos que geralmente estão associados a perda de energia em forma de calor durante o processo de bombeio óptico [5, 7].

O aquecimento local devido à geração de calor induz a formação de um gradiente de temperatura que pode resultar em um grande stress no material levando a fratura do mesmo. Abaixo deste nível outros efeitos podem não destruir o material, mas levar o sistema a uma considerada perda de eficiência e qualidade. Como consequência desses efeitos a estabilidade do ressonador em um laser de estado sólido e a qualidade do feixe de saída dependerão da potência de bombeio. Diversos trabalhos têm sido produzidos no intuito de determinar e propor correções a esses efeitos através do controle de temperatura dos materiais ou adicionando componentes ópticos como lentes ou sistemas birrefringentes [8–10]. Mesmo com as correções propostas alguns desses efeitos só podem ser corrigidos para um valor fixo de potência de bombeio [7].

A distribuição não uniforme da temperatura resulta em mudança na densidade, deformação e efeitos de stress, que por sua vez, induzem distorção na frente de onda alterando a fase do campo elétrico associado ao feixe de laser. Esses efeitos reduzem significativamente o controle da coerência espacial do feixe transmitido em sistemas ópticos que utilizam al-

tos valores do energia, como, por exemplo, em aplicações militares [11], processamento de materiais [12], e sistemas de detecção de ondas gravitacionais por interferometria óptica [13, 14].

Além de poderem estar presentes em meios ativos, os efeitos termo-ópticos podem surgir em outros componentes dos sistemas laser, como em espelhos e janelas ópticas. Em sistemas laser de alta energia, mecanismos de remoção de calor são utilizados para evitar o surgimento de gradientes de temperatura que levam ao efeito de lente térmica. Dado o tipo de material utilizado, a capacidade de prever a quantidade de calor gerada é muito importante para indicar os efeitos termo-ópticos que podem estar presentes. Apesar dos efeitos termo-elásticos serem um problema para ser contornado em algumas aplicações, esses efeitos são a base de várias técnicas ópticas que necessitam da correta interpretação da variação do caminho óptico para caracterização de materiais, dentre elas, a técnica de lente térmica [15–20].

De acordo com o intervalo de tempo considerado e a geometria dos sistemas, diversos métodos aproximados têm sido utilizados para obter um tratamento analítico que estime os efeitos termo-ópticos. Para sistemas compostos por laser em modo contínuo, ou em sistemas com altas taxas de repetição de pulsos em que o intervalo entre os pulsos de bombeio é muito curto quando comparado ao valor do tempo necessário para que ocorra a relaxação térmica, a aproximação de estado estacionário é utilizada para descrever a distribuição espacial da temperatura [7]. Para sistemas no qual a espessura do material é muito maior do que o seu raio, a distribuição espacial das componentes do tensor de stress é obtida empregando a aproximação de *plane-strain* [7, 21–24]. Estas duas aproximações acima constituem a base dos tratamentos teóricos dos efeitos termo-ópticos na maioria dos sistemas laser de estado sólido [7, 10, 25]. Para sistemas onde a espessura do material é muito menor do que o seu raio as componentes do tensor de stress são obtidas utilizando a aproximação de *plane-stress*, nessa aproximação assume-se que a componente do tensor de stress na direção de propagação do feixe é nula, essa aproximação é comumente empregada na determinação dos efeitos termo-ópticos presentes em janelas ópticas [23, 26].

As aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain*¹ somente podem ser aplicadas para materiais sujeitos a uma carga térmica axialmente simétrica, na qual as componentes de stress obedecem os princípios de amostra fina ou amostra grossa. A aproximação de amostra fina (*plane-stress*) e de amostra grossa (*plane-strain*) são válidas quando o raio efetivo da região afetada pelos efeitos termo-elásticos são muito maiores ou muito menores do que a espessura da amostra, respectivamente. Essas aproximações são limitadas, uma vez que, para cada material tem-se um valor diferente de espessura que o caracteriza dentro de cada um desses limites. Em resumo, a correta aplicação destes limites dependerá das propriedades térmicas e mecânicas de cada material, como ficará demonstrado adi-

¹As expressões *plane-stress* e *plane-strain* poderiam ser traduzidas como estado plano de tensão e estado plano de deformação, respectivamente. Uma vez que essas traduções não refletem o mesmo significado quando interpretadas na língua inglesa, utilizar-se-á então, as expressões *plane-stress* e *plane-strain* nesse trabalho.

ante. Por sua vez, a aproximação de estado estacionário para descrever a distribuição de temperatura não poderá ser aplicada quando o intervalo de tempo que se deseja estudar os efeitos seja da mesma ordem do intervalo de tempo característico de difusão térmica.

Sistemas miniaturizados que necessitem de uma resposta rápida para a determinação e correção dos efeitos termicamente induzidos, não podem depender de métodos numéricos, assim como também não podem ser tratados pelas aproximações disponíveis na literatura.

O objetivo geral deste trabalho é obter uma expressão semi-analítica para a variação do caminho óptico para materiais isotrópicos, homogêneos e semitransparentes, independente da espessura. As expressões obtidas serão empregadas para a determinação da variação do caminho óptico, assim como, também, aplicadas no desenvolvimento de um novo modelo teórico para a técnica de lente térmica, uma vez que, o modelo atualmente utilizado para descrição teórica da técnica de lente térmica utiliza as aproximações de *plan-stress* e *plane-strain*. Pretende-se também avaliar os limites de aplicação deste modelo tradicional frente a esse novo modelo.

No capítulo 2 são descritas as equações constitutivas da termo-elasticidade e obtidas as componentes do tensor de stress e a componente azimutal do deslocamento para um material isotrópico, sujeito a uma carga térmica axialmente simétrica. Essas componentes formarão a base das expressões que relacionam a variação do caminho óptico com o perfil de temperatura. A expressão para a variação do caminho óptico é obtida no capítulo 3 considerando as contribuições para a variação do índice de refração devido aos efeitos de temperatura e de stress. Neste mesmo capítulo são obtidos três diferentes expressões para a a variação do caminho óptico considerando-se diferentes regimes para a descrição da absorção óptica.

No capítulo 4, as expressões que descrevem as componentes do tensor de stress e a variação de temperatura são avaliadas comparando-as com os resultados obtidos utilizando o método dos elementos finitos. Os três diferentes modelos para descrição da variação do caminho óptico são comparados, estabelecendo o limite apropriado para a aplicação de cada um, em relação ao valor do coeficiente de absorção óptica. Ainda no capítulo 4, são simulados a evolução temporal do caminho óptico para diferentes materiais, analisando separadamente a contribuição de cada efeito para a variação do caminho óptico e o erro induzido ao se utilizar as aproximações de *plane-stress* e *plane-strain* em função da espessura do material.

A técnica de lente térmica é apresentada no capítulo 5, descrevendo brevemente seu desenvolvimento histórico e os principais aspectos a serem considerados no desenvolvimento de modelos teóricos para o tratamento dos dados experimentais. Utilizando as expressões obtidas nos capítulos anteriores, são desenvolvidos modelos teóricos que descrevem o efeito de lente térmica ampliando a faixa de aplicação em relação a espessura da amostra, a absorção óptica e a amplitude do sinal. O modelo de Shen é comparado com um dos modelos aqui desenvolvidos, evidenciando as vantagens e desvantagens da utilização do mesmo, principalmente quando utilizado para determinação da eficiência

quântica de fluorescência.

Finalizando este trabalho, no capítulo 6, são discutidas três metodologias para a determinação dos coeficientes de stress óptico: utilizando os modelos aqui propostos, utilizando o modelo de Shen em dois limites de espessura distintos e por meio da associação da técnica de lente térmica no regime de *plane-strain* juntamente com a medida de birrefringência. No final do capítulo 6 é discutido a utilização do limite de *plane-strain* para interpretação dos resultados obtidos por meio da técnica de lente térmica.

Alguns detalhes das expressões utilizadas, como a distribuição espacial e a propagação dos feixes, as contribuições dos efeitos de stress para o a variação do caminho óptico, a equação que descreve a variação de temperatura e as propriedades físicas utilizadas nas simulações são descritas nos apêndices.

Termoelasticidade

2.1 Introdução

A variação temporal de uma carga aplicada sobre um corpo sólido causa não apenas deformação, mas também uma variação da temperatura. O deslocamento do corpo deve-se à interação entre a deformação e a distribuição de temperatura. O campo da ciência que se ocupa em estudar essa interação é denominado termoelasticidade. A termoelasticidade descreve uma larga faixa de fenômenos. A termoelasticidade trata-se de uma generalização da teoria clássica da elasticidade e da teoria da condutividade térmica [24]. Desde seu início, com o trabalho de Duhamel em 1837 [27], que primeiro propôs o acoplamento entre campos de temperatura e o deslocamento, diversos métodos para resolver as equações termoelásticas têm sido desenvolvidos. Dentre esses métodos, a teoria do stress térmico, que trata do stress e strain produzidos em um corpo quando o mesmo é aquecido, assume que a deformação de um corpo elástico não afeta a condutividade térmica do mesmo, uma vez que a equação de condução de calor não contém o termo associado à deformação do corpo. Simultaneamente a esta teoria, a elastocinética introduziu a simplificação de que a troca de calor é tão lenta que o movimento de deformação pode ser tratado como um processo adiabático [24].

Considerando que o deslocamento é pequeno quando comparado à dimensão inicial do corpo, assim como a mudança de temperatura é pequena quando comparada com a temperatura inicial, a condução de calor será um processo gradual. Nesse caso, os termos de inércia podem ser desconsiderados, fazendo com que as equações de movimento se reduzam a equações de equilíbrio. Isso significa dizer que o corpo move-se lentamente através de uma sequência contínua de posições de equilíbrio, sem nenhuma aceleração significativa. Isso é a chamada aproximação quasi-estática [28], e será utilizada neste trabalho na obtenção das equações constitutivas da termoelasticidade.

2.2 Equação termoelástica

Considere um corpo sólido de volume V , delimitado por uma superfície fechada S . Esse corpo apresenta uma distribuição de trações T_i^n e forças internas, conforme representado na Figura 2.1.

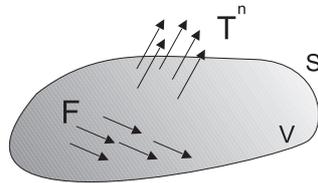


Figura 2.1: Representação das forças internas e trações atuando em uma porção arbitrária de um corpo sólido.

Na condição de equilíbrio, a conservação do momento implica que a resultante das forças deve ser nula, ou seja,

$$\int_S T_i^n dS = \int_V F_i dV. \quad (2.1)$$

Pode-se expressar este estado de equilíbrio em termos das componentes do tensor de stress σ_{ij} ¹

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = - \int_V F_i dV. \quad (2.2)$$

Utilizando o teorema da divergência, a Eq. (2.2) pode ser escrita como

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) dV = 0. \quad (2.3)$$

Sendo V um volume qualquer, implica em

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (2.4)$$

e, ainda, se $F_i = 0$,

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (2.5)$$

A relação entre tensor de stress σ_{ij} e de strain ϵ_{ij} é estabelecida pela lei de Hooke. Na teoria linear da termoelasticidade as componentes do tensor de strain são funções do stress e da variação de temperatura [29]. Para materiais isotrópicos e homogêneos, a lei de Hooke pode ser escrita como [30]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - 2(1 + \nu)\alpha_T\delta_{ij}\Delta T \quad (2.6)$$

¹Utilizar-se-á a notação de Einstein em que os índices repetidos se equivalem a soma, exemplo: $x_i \equiv \sum_j f_{ij}y_j \equiv f_{ij}y_j$.

em que C_{ijkl} é o tensor de rigidez. Para materiais isotrópicos, o tensor de rigidez pode ser escrito como [29]

$$C_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.7)$$

em que

$$\lambda' = \frac{Y \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.8)$$

e

$$\mu = \frac{Y}{2(1 - \nu)}. \quad (2.9)$$

α_T é o coeficiente linear de expansão térmico, Y é o módulo de Young e ν a razão de Poisson ².

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.6),

$$\sigma_{ij} = \lambda' \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - 2(1 + \nu) \alpha_T \delta_{ij} \Delta T. \quad (2.10)$$

Para pequenas deformações, as componentes do tensor de strain ϵ_{in} apresentam uma relação linear com as componentes do vetor de deslocamento u_i . Essa relação é dada por [30]

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.11)$$

em que $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.10), tem-se

$$\sigma_{ij} = \lambda' \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - 2(1 + \nu) \alpha_T \delta_{ij} \Delta T, \quad (2.12)$$

e, aplicando a condição de equilíbrio estático dada pela Eq. (2.5), obtém-se

$$\sigma_{ij,j} = \lambda' \delta_{ij} u_{k,kj} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) - 2(1 + \nu) \alpha_T \delta_{ij} \Delta T_{,j} = 0 \quad (2.13)$$

ou, alternativamente

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda' + \mu) u_{j,ji} - 2(1 + \nu) \alpha_T \Delta T_{,i} = 0, \quad (2.14)$$

ou ainda, na forma vetorial,

²Módulo de Young ou módulo de elasticidade é um parâmetro mecânico que proporciona a medida da rigidez de um material sólido, descrevendo a tendência de um material se deformar ao longo de um eixo quando forças opostas são aplicadas. Razão de Poisson é o coeficiente que mede a razão do alongamento em uma direção pela contração em uma dimensão transversal, quando uma tensão é aplicada em um material em um determinado eixo.

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(r, z, t) + (\lambda' + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(r, z, t)) - 2(1 + \nu) \alpha_T \nabla(\Delta T(r, z, t)) = 0. \quad (2.15)$$

Assumindo que na direção radial a amostra possua um raio muito maior do que o raio da região afetada pelos efeitos termoelásticos, e que o material em estudo é livre para se expandir, as seguintes condições de contorno para as componentes de stress são obtidas:

$$\sigma_{zz}(r, z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(r, z, t)|_{z=l_0} = 0 \quad (2.16)$$

e

$$\sigma_{rz}(r, z, t)|_{z=0} = \sigma_{rz}(r, z, t)|_{z=l_0} = 0. \quad (2.17)$$

2.3 Potenciais de deslocamento

Um dos possíveis métodos para obter a solução da equação termoelástica dá-se pela introdução dos potenciais de deslocamento. Sabe-se que a solução geral da equação termoelástica é composta pela soma entre a solução da equação homogênea associada e uma solução particular, ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\bar{\mathbf{u}}}, \quad (2.18)$$

com

$$\bar{u} = \Psi_{,i}. \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. (2.19) na equação termoelástica,

$$\mu \Psi_{,jji} + (\lambda' + \mu) \Psi_{,jji} - 2(1 + \nu) \alpha_T \Delta T_{,i} = 0, \quad (2.20)$$

e integrando em relação a variável i , é possível escrever

$$\Psi_{,jj} = \frac{2(1 + \nu) \alpha_T}{(\lambda' + 2\mu)} \Delta T, \quad (2.21)$$

ou, ainda, a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Psi = \frac{2(1 + \nu) \alpha_T}{(\lambda' + 2\mu)} \Delta T. \quad (2.22)$$

A solução da equação de Poisson pode ser escrita como

$$\Psi(r, z, t) = - \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \cos(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (2.23)$$

em que, $T(\alpha, \lambda, t)$ é a expressão para a variação de temperatura no espaço de Hankel e

Fourier. Detalhes do cálculo da temperatura são apresentados no apêndice B.

Considerando a equação homogênea associada à equação termoelástica,

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ji} = 0, \quad (2.24)$$

com

$$\bar{u}_i = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \delta_{iz} \psi_{,kk} - \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \psi_{,iz}. \quad (2.25)$$

Diferenciando a Eq. (2.25) duas vezes em relação à variável x_j , é possível escrever

$$\bar{u}_{i,jj} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \delta_{iz} \psi_{,kkjj} - \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \psi_{,jjiz}. \quad (2.26)$$

Substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.24), tem-se

$$\begin{aligned} & (\lambda' + 2\mu) \psi_{,kkjj} - \lambda' + \mu \psi_{,jjiz} + \lambda \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \psi_{,kkiz} \\ & - \lambda' \left(\frac{\lambda' + \mu}{\mu} \right) \psi_{,jjiz} + \lambda + 2\mu \psi_{,kkiz} - \lambda + \mu \psi_{,jjiz} = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou seja,

$$(\lambda + 2\mu) \psi_{,kkjj} = 0, \quad (2.28)$$

levando a equação biarmônica de Love

$$\psi_{,kkjj} = 0, \quad (2.29)$$

ou, analogamente,

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.30)$$

Utilizando a aproximação de amostra com dimensão radial infinita, a solução da equação de Love pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2) \alpha^2} \\ & [e^{\alpha z} (a + \alpha z b) + e^{-\alpha z} (c + \alpha z d)] J_0(\alpha r) d\alpha d\lambda. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.4 Componentes de stress e de deslocamento

Substituindo as Eqs. (2.19) e (2.25) na Eq. (2.18), pode-se obter a solução geral para as componentes do deslocamento

$$u_i = \Psi_{,i} + \frac{1}{1-2\nu} [2(1-\nu)\delta_{iz}\psi_{,kk} + \psi_{,iz}]. \quad (2.32)$$

Para a componente u_z ,

$$u_z(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z, t) + \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r, z, t). \quad (2.33)$$

Utilizando as Eqs. (2.12) e (2.32),

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = 2\nu (\partial_{ij} - \delta_{ij}\nabla^2) \Psi + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \left[2(1-\nu)\mu(\delta_{iz}\partial_j + \delta_{jz}\partial_i) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu)\lambda\delta_{kz}\delta_{ij}\partial_k \right] \nabla^2 \psi - \mu(\partial_j\partial_{iz} + \partial_i\partial_{jz})\psi - \lambda\delta_{ij}\partial_k\partial_{kz}\psi \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Essa equação fornece as seguintes relações entre as componentes de stress e os potenciais de deslocamento:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z, t) = \frac{Y}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla^2 \right) \Psi(r, z, t) \\ + \frac{Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(2-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial}{\partial z} \psi(r, z, t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) = -\frac{Y}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi(r, z, t) \\ + \frac{Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \psi(r, z, t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, z, t) = \frac{Y}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z, t) \\ + \frac{Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r, z, t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi}(r, z, t) = -\frac{Y}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(r, z, t) \\ + \frac{Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \psi(r, z, t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo as Eqs (2.23) e (2.31) na Eq. (2.33),

$$u_z(r, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} J_0(\alpha r) \left\{ \frac{e^{\alpha z} [a + b(-2 + z\alpha + 4\nu)]}{-1 + 2\nu} \right. \\ \left. + \frac{e^{-\alpha z} [c + d(2 + z\alpha - 4\nu)]}{-1 + 2\nu} - \frac{\alpha\lambda(1 + \nu)\sin(\lambda z)\alpha_T}{-1 + \nu} \right\} d\alpha d\lambda. \quad (2.39)$$

Substituindo os potenciais de deslocamento dados pelas Eqs. (2.23) e (2.31) nas Eqs. (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38), as relações entre as componentes de stress e a variação de temperatura podem ser escritas como:

$$\sigma_{zz}(r, z, t) = \frac{Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} J_0(\alpha r) \\ \left\{ e^{\alpha z} \alpha [-1 + \nu] [a + b(-1 + z\alpha + 2\nu)] \right. \\ \left. - e^{-\alpha z} \alpha (-1 + \nu) (c + d + dz\alpha - 2d\nu) \right. \\ \left. + \alpha^3 (-1 + \nu + 2\nu^2) \cos(\lambda z) \alpha_T \right\} d\alpha d\lambda \quad (2.40)$$

$$\sigma_{rr}(r, z, t) = \frac{Y}{1 + \nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{r} J_1(\alpha r) \right. \\ \left\{ \frac{e^{-\alpha z} [a + b(1 + z\alpha)]}{-1 + 2\nu} - \frac{e^{-\alpha z} [c + d(-1 + z\alpha)]}{-1 + 2\nu} \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 (1 + \nu) \cos(\lambda z) \alpha_T}{-1 + 2\nu} \right\} + \alpha J_0(\alpha r) \left\{ - \frac{e^{\alpha z} [a + b(1 + z\alpha + 2\nu)]}{-1 + 2\nu} \right. \\ \left. + \frac{e^{-\alpha z} [-c + d(1 + z\alpha + 2\nu)]}{-1 + 2\nu} + \frac{\lambda^2 (1 + \nu) \cos(\lambda z) \alpha_T}{-1 + \nu} \right\} \left. \right\} d\alpha d\lambda \quad (2.41)$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r, z, t) = \frac{Y}{1 + \nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \left\{ - \frac{1}{r} J_1(\alpha r) \right. \\ \left\{ \frac{e^{\alpha z} [a + b(1 + z\alpha)]}{-1 + 2\nu} - \frac{e^{-\alpha z} [c + d(-1 + z\alpha)]}{-1 + 2\nu} \right\} + \alpha J_0(\alpha r) \right. \\ \left. \left\{ - \frac{2de^{-\alpha z}\nu}{-1 + 2\nu} - \frac{2be^{\alpha z}\nu}{-1 + 2\nu} + \frac{(\alpha^2 + \lambda^2)(1 + \nu) \cos(\lambda z) \alpha_T}{-1 + \nu} \right\} \right\} d\alpha d\lambda \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz}(r, z, t) = & \frac{Y}{(-1 + \nu)(-1 + \nu + 2\nu^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \alpha J_1(\alpha r) \\
 & \left\{ e^\alpha [a(1 - \nu) + b(z\alpha + 2\nu - z\alpha\nu - 2\nu^2)] \right. \\
 & + e^{-\alpha z} [c(1 - \nu) + d(z\alpha - 2\nu - z\alpha\nu + 2\nu^2)] \\
 & \left. + \alpha\lambda(-1 + \nu + 2\nu^2) \sin(\lambda z) \alpha_T \right\} d\alpha d\lambda.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

As constantes a , b , c e d são obtidas impondo as condições de contorno dadas pelas Eqs. (2.16) e (2.17) nas Eqs. (2.40) e (2.43):

$$\begin{aligned}
 a = & \frac{\alpha (2\nu^2 + \nu - 1) e^{\alpha(-L)} \alpha_T \{ \lambda [L(\alpha - 4\alpha\nu) - 2\nu + 1] \sin(\lambda L) + \alpha [\alpha L(4\nu - 1) - 2\nu] \cos(\lambda L) \}}{2(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
 - & \frac{\alpha (2\nu^2 + \nu - 1) e^{\alpha L} \alpha_T [\lambda(\alpha L + 2\nu - 1) \sin(\lambda L) + \alpha(\alpha L + 2\nu) \cos(\lambda L)]}{2(\nu - 1) (-2\alpha^2 L^2 + \cosh(2\alpha L) - 1)} \\
 - & \frac{\alpha^2 (2\nu^2 + \nu - 1) e^{-2\alpha L} \alpha_T \{ e^{2\alpha L} [\alpha L(\alpha L + 2\nu) + \nu] - \nu \}}{(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)},
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
 b = & \frac{\alpha (2\nu^2 + \nu - 1) e^{\alpha L} \alpha_T [\alpha \cos(\lambda L) + \lambda \sin(\lambda L)]}{2(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
 - & \frac{\alpha (2\nu^2 + \nu - 1) e^{\alpha(-L)} \alpha_T [2\alpha^2 L \cos(\lambda L) - 2\alpha\lambda L \sin(\lambda L) - \alpha \cos(\lambda L) - \lambda \sin(\lambda L)]}{2(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
 + & \frac{\alpha^2 (2\nu^2 + \nu - 1) e^{-2\alpha L} [e^{2\alpha L} (2\alpha L + 1) - 1] \alpha_T}{2(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
 c = & \frac{\alpha^2 (2\nu^2 + \nu - 1) \alpha_T \cos(\lambda L) \{ [\alpha L(2\nu - 1) + 2\nu] \sinh(\alpha L) + 2\alpha L\nu \cosh(\alpha L) \}}{(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
 + & \frac{\alpha\lambda (2\nu^2 + \nu - 1) \alpha_T \sin(\lambda L) \{ [2\nu(\alpha L - 1) + 1] \sinh(\alpha L) + \alpha L(2\nu - 1) \cosh(\alpha L) \}}{(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
 + & \frac{\alpha^2 (2\nu^2 + \nu - 1) \alpha_T [\nu (-e^{2\alpha L}) + \alpha L(\alpha L - 2\nu) + \nu]}{(\nu - 1) (2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)},
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
d = & \frac{\alpha(2\nu^2 + \nu - 1)e^{\alpha L}\alpha_T [2\alpha^2 L \cos(\lambda L) + 2\alpha\lambda L \sin(\lambda L) + \alpha \cos(\lambda L) - \lambda \sin(\lambda L)]}{2(\nu - 1)(2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
& - \frac{\alpha(2\nu^2 + \nu - 1)e^{\alpha(-L)}\alpha_T [\alpha \cos(\lambda L) - \lambda \sin(\lambda L)]}{2(\nu - 1)(2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \\
& + \frac{\alpha^2(2\nu^2 + \nu - 1)(2\alpha L + e^{2\alpha L} - 1)\alpha_T}{2(\nu - 1)(-2\alpha^2 L^2 + \cosh(2\alpha L) - 1)}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Substituindo as constantes a , b , c e d , dadas pelas Eqs. (2.44) – (2.47), nas Eqs. (2.39) – (2.42),

$$\begin{aligned}
u_z(r, z, t) = & \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \alpha \\
& \left\{ \frac{e^{-(2L+z)\alpha} [f_1(\alpha, z)\alpha + f_2(\alpha, z)\cos(L\lambda) + f_3(\alpha, z)\lambda \sin(L\lambda)]}{2 + 4L^2\alpha^2 - 2\cosh(2L\alpha)} \right\} d\alpha d\lambda,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\sigma_{zz}(r, z, t) = \frac{Y}{(-1 + 2\nu)(-1 + \nu^2)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} J_0(\alpha r) f_4(\alpha, \lambda, z), \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, z, t) = & \frac{Y}{(1 + \nu)(-1 + \nu)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \\
& \left[\frac{1}{r} J_1(\alpha r) f_5(\alpha, \lambda, z) + \alpha J_0(\alpha r) f_6(\alpha, \lambda, z) \right] d\alpha d\lambda,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\phi\phi}(r, z, t) = & \frac{Y}{(1 + \nu)(-1 + \nu)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \\
& \left\{ -\frac{1}{d} J_1(\alpha r) f_7(\alpha, \lambda, z) + J_0(\alpha r) f_8(\alpha, \lambda, z) \right\} d\alpha d\lambda
\end{aligned} \tag{2.51}$$

em que

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha, z) = & e^{4\alpha L}(-2\nu + \alpha z + 2) + e^{2\alpha(L+z)} [2\alpha L(\alpha L - 2\nu - \alpha z + 2) - 2\nu + \alpha(-z) + 2] \\
& - e^{2\alpha L} \{ \alpha [2L(\alpha L + 2\nu - \alpha z - 2) + z] - 2\nu + 2 \} + e^{2\alpha z} (2\nu + \alpha z - 2),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\alpha, z) = & e^{\alpha L} \{ -\alpha L + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L + 2\nu + \alpha z - 2) + e^{2\alpha z} [\alpha L(4\nu + 2\alpha z - 3) - 2\nu - \alpha z + 2] \\
& - e^{2\alpha L} [\alpha L(-4\nu + 2\alpha z + 3) - 2\nu + \alpha z + 2] - 2\nu + \alpha z + 2 \},
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$f_3(\alpha, z) = e^{\alpha L} \{ \alpha L + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L + 2\nu + \alpha z - 1) + e^{2\alpha L} [\alpha L(4\nu - 2\alpha z - 3) - 2\nu + \alpha z + 1] - e^{2\alpha z} [\alpha L(4\nu + 2\alpha z - 3) + 2\nu + \alpha z - 1] + 2\nu - \alpha z - 1 \}, \quad (2.54)$$

$$f_4(\alpha, \lambda, z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha^3 (2\nu^2 + \nu - 1) e^{-\alpha(2L+z)}}{-2\alpha^2 L^2 + \cosh(2\alpha L) - 1} \right\} \left\{ [-2e^{2\alpha L} (2\alpha^2 L^2 + 1) + e^{4\alpha L} + 1] e^{\alpha z} \cos(\lambda z) + e^{\alpha L} \cos(\lambda L) \right. \\ \left. \{ \alpha L + e^{2\alpha z} [2\alpha^2 Lz - \alpha(L+z) + 1] + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L + \alpha z - 1) + e^{2\alpha L} [\alpha(2\alpha Lz + L + z) + 1] - \alpha z - 1 \} \right. \\ \left. + \lambda e^{\alpha L} \sin(\lambda L) \{ z (e^{2\alpha L} - 1) (e^{2\alpha z} - 1) + L [e^{2\alpha L}(2\alpha z + 1) - e^{2\alpha(L+z)} + e^{2\alpha z}(1 - 2\alpha z) - 1] \} \right. \\ \left. - e^{4\alpha L}(\alpha z + 1) + e^{2\alpha(L+z)} \{ \alpha [2\alpha L(L-z) + 2L - z] + 1 \} + e^{2\alpha L} \{ \alpha [2\alpha L(L-z) - 2L + z] + 1 \} + e^{2\alpha z}(\alpha z - 1) \right\}, \quad (2.55)$$

$$f_5(\alpha, \lambda, z) = \frac{1}{2} \alpha \left\{ \left[\frac{1}{(2\nu - 1)(2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1)} \right] (2\nu^2 + \nu - 1) e^{\alpha(-z)} \{ 2\alpha L \cosh(\alpha L) [\lambda(1 - 2\nu) \sin(\lambda L) \right. \\ \left. - 2\alpha\nu \cos(\lambda L)] + e^{-\alpha(L+z)} \{ 2\alpha e^{\alpha(L+2z)} \{ \cosh(\alpha z) [2\alpha^2 L(z - L) - 2\nu + 1] + \alpha(-4L\nu + 2L + z) \sinh(\alpha z) \right. \\ \left. + (2\nu - 1) \cosh(\alpha(2L - z)) + \alpha z \sinh(\alpha(2L - z)) \} + \lambda e^{\alpha z} \sin(\lambda L) (2\alpha L\nu + e^{2\alpha(L+z)}(\alpha L + 2\nu - \alpha z - 2) \right. \\ \left. + e^{2\alpha z} [\alpha L(-4\nu + 2\alpha z + 3) - 2\nu + \alpha z + 2] + e^{2\alpha L} [-2\alpha L(\nu + \alpha z - 1) + 2\nu + \alpha z - 2] - 2\nu + \alpha(-z) + 2 \} \right. \\ \left. + \alpha e^{\alpha z} \cos(\lambda L) \{ \alpha L(2\nu - 1) + e^{2\alpha(L+z)}(\alpha L + 2\nu - \alpha z - 1) - e^{2\alpha L} [\alpha L(2\nu + 2\alpha z - 3) + 2\nu + \alpha z - 1] + \right. \\ \left. e^{2\alpha z} [\alpha L(4\nu - 2\alpha z - 3) - 2\nu + \alpha z + 1] + 2\nu + \alpha z - 1 \} \right\} + 2\alpha(\nu + 1) \cos(\lambda z) \}, \quad (2.56)$$

$$f_6(\alpha, \lambda, z) = \{ \nu + 1 \} \left\{ \lambda^2 \cos(\lambda z) - \alpha \left[\frac{1}{-2e^{2\alpha L} (2\alpha^2 L^2 + 1) + e^{4\alpha L} + 1} \right] e^{\alpha(-z)} \{ \alpha \{ e^{2\alpha(L+z)} \right. \\ \left. [2\alpha^2 L(L-z) - \alpha(2L+z) - 1] + e^{4\alpha L}(1 - \alpha z) + e^{2\alpha L} \{ \alpha [2\alpha L(L-z) + 2L + z] - 1 \} \right. \\ \left. + e^{2\alpha z}(\alpha z + 1) \} + e^{\alpha L} \{ \lambda \sin(\lambda L) \{ -\alpha L + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L + \alpha z + 2) \right. \\ \left. + e^{2\alpha L} [\alpha L(2\alpha z - 3) - \alpha z + 2] - e^{2\alpha z} [\alpha L(2\alpha z + 3) + \alpha z + 2] + \alpha z - 2 \} \right. \\ \left. + \alpha \cos(\lambda L) (\alpha L + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L + \alpha z + 1) + e^{2\alpha L} [\alpha L(2\alpha z - 3) + \alpha z - 1] \right. \\ \left. + e^{2\alpha z} [\alpha L(2\alpha z + 3) - \alpha z - 1] - \alpha z + 1 \} \right\}, \quad (2.57)$$

$$f_7(\alpha, \lambda, z) = \frac{1}{2} \alpha \left\{ 2\alpha(\nu + 1) \cos(\lambda z) - \left[\frac{1}{2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1} \right] \right. \\ \left. (2\nu^2 + \nu - 1) e^{-\alpha z} \{ 2\alpha L \cosh(\alpha L) [2\alpha\nu \cos(\lambda L) + \lambda(2\nu - 1) \sin(\lambda L)] + e^{-\alpha(L+z)} \right. \\ \left. \{ -2\alpha e^{\alpha(L+2z)} \{ \cosh(\alpha z) [2\alpha^2 L(z - L) - 2\nu + 1] + \alpha(-4L\nu + 2L + z) \sinh(\alpha z) \right. \\ \left. + (2\nu - 1) \cosh(\alpha(2L - z)) + \alpha z \sinh(\alpha(2L - z)) \} - \lambda e^{\alpha z} \sin(\lambda L) \{ 2\alpha L\nu + e^{2\alpha(L+z)} \right. \\ \left. (\alpha L + 2\nu - \alpha z - 2) + e^{2\alpha z} [\alpha L(-4\nu + 2\alpha z + 3) - 2\nu + \alpha z + 2] + e^{2\alpha L} \right. \\ \left. [-2\alpha L(\nu + \alpha z - 1) + 2\nu + \alpha z - 2] - 2\nu - \alpha z + 2 \} + \alpha e^{\alpha z} \cos(\lambda L) \{ -2\nu(\alpha L + 1) + \alpha L \right. \\ \left. + e^{2\alpha z} [\alpha L(-4\nu + 2\alpha z + 3) + 2\nu - \alpha z - 1] + e^{2\alpha(L+z)}(-\alpha L - 2\nu + \alpha z + 1) \right. \\ \left. + e^{2\alpha L} [\alpha L(2\nu + 2\alpha z - 3) + 2\nu + \alpha z - 1] - \alpha z + 1 \} \right\}, \quad (2.58)$$

$$f_8(\alpha, \lambda, z) = \{ \nu + 1 \} \left\{ \alpha \left[\frac{1}{2\alpha^2 L^2 - \cosh(2\alpha L) + 1} \right] \nu e^{-\alpha(2L+z)} \{ + e^{\alpha L} \{ -\lambda \sin(\lambda L) \right. \\ \left. [e^{2\alpha L}(2\alpha L - 1) - e^{2\alpha(L+z)} + (2\alpha L + 1)e^{2\alpha z} + 1] - \alpha \cos(\lambda L) [e^{2\alpha L}(2\alpha L + 1) \right. \\ \left. - e^{2\alpha(L+z)} + (1 - 2\alpha L)e^{2\alpha z} - 1] \} + \alpha [e^{2\alpha L}(2\alpha L - 1) \right. \\ \left. + e^{4\alpha L} - (2\alpha L + 1)e^{2\alpha(L+z)} + e^{2\alpha z}] \} + (\alpha^2 + \lambda^2) \cos(\lambda z) \right\}. \quad (2.59)$$

2.5 Componentes de stress generalizadas

Define-se as componentes generalizadas de stress como

$$\sigma_i = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma_{ii} dz. \quad (2.60)$$

Substituindo as Eqs. (2.49, 2.50, 2.51) separadamente na Eq. (2.60),

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} J_0(\alpha r) \alpha \\ & \left\{ \frac{2\alpha [\lambda L \sin(\lambda L) - 4 \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) \cos^2(\frac{\lambda L}{2})]}{\alpha L^2 + L \sinh(\alpha L)} + \frac{(\alpha^2 - \lambda^2) \sin(\lambda L)}{\lambda L} \right\} d\alpha d\lambda, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \alpha \\ & \frac{J_1(\alpha r)}{r} \left\{ \frac{[\alpha^2 + \lambda^2(1 - 2\nu)] \sin(\lambda L)}{\alpha \lambda L} + \frac{2\nu [\lambda L \sin(\lambda L) - 4 \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) \cos^2(\frac{\lambda L}{2})]}{L(\alpha L + \sinh(\alpha L))} \right\} d\alpha d\lambda, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \alpha \left\{ -\frac{1}{r} J_1(\alpha r) + \alpha J_0(\alpha r) \right\} \\ & \left\{ \frac{[\alpha^2 + \lambda^2(1 - 2\nu)] \sin(\lambda L)}{\lambda L} + \frac{2\alpha \nu [\lambda L \sin(\lambda L) - 4 \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) \cos^2(\frac{\lambda L}{2})]}{L(\alpha L + \sinh(\alpha L))} \right\} d\alpha d\lambda. \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.6 Componentes de stress generalizadas para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica

Para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica³, a temperatura apresentará pequena variação ao longo da direção axial, especialmente se efeitos de troca de calor com o meio circundante são desprezados, pode-se assumir a aproximação [31]:

$$T(\alpha, \lambda, t) = T(\alpha, t)\sqrt{2\pi} \delta(\lambda), \quad (2.64)$$

em que $\delta(\lambda)$ é a função delta de Dirac para a variável λ . Substituindo a Eq. (2.64) nas Eqs. (2.61), (2.62) e (2.63),

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(\alpha, t) J_0(\alpha r) \alpha \left[1 + \frac{4(1 - \cosh(L\alpha))}{L^2 \alpha^2 + L\alpha \sinh(L\alpha)} \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(\alpha, t) \frac{1}{r} J_1(\alpha r) \left[1 - \frac{4\nu(-1 + \cosh(L\alpha))}{L^2 \alpha^2 + L\alpha \sinh(L\alpha)} \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r, t) = & \\ & \frac{Y}{-1 + \nu} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(\alpha, t) \left[-\frac{1}{r} J_1(\alpha r) + \alpha J_0(\alpha r) \right] \\ & \left[1 - \frac{4\nu(-1 + \cosh(L\alpha))}{L^2 \alpha^2 + L\alpha \sinh(L\alpha)} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Essas são as componentes de stress generalizadas para amostras com baixo coeficiente de absorção óptico, aqui definidas como componentes de stress para o modelo LAM⁴.

Substituindo a Eq. (2.64) na Eq. (2.48), a componente azimutal do deslocamento para o modelo LAM, é

$$\begin{aligned} u_z(r, t) = & \\ & \frac{1 + \nu}{2(-1 + \nu)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(\alpha, t) \left\{ \frac{[-2\alpha L e^{\alpha L} + e^{2\alpha L} - 1] e^{-\alpha(2L+z)}}{\alpha + 2\alpha^3 L^2 - \alpha \cosh(2\alpha L)} \right. \\ & \left[-e^{2\alpha L}(-2\nu + \alpha z + 2) + e^{\alpha L}(-\alpha L - 2\nu + \alpha z + 2) \right. \\ & \left. \left. + e^{\alpha(L+2z)}(\alpha L - 2\nu - \alpha z + 2) + e^{2\alpha z}(2\nu + \alpha z - 2) \right] \right\} J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (2.68)$$

³No limite de $\beta \rightarrow 0$

⁴Do inglês Low Absorption Model (LAM)

Variação do caminho óptico

3.1 Introdução

Em sistemas lasers de alta potência, os componentes ópticos estão sujeitos a efeitos termicamente induzidos que podem ocasionar distorções na frente de onda do feixe de laser, afetando a estabilidade e a qualidade do feixe. Essas distorções resultam principalmente de efeitos relacionados ao aumento de temperatura, como mudança da densidade, deformação térmica e efeitos fotoelásticos, que alteram o caminho óptico do feixe dentro do material. Dependendo da espessura do material investigado, o tratamento matemático da variação do caminho óptico pode ser realizado utilizando as aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain* [23,28,32,33]. No intuito de obter um tratamento matemático para a variação do caminho óptico termicamente induzido, foi desenvolvido o modelo teórico para sólidos semi-transparentes, homogêneos, isotrópico, livres para se expandirem, sujeitos a uma carga térmica axialmente simétrica e que pode ser utilizado para qualquer espessura [34,35]. O caminho óptico de um feixe de laser atravessando um material de espessura L , é definido por

$$S(r, t) = \int_{b(r,0,t)}^{b(r,L,t)} n(r, z, t) dz, \quad (3.1)$$

com

$$b(r, z, t) = z + u_z(r, z, t), \quad (3.2)$$

em que $n(r, z, t)$ descreve a distribuição do índice de refração. É possível escrever

$$n(r, z, t) = n_0 + \Delta n(r, z, t), \quad (3.3)$$

em que n_0 e L são o índice de refração e o comprimento da amostra antes da incidência do feixe de laser ($t = 0$) e $\Delta n(r, z, t)$ a variação do índice de refração induzido pelo efeito termoelástico. Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.1),

$$S(r, t) = \int_{b(r,0,t)}^{b(r,L,t)} [n_0 + \Delta n(r, z, t)] dz, \quad (3.4)$$

que fornece

$$S(r, t) = n_0 [b(r, L, t) - b(r, 0, t)] + \int_{b(r,0,t)}^{b(r,L,t)} \Delta n(r, z, t) dz. \quad (3.5)$$

Pode-se descrever a variação do índice de refração em termos das componentes térmica e de stress como

$$\Delta n(r, z, t) = \Delta n_{th}(r, z, t) + \Delta n_{st}(r, z, t). \quad (3.6)$$

Os sub-índices st e th referem-se às contribuições de stress e térmicas, respectivamente. Substituindo a Eq. (3.6) na Eq. (3.5),

$$\begin{aligned} S(r, t) &= n_0 [b(r, L, t) - b(r, 0, t)] \\ &+ \int_{b(r,0,t)}^{b(r,L,t)} \Delta n_{th}(r, z, t) dz + \int_{b(r,0,t)}^{b(r,L,t)} \Delta n_{st}(r, z, t) dz. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando a Eq. (3.2) e que u_z e $\Delta n(r, z, t)$ são pequenos, ou seja, $u_z \ll L$ e $\Delta n(r, z, t) \ll n_0$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} S(r, t) &= n_0 L + n_0 [u_z(r, L, t) - u_z(r, 0, t)] \\ &+ \int_0^L \Delta n_{th}(r, z, t) dz + \int_0^L \Delta n_{st}(r, z, t) dz. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A expressão para a contribuição da variação de temperatura, que ocasiona a variação do índice de refração, pode ser escrita como

$$\Delta n_{th}(r, z, t) = \left(\frac{dn}{dT} \right) T(r, z, t). \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8),

$$\begin{aligned} S(r, t) &= n_0 L + n_0 [u_z(r, L, t) - u_z(r, 0, t)] \\ &+ \left(\frac{dn}{dT} \right) \int_0^L T(r, z, t) dz + \int_0^L \Delta n_{st}(r, z, t) dz \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seguindo a notação de Klein [23], a contribuição para a variação do caminho óptico devida ao stress pode ser separada em duas componentes¹

¹Ver apêndice C.

$$\Delta n_{st}(r, z, t) = \Delta n_{st+}(r, z, t) + \Delta n_{st-}(r, z, t), \quad (3.11)$$

com

$$\Delta n_{st+}(r, z, t) = -\frac{n_0^3}{4} [(q_{\parallel} + q_{\perp}) (\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + 2q_{\perp} \sigma_{zz}], \quad (3.12)$$

e

$$\Delta n_{st-}(r, z, t) = -\frac{n_0^3}{4} [(q_{\parallel} - q_{\perp}) (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})], \quad (3.13)$$

em que q_{\parallel} e q_{\perp} são os coeficientes de stress óptico paralelo e perpendicular à direção de aplicação do stress. Substituindo as Eqs. (3.12) e (3.13) na Eq. (3.10),

$$\begin{aligned} S(r, t) &= n_0 L + n_0 [u_z(r, L, t) - u_z(r, 0, t)] \\ &+ \left(\frac{dn}{dT} \right) \int_0^L T(r, z, t) dz \\ &- \frac{n_0^3}{4} \int_0^L [(q_{\parallel} + q_{\perp}) (\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + 2q_{\perp} \sigma_{zz}] dz \\ &- \frac{n_0^3}{4} \int_0^L [(q_{\parallel} - q_{\perp}) (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})] dz. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Escrevendo cada contribuição separadamente,

$$S(r, t) = S_0 + S_{exp}(r, t) + S_{th}(r, t) + S_{st+}(r, t) + S_{st-}(r, t), \quad (3.15)$$

com

$$S_0 = n_0 L, \quad (3.16)$$

$$S_{exp}(r, t) = n_0 [u_z(r, L, t) - u_z(r, 0, t)], \quad (3.17)$$

$$S_{th}(r, t) = \left(\frac{dn}{dT} \right) \int_0^L T(r, z, t) dz, \quad (3.18)$$

$$S_{st+}(r, t) = -\frac{n_0^3}{4} \int_0^L [(q_{\parallel} + q_{\perp}) (\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + 2q_{\perp} \sigma_{zz}] dz, \quad (3.19)$$

e

$$S_{st-}(r, t) = -\frac{n_0^3}{4} \int_0^L [(q_{\parallel} - q_{\perp}) (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})] dz. \quad (3.20)$$

Integrando as Eqs. (3.19) e (3.20) em relação à variável z ,

$$S_{st+}(r, t) = -\frac{n_0^3}{4} [(q_{\parallel} + q_{\perp}) (\sigma_r + \sigma_{\phi}) + 2q_{\perp} \sigma_z] \quad (3.21)$$

e

$$S_{st-}(r, t) = -\frac{n_0^3}{4} [(q_{\parallel} - q_{\perp}) (\sigma_r - \sigma_{\phi})]. \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. (2.48) na Eq. (3.17),

$$S_{exp}(r, t) = n_0(1 + \nu) \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \left\{ \frac{2 [\lambda \sinh(\alpha L) \sin(\lambda L) + 2\alpha \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) (\cos(\lambda L) + 1)]}{\alpha L + \sinh(\alpha L)} \right\} J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.23)$$

que é a contribuição para a variação do caminho óptico devida à deformação térmica. Substituindo as Eqs. (2.61), (2.62) e (2.63) nas Eqs. (3.21) e (3.22),

$$S_{st+}(r, t) = \frac{n_0^3 L Y}{4(1 - \nu)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{L\lambda [L\lambda + \sinh(L\alpha)]} \left\{ \sin(\lambda L) (\sinh(\alpha L) [\alpha^2 q_{\parallel} + \lambda^2 q_{\parallel} - 2\lambda^2 \nu (q_{\parallel} + q_{\perp}) + 3\alpha^2 q_{\perp} - \lambda^2 q_{\perp} + \alpha L (\alpha^2 + \lambda^2) (q_{\parallel} + 3q_{\perp})] - 8\alpha\lambda \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) \cos^2(\frac{\lambda L}{2}) [\nu q_{\parallel} + (\nu + 2)q_{\perp}] \right\} \right\} J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.24)$$

$$S_{st-}(r, t) = \frac{n_0^3 L Y}{4(1 - \nu)} \alpha_T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{(\alpha^2 + \lambda^2)} (q_{\parallel} - q_{\perp}) \left\{ \frac{[\alpha^2 + \lambda^2(1 - 2\nu)] \sin(\lambda L)}{\lambda L} + \frac{2\alpha\nu [\lambda L \sin(\lambda L) - 4 \sinh^2(\frac{\alpha L}{2}) \cos^2(\frac{\lambda L}{2})]}{L(\alpha L + \sinh(\alpha L))} \right\} J_2(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.25)$$

que são as contribuições para a variação do caminho óptico devido aos efeitos de stress. As relações acima nos permite obter de uma forma simplificada a variação do caminho óptico em termos da temperatura no espaço de Hankel-Fourier.

3.2 Variação do caminho óptico para materiais com absorção óptica descrito pela lei de Beer

Para materiais cuja a absorção óptica do feixe de laser ao longo da direção azimutal possa ser descrita pela lei de Beer, $I(z) = I_0 e^{-\beta z}$, a variação de temperatura pode ser escrita da forma aproximada,

$$T(r, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty T(\alpha, \lambda, t) \cos(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.26)$$

com $T(\alpha, \lambda, t)$ descrita no apêndice B, pela Eq. (B.36), desde que efeitos de acoplamento com o fluido circundante possam ser negligenciados [36]. Uma discussão mais detalhada sobre a validade desta aproximação pode ser encontrada na dissertação de mestrado de M. P. Belançon [31].

A variação do caminho óptico deve-se à combinação das contribuições térmica, de deformação e a média das contribuições do stress. Fazendo uso das Eqs. (3.18), (3.23), (3.24) e (3.25), a expressão para variação do caminho óptico é

$$\Delta S(r, t) = S(r, t) - S_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty L \chi^+(\alpha, \lambda) T(\alpha, \lambda, t) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.27)$$

em que

$$\chi^+ = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{\sin(L\lambda)}{L\lambda} + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1-\nu)} p^+(\alpha, \lambda) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T q(\alpha, \lambda), \quad (3.28)$$

com

$$p^+(\alpha, \lambda) = - \frac{1}{L\lambda(\alpha^2 + \lambda^2)(L\alpha + \sinh(L\alpha))} \left\{ 2\alpha\lambda (q_{\parallel}\nu + q_{\perp}\nu + 2q_{\perp}) (1 + \cos(L\lambda))(\cosh(L\alpha) - 1) - \sin(L\lambda) [L(q_{\parallel} + 3q_{\perp})\alpha(\alpha^2 + \lambda^2)] - \sin(L\lambda) \sinh(L\alpha) [(q_{\parallel} + 3q_{\perp})\alpha^2 + \lambda^2(q_{\parallel} - q_{\perp} - 2q_{\parallel}\nu - 2q_{\perp}\nu)] \right\}. \quad (3.29)$$

e

$$q(\alpha, \lambda) = \frac{2\alpha}{L\alpha(e^{2L\alpha} + 2L\alpha e^{L\alpha} - 1)(\alpha^2 + \lambda^2)} [(e^{L\alpha} - 1)^2 \alpha(1 + \cos(L\alpha)) - (1 - e^{2L\alpha})\lambda \sin(L\lambda)] \quad (3.30)$$

Esse modelo, aqui denominado BAM², é o primeiro modelo semi-analítico que descreve a variação do caminho óptico independente da espessura da amostra em termos da variação de temperatura no espaço de Hankel-Fourier.

²Do inglês Beer Absorption Model

3.3 Variação do caminho óptico para materiais com absorção óptica moderada

Conhecendo as propriedades físicas de um dado material, para determinar a variação do caminho óptico utilizando a Eq. (3.27) é necessário realizar a integração sobre as variáveis α e λ . Uma vez que não possuem solução analítica, estas integrais devem ser resolvidas numericamente. Se a Eq. (3.27) for utilizada como equação de ajuste de dados experimentais (utilizando de uma rotina de mínimos quadrados), essas integrações necessitarão de um tempo computacional considerável, o que pode inviabilizar uma análise em tempo real. Para amostras cuja absorção óptica possa ser considerada moderada, a expressão para a variação de temperatura pode ser escrita como [31]

$$T(r, z, t) = T(r, t)e^{-\beta z}, \quad (3.31)$$

que, no espaço Hankel-Fourier fica dada por

$$T(\alpha, \lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} T(\alpha, t). \quad (3.32)$$

Substituindo a Eq. (3.32), na Eq. (3.27) e realizando a integração na variável λ ,

$$\Delta S(r, t) = \int_0^\infty L \chi_\beta^+(\alpha) T(\alpha, t) J_0(\alpha, r) \alpha d\alpha, \quad (3.33)$$

em que

$$\chi_\beta^+ = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{1 - e^{-\beta L}}{\beta L} + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} p_\beta^+(\alpha) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T q_\beta(\alpha), \quad (3.34)$$

com

$$\begin{aligned} p_\beta^+(\alpha) = & \frac{e^{-L\alpha}}{(L\alpha + \sinh(L\alpha))} \frac{e^{-L\beta}}{2L\beta(\beta^2 - \alpha^2)} \\ & \left\{ 2\alpha\beta(e^{-L\alpha-1})^2(e^{L\beta} + 1) [q_\parallel\nu + q_\perp(\nu + 2)] \right. \\ & + \beta^2(1 - e^{2L\alpha})(e^{L\beta} - 1) [2\nu(q_\parallel + q_\perp) - q_\parallel + q_\perp] \\ & \left. - 2\alpha e^{L\alpha}(e^{L\beta} - 1)(q_\parallel + 3q_\perp) [L(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \sinh(L\alpha)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} q_\beta(\alpha) = & \frac{4e^{-L\beta/2}}{L(\beta^2 - \alpha^2) [L\alpha + \sinh(L\alpha)]} \\ & \left[\beta \sinh(L\alpha) \sinh(L\beta/2) \right. \\ & \left. - 2\alpha \cosh(L\beta/2) \sinh(L\alpha/2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

O resultado da Eq. (3.33) deve ser aplicado apenas para amostras cuja absorção

óptica possa ser considerada moderada, tendo a vantagem de fornecer uma expressão matematicamente mais simples do que a fornecida pelo modelo BAM. A esse modelo dá-se o nome de ABAM.

3.4 Variação do caminho óptico para materiais com baixo coeficiente de absorção óptica

Para materiais cujo coeficiente de absorção óptica é muito pequeno³, a expressão para variação de temperatura pode ser escrita como

$$T(\alpha, \lambda, t) = T(\alpha, t) \sqrt{2\pi} \delta(\lambda). \quad (3.37)$$

Substituindo a Eq. (3.37) na Eq. (3.27), e realizando a integração na variável λ ,

$$\Delta S(r, t) = \int_0^\infty L \chi(\alpha) T(\alpha, t) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad (3.38)$$

em que

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) = & \left(\frac{dn}{dT} \right) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T \frac{4h(\alpha)}{L\alpha} \\ & + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} \left\{ (q_{\parallel} + 3q_{\perp}) - \frac{4 [q_{\parallel} \nu + q_{\perp} (2 + \nu)] h(\alpha)}{L\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

com

$$h(\alpha) = \frac{\cosh(L\alpha) - 1}{\sinh(\alpha L) + L\alpha} \quad (3.40)$$

Tomando os limites de $L \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$ na Eq. (3.38), é possível obter as expressões que descrevem a variação do caminho óptico nos limites de *plane-stress* e de *plane strain*, respectivamente, como

$$\Delta S(r, t)_0 = \chi_0 L \int_0^\infty T(\alpha, t) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad (3.41)$$

$$\Delta S(r, t)_\infty = \chi_\infty L \int_0^\infty T(\alpha, t) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad (3.42)$$

em que

$$\chi_0 = \left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4} (q_{\parallel} + q_{\perp}) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T, \quad (3.43)$$

$$\chi_\infty = \left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} (q_{\parallel} + 3q_{\perp}). \quad (3.44)$$

Os resultados apresentados anteriormente, representam um avanço substancial no

³O coeficiente de absorção óptica da amostra é tal que a aproximação $I(z) = I_0 e^{-\beta z} \approx 1$ pode ser utilizada. Referir-se-á a esta aproximação como LAM (Low Absorption Model).

tratamento dos efeitos termoelásticos induzidos via laser em materiais ópticos. Além de descrever a variação do caminho óptico para qualquer espessura, também permite incluir efeitos de atenuação do feixe devido a absorção ótica. A única aproximação introduzida está no fato de que o raio, ou a dimensão radial da amostra deve ser muito maior do que o raio efetivo da região onde ocorrem variações induzidas por efeitos termoelásticos. Como as dimensões dos feixes gaussianos estão na escala micrométrica e que para intervalos de tempo de exposição do material ao feixe de laser não muito grandes, essa aproximação tem-se mostrado eficiente. Para verificar isso, no próximo capítulo, utilizar-se-á o método dos elementos finitos para validar numericamente os resultados.

Simulações

4.1 Validação do modelo utilizando o método dos elementos finitos

4.1.1 O método dos elementos finitos

Com o intuito de avaliar a aproximação de amostra radialmente infinita utilizadas nos resultados obtidos neste trabalho, em comparação com o problema real (amostra finita), utilizou-se o método dos elementos finitos (MEF), comparando as soluções fornecidas por este método com os resultados obtidos pelos modelos propostos.

O MEF é uma técnica numérica para a solução de equações diferenciais sujeitas a condições de contorno, e consiste na divisão do domínio total em uma quantidade finita de subdomínios, chamados elementos, e na discretização de funções contínuas. Embora o sucesso da aplicação do MEF se deva ao desenvolvimento da computação digital, a ideia de aproximação por partes não é tão nova. De fato, Arquimedes utilizou o princípio do MEF para obter o valor aproximado da constante irracional π .

Atualmente, o MEF é utilizado em uma larga faixa de aplicações, como, por exemplo, para o estudo de sistemas lasers de alta potência [37, 38], em odontologia [39, 40], em fisiologia [41] e na engenharia de materiais [42–44].

Neste trabalho, utilizou-se o software Comsol, versão 4.2, para verificar a validade das expressões obtidas. O Comsol consiste em uma série de módulos que devem ser escolhidos a depender do sistema de interesse. Como exemplos de sistemas possíveis de serem resolvidos na versão 4.2, se encontram os módulos de mecânica estrutural (utilizados neste trabalho), acústica, microfluídica, eletricidade AC e DC, radiofrequência, dentre outros. A modelagem consiste em especificar o tipo de sistema a ser resolvido e desenhar a geometria do sistema especificando as condições de contorno, fontes de calor e um determinado número de elementos em uma dada malha, conforme representado na Fig. (4.1). Além dos passos anteriormente citados, deve-se especificar o valor das propriedades mecânicas, elétricas e térmicas presentes no sistema a ser resolvido.

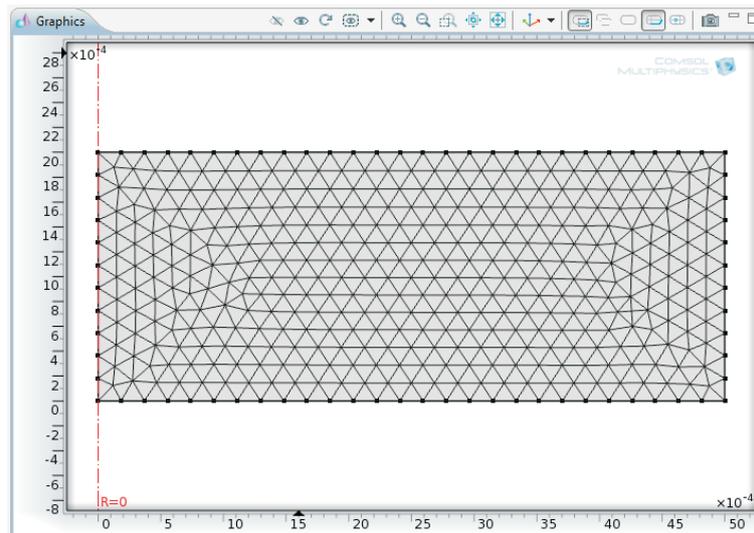


Figura 4.1: Representação da malha utilizando o software Comsol 4.2. A imagem tridimensional é obtida girando-se a figura em torno do eixo de simetria.

Ao obter a solução do sistema proposto, o software fornece a opção de construir gráficos em uma, duas ou três dimensões, tanto para o caso resolvido no tempo como para o caso estacionário. Como exemplo, na Fig. (4.2), tem-se o gráfico da simulação do deslocamento, devido à variação de temperatura em três dimensões.

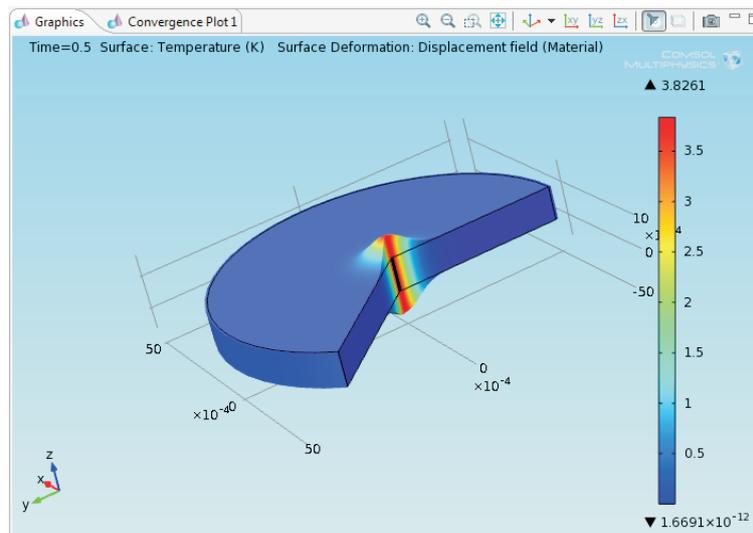


Figura 4.2: Perfil tridimensional da variação de temperatura e deformação térmica em um sistema com simetria radial, utilizando o software Comsol 4.2. Demais propriedades físicas utilizadas na simulação estão listadas na Tabela (4.1).

4.1.2 Validação das expressões para variação de temperatura

Como mencionado anteriormente, utilizou-se a comparação entre os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos com os resultados obtido pelas expressões dos modelos apresentadas neste trabalho. Para isso, foram utilizadas as propriedades físicas descritas na Tabela (4.1). Na Fig. (4.3), tem-se o perfil radial de temperatura para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica.

Propriedade		OFG		BK7		CAS		QX	
k	($W/m.K$)	0,7	[32]	1,114	[45]	1,35	[46]	0,85	[47]
c	($J/Kg.K$)	670,0	[32]	858,0	[45]	810,0	[46]	672,2	[47]
ρ	(kg/m^3)	3750,0	[32]	2510,0	[45]	2890,0	[46]	2810,0	[47]
Y	(GPa)	70,0	[32]	81,0	[45]	80,0	[46]	67,0	[47]
ν	—	0,31	[32]	0,208	[45]	0,23	[46]	0,24	[47]
dn/dT	($10^{-6}K^{-1}$)	-9,16	[32]	3,4	[45]	5,3	[46]	-2,1	[47]
n	—	1,465	[32]	1,516	[45]	1,63	[46]	1,540	[47]
α_T	($10^{-6}K^{-1}$)	14,9	[32]	7,11	[45]	6,9	[46]	8,30	[47]
D_{th}	($10^{-7}m^2/s$)	2,8	[32]	5,17	[45]	5,5	[46]	4,5	[47]
q_{\parallel}	($10^{-12}Pa^{-1}$)	0,234	[32]	-3,95	[45]	0,09	[46]	1,72	[47]
q_{\perp}	($10^{-12}Pa^{-1}$)	0,587	[32]	1,84	[45]	0,91	[46]	-0,575	[47]
β	(m^{-1})	1,00	[32]	0,4	[45]	10,0	[46]	2,48	[47]

Tabela 4.1: Propriedades físicas dos vidros utilizados nas simulações deste trabalho.

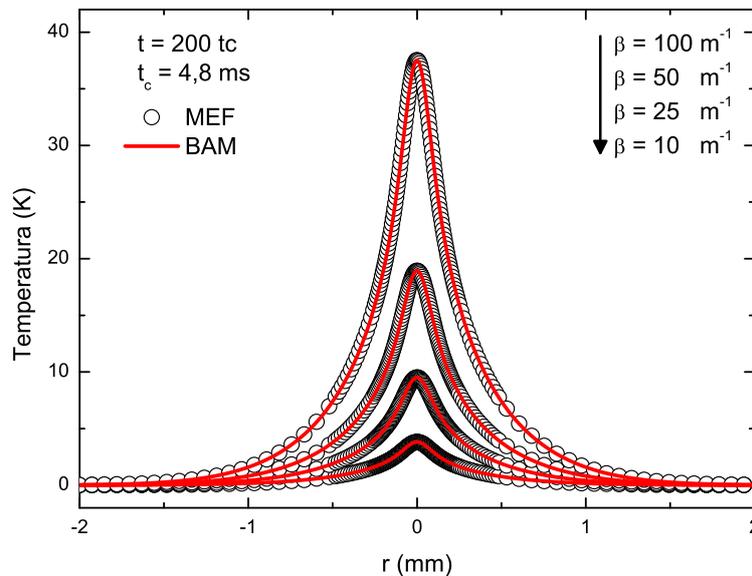


Figura 4.3: Dependência radial da variação de temperatura em função do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via o modelo BAM descrita pela Eq. (B.38) (linha contínua em cor vermelha).

Na Fig. (4.3), compara-se a dependência radial da variação de temperatura em função do coeficiente de absorção óptica, obtida utilizando o MEF e o modelo BAM, descrita pela

Eq. (B.38). Embora a equação para a variação de temperatura, descrita por este modelo, não considere a dimensão finita da amostra, o resultado da comparação mostra que as duas soluções apresentam boa concordância, independentemente do valor do coeficiente de absorção óptica, conforme mostrado na Fig. (4.4), para a dependência temporal em $z = r = 0$.

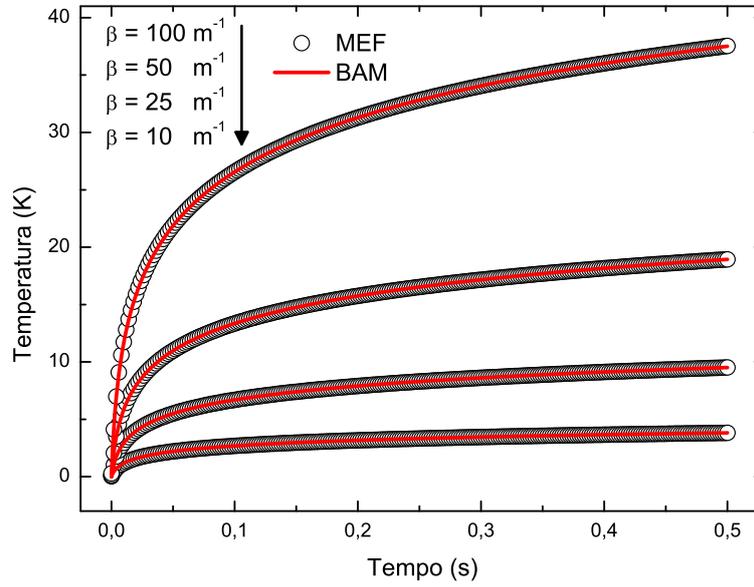


Figura 4.4: Dependência temporal da variação de temperatura em função do coeficiente de absorção óptica, em $z = r = 0$, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (B.38) (linha contínua em cor vermelha).

4.1.3 Validação das componentes de stress

As expressões que descrevem o stress gerado no material devido à variação de temperatura, obtidas no modelo BAM, também foram comparadas com as soluções obtidas utilizando o MEF, utilizando o software Comsol, conforme mostrado nas Figs. (4.5, 4.6, 4.7).

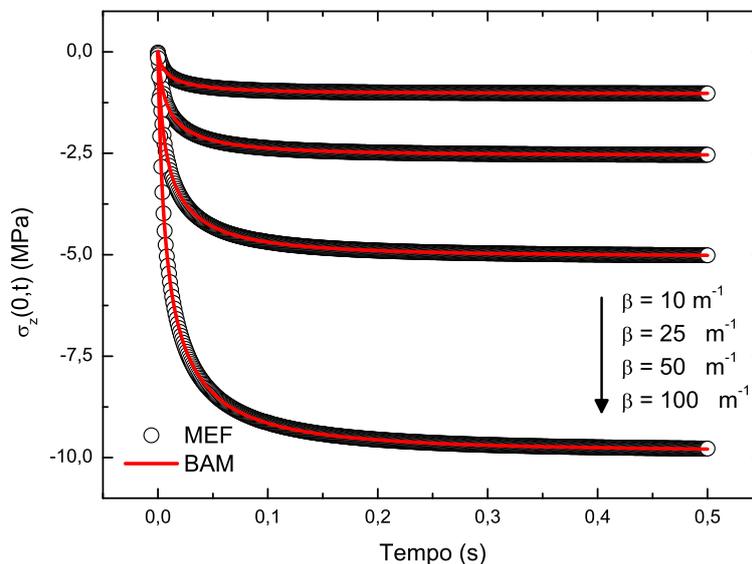


Figura 4.5: Dependência temporal da componente $\sigma_z(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.61) (linha contínua em cor vermelha).

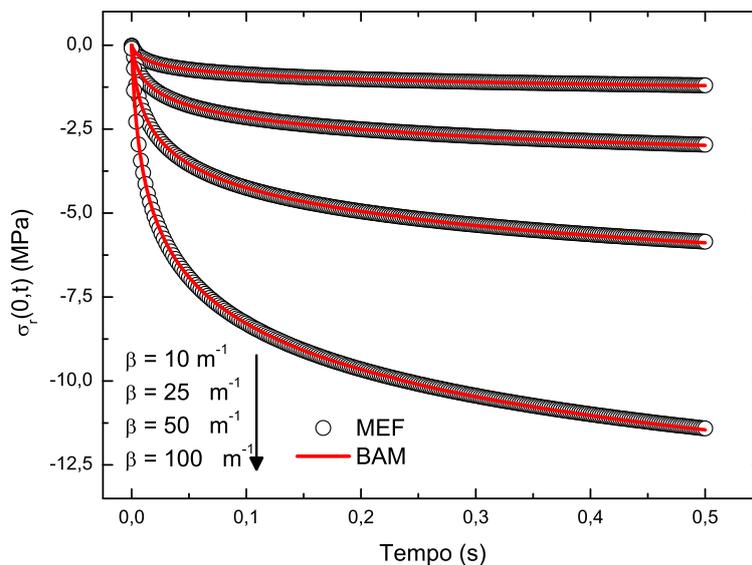


Figura 4.6: Dependência temporal da componente $\sigma_r(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.62) (linha contínua em cor vermelha).

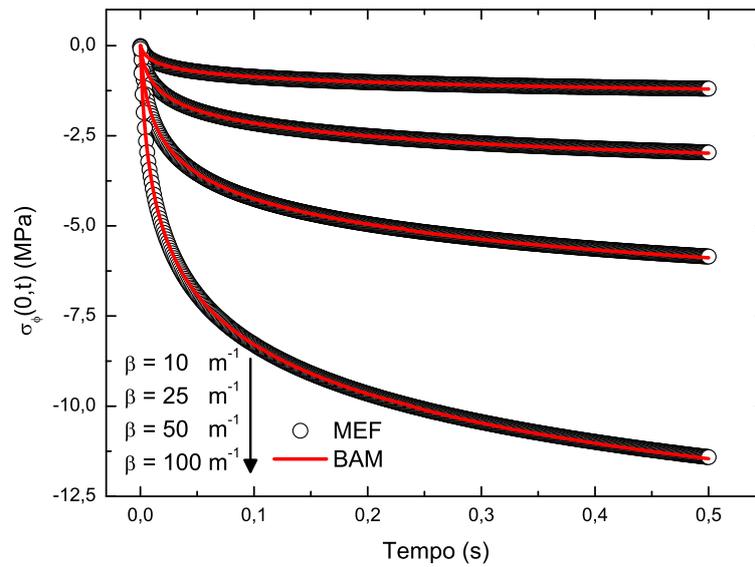


Figura 4.7: Dependência temporal da componente $\sigma_\phi(0, t)$ para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o MEF (círculos abertos) e utilizando a solução obtida via modelo BAM, descrita pela Eq. (2.63) (linha contínua em cor vermelha).

Quando comparadas com os resultados obtidos via MEF, as componentes de stress, obtidas pelo modelo BAM, apresentam boa concordância, independentemente do valor do coeficiente de absorção óptica, provando que as expressões do modelo BAM podem ser utilizadas para a descrição do stress induzido em um dado material devido à variação de temperatura. Este fato é de vital importância, uma vez que essas expressões são utilizadas para descrever a variação do caminho óptico.

4.2 Comparação entre os modelos

Buscando estabelecer os limites para a aplicação dos modelo ABAM e LAM frente ao modelo BAM, simulou-se as expressões para a variação de temperatura no regime radial e temporal para esses três modelos, utilizando as Eqs. (B.38), (B.40) e (B.41), conforme pode ser visto nas Figs (4.8 e 4.9).

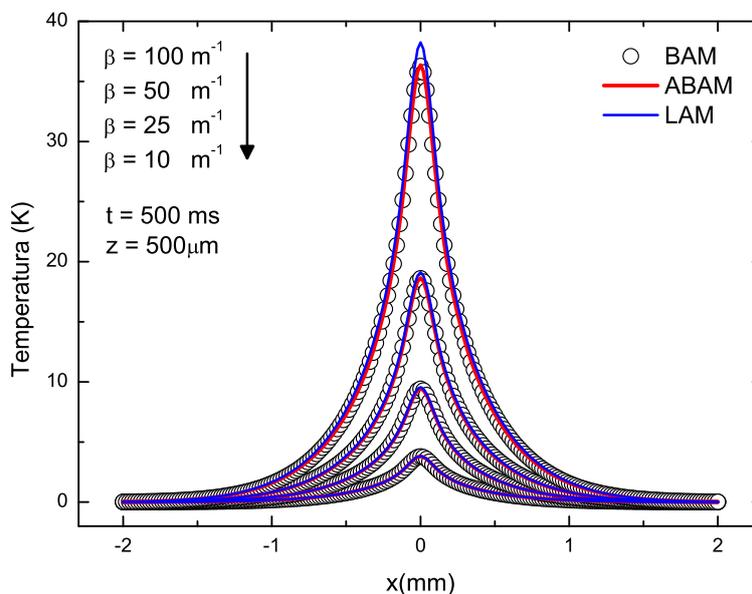


Figura 4.8: Dependência radial da variação de temperatura para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).

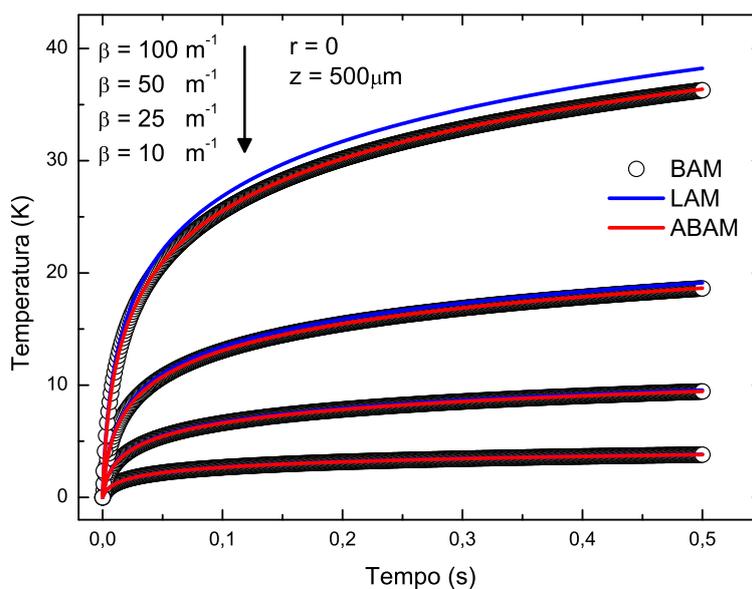


Figura 4.9: Dependência temporal da variação de temperatura para diferentes valores do coeficiente de absorção óptica, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).

Nas Figs. (4.8) e (4.9), nota-se que a variação de temperatura, quando descrita pelo modelo LAM e ABAM, apresenta um ligeiro desvio, se comparada à variação de temperatura descrita pelo modelo BAM. Com o intuito de avaliar o erro induzido ao se descrever a variação de temperatura com os modelos LAM e ABAM, a Fig. (4.10), mostra o erro que foi obtido utilizando a Eq. (4.1) em $r = 0$, $t = 100t_c$ e $z = 500\mu m$, para uma amostra com espessura de $L = 1mm$:

$$\delta T(r, z, t)(\%) = 100 \left| \frac{T(r, z, t)_{BAM} - T(r, z, t)_{LAM/ABAM}}{T(r, z, t)_{BAM}} \right|. \quad (4.1)$$

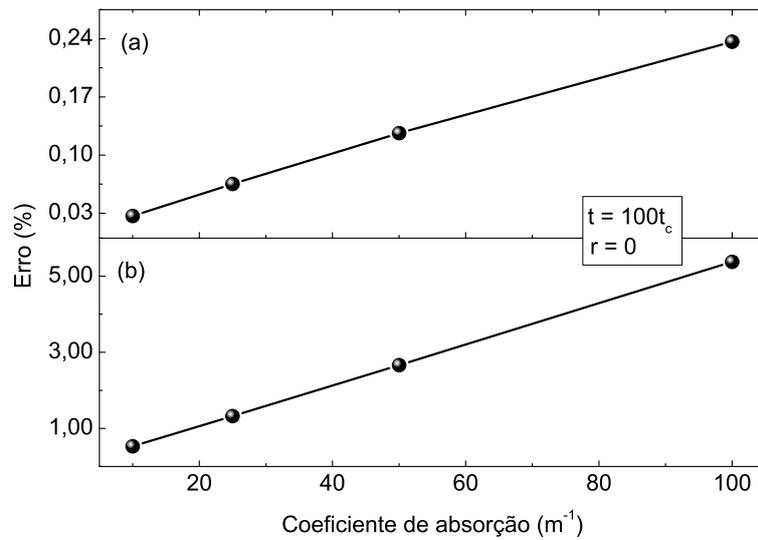


Figura 4.10: Erro percentual na descrição da variação de temperatura quando utilizado o modelo ABAM (a) e quando utilizado o modelo LAM (b) em relação à descrição da variação de temperatura descrita pelo modelo BAM.

Ainda no intuito de estabelecer os limites de aplicação dos modelos ABAM e LAM, comparou-se as expressões para a variação do caminho óptico em função do tempo utilizando as Eqs. (3.27), (3.33) e (3.38) para os modelos BAM, ABAM e LAM, respectivamente. Essa comparação pode ser vista na Fig. (4.11):

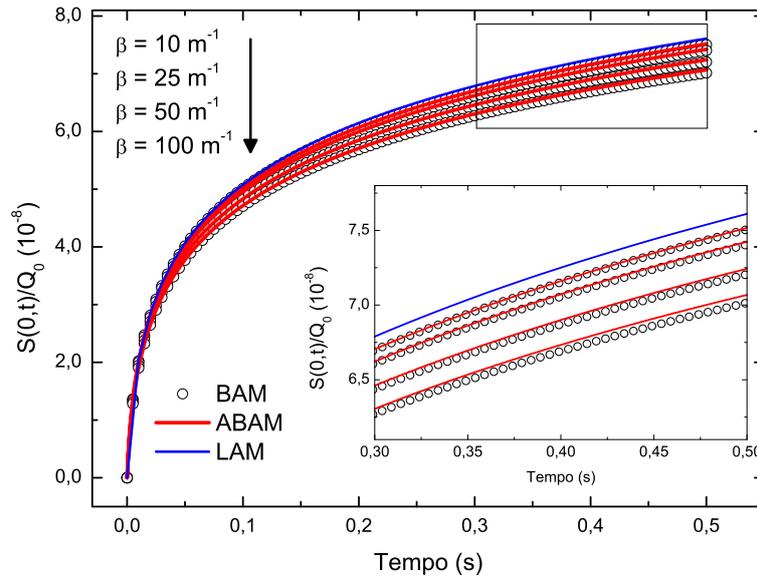


Figura 4.11: Variação do caminho óptico em função do tempo para diferentes valores do coeficiente de absorção, utilizando o modelo BAM (círculos abertos), o modelo ABAM (linha contínua em cor vermelha) e o modelo LAM (linha contínua em cor azul).

Quando normalizada pelo fator Q_0 , a expressão para a variação do caminho óptico descrita pelo modelo LAM não depende do coeficiente de absorção, fato este que é evidenciado na Fig. (4.11). Por outro lado, a expressão para a variação do caminho óptico descrita pelo modelo ABAM apresenta pequena diferença em relação ao modelo BAM. Na Fig. (4.12), tem-se o erro percentual ao se utilizar os modelos LAM e ABAM para descrever a variação do caminho óptico em função do coeficiente de absorção frente à descrição realizada com o modelo BAM. Foi utilizado a Eq. (4.2) em $r = 0$ e $t = 100t_c$:

$$\delta S(r, t) = 100 \left| \frac{S(r, t)_{BAM} - S(r, t)_{LAM/ABAM}}{S(r, t)_{BAM}} \right|. \quad (4.2)$$

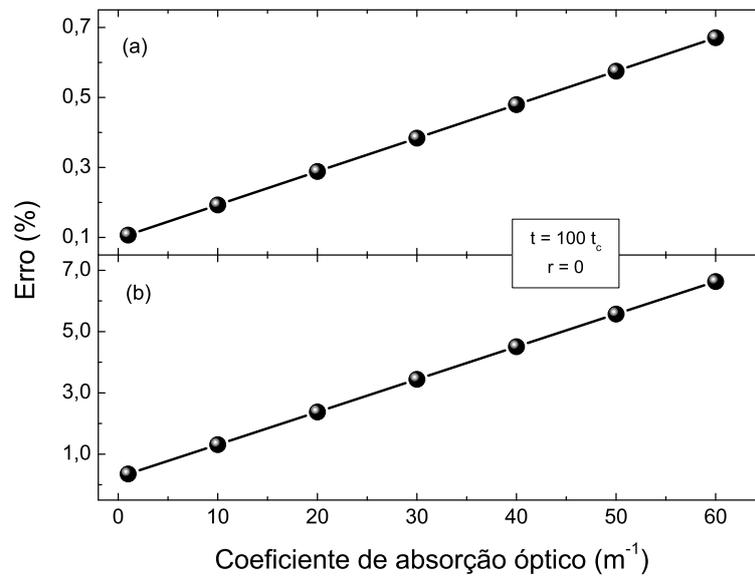


Figura 4.12: Erro percentual na descrição da variação do caminho óptico, quando utilizado o modelo ABAM (a) e LAM (b), comparados à descrição realizada com o modelo BAM.

A comparação entre os diferentes modelos é de grande importância no estabelecimento dos limites de aplicação de cada modelo em relação aos valores dos coeficientes de absorção óptica. Essencialmente, a escolha do modelo a ser aplicado, BAM, ABAM ou LAM depende do coeficiente de absorção óptica dos materiais a serem analisados e do tempo e da capacidade computacional disponível.

4.3 Variação do caminho óptico para diferentes materiais

Uma vez provada a validade das expressões para a variação de temperatura e para as componentes de stress através da comparação com os resultados obtidos pelo MEF, e estabelecidos os limites de aplicação dos modelos ABAM e LAM frente ao modelo BAM, é possível simular a variação do caminho óptico para diferentes materiais, investigando seu comportamento em função da espessura. Com este intuito, simulou-se a dependência temporal da variação do caminho óptico utilizando o modelo LAM (Eq.3.38) e as aproximações de *plane-stress* e *plane-strain* (Eqs. 3.41 e 3.42), para a posição $r = 0$, para os vidros borossilicato (BK7), aluminossilicato de cálcio (CAS), óxido-fluoreto (OFG) e o vidro fosfato (QX): As propriedades físicas utilizadas nas simulações da variação do caminho óptico para esses materiais estão listadas na Tabela (4.1). A utilização do modelo LAM para essas simulações deve-se ao valor do coeficiente de absorção óptica dos materiais utilizados ($< 10m^{-1}$). Os resultados das simulações para os quatro materiais podem ser vistos nas Figs. (4.13 - 4.16).

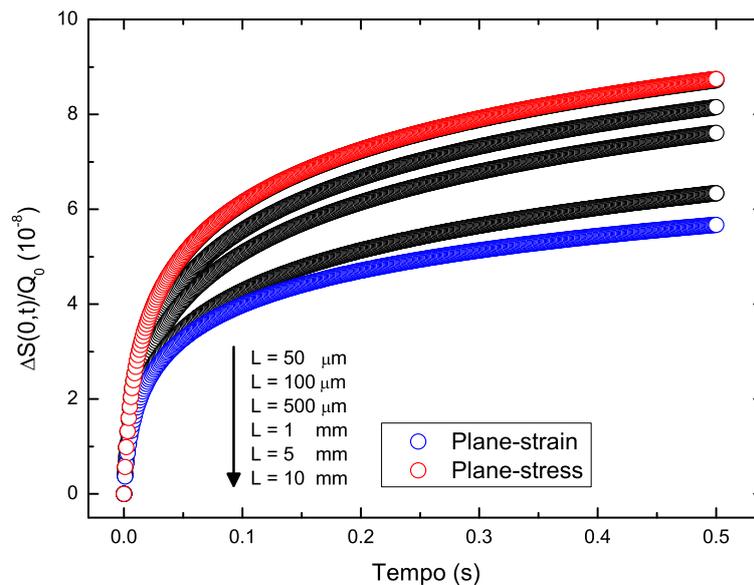


Figura 4.13: Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro BK7, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de *plane-stress* (círculos em cor vermelha) e a aproximação de *plane-strain* (círculos em cor azul).

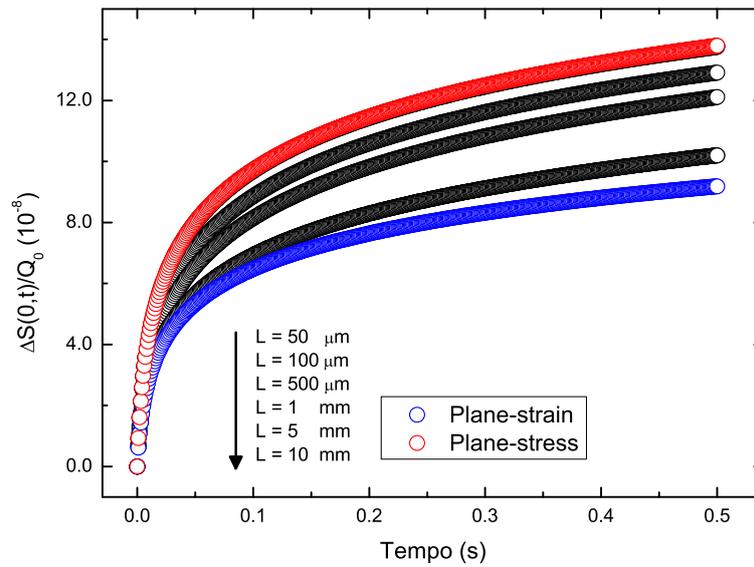


Figura 4.14: Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro CAS, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de *plane-stress* (círculos em cor vermelha) e a aproximação de *plane-strain* (círculos em cor azul).

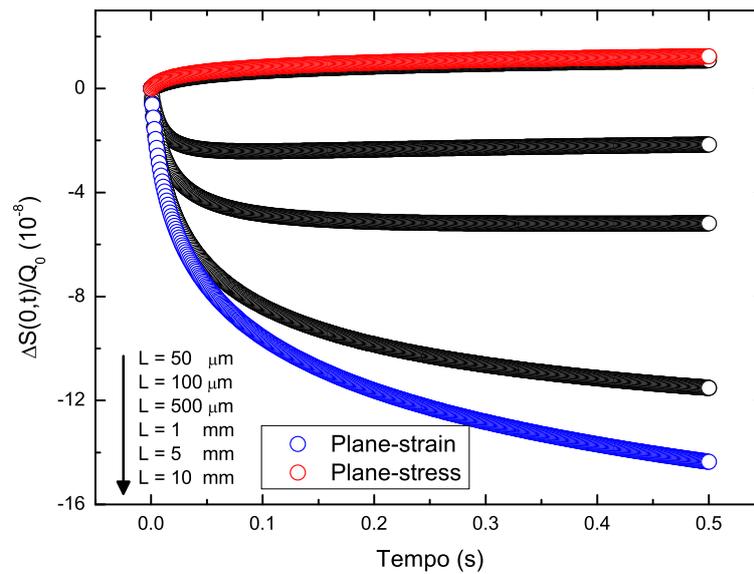


Figura 4.15: Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro OFG, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de *plane-stress* (círculos em cor vermelha) e a aproximação de *plane-strain* (círculos em cor azul).

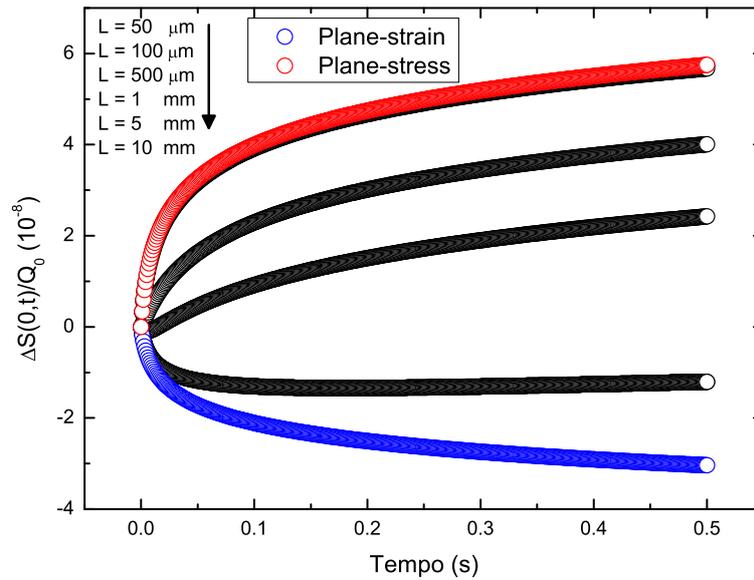


Figura 4.16: Dependência temporal da variação do caminho óptico para o vidro QX, para diferentes valores de espessura, utilizando o modelo LAM (círculos em cor preta), a aproximação de *plane-stress* (círculos em cor vermelha) e a aproximação de *plane-strain* (círculos em cor azul).

Utilizando as Eqs. (3.43) e (3.44), que descrevem o coeficiente térmico da variação do caminho óptico, pode-se definir os fatores de contribuição para a variação do caminho óptico devido à variação do índice de refração, para os limites de *plane-stress* e *plane-strain*, conforme descrito pelas Eqs. (4.3) e (4.4):

$$\chi_0 = \left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4} (q_{\parallel} + q_{\perp}) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T \quad (4.3)$$

$$\chi_{\infty} = \left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} (q_{\parallel} + 3q_{\perp}) \quad (4.4)$$

O percentual de contribuição de cada efeito para a variação do caminho óptico é mostrado nas Figs. (4.17) e (4.18), para os limites de *plane-stress* e *plane-strain*, respectivamente.

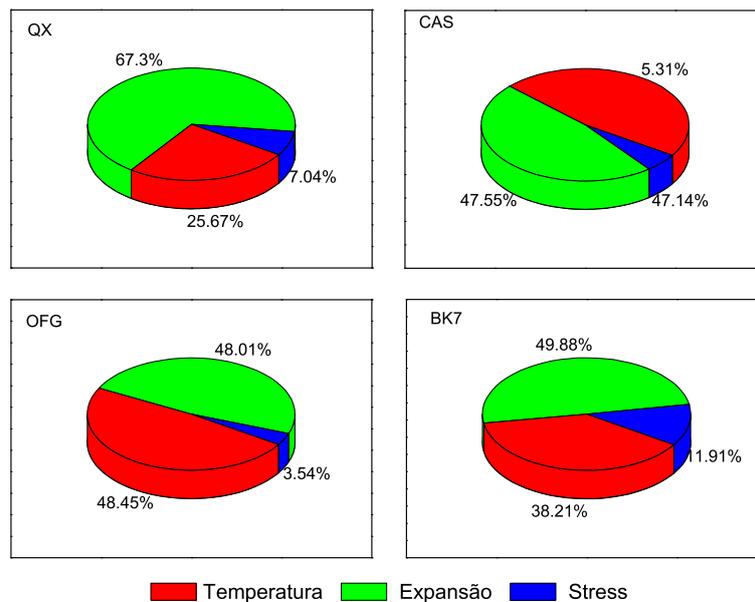


Figura 4.17: Porcentagem das contribuições térmicas, de expansão e de stress para a variação do caminho óptico, no regime de *plane-stress*.

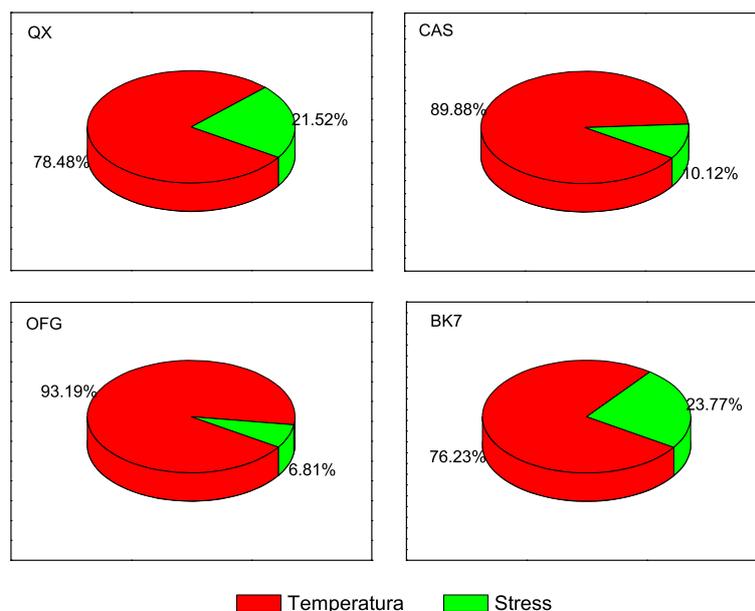


Figura 4.18: Porcentagem das contribuições térmicas e de stress para a variação do caminho óptico, no regime de *plane-strain*.

Paras os vidros QX e OFG, nota-se que a variação de caminho óptico passa de valores positivos para negativos à medida que a espessura da amostra aumenta. Esse comportamento deve-se ao fato de que, no regime de *plane-strain*, não se considera a contribuição à variação do caminho óptico devido à expansão. Uma vez que a contribuição devido ao efeito de stress é muito menor do que a contribuição devido à variação de temperatura, esta última acaba por dominar o sentido da variação do caminho óptico.

As simulações para a variação do caminho óptico, observada nas figuras acima, mostram que o modelo proposto poder ser utilizado para descrição da variação do caminho óptico desde o limite de *plane-stress* até o limite de *plane-strain*. A escolha da aproximação

de *plane-stress* ou *plane-strain* depende não apenas da espessura, mas também das propriedades físicas do material utilizado. Nesse sentido, determinou-se o erro percentual em função da espessura, para a variação do caminho óptico em $r = 0$ (visto que nessa posição tem-se uma maior variação do caminho óptico) e em $t = 100t_c$ (tempo característico de transientes em técnicas fototérmicas), quando assumidas as aproximações de *plane-stress* e *plane-strain*. Para isso, utilizou-se a expressão para a variação do caminho óptico para o modelo LAM, descrita pela Eq. (3.38), e as expressões para a variação do caminho óptico para os limites de *plane-stress* e *plane strain*, descritas pelas Eqs. (3.41) e (3.42), respectivamente. O erro percentual foi determinado pelas Eqs. (4.5) e (4.6).

$$\delta S(r, t, L)(\%)_{p-stress} = 100 \left| \frac{S(r, t, L)_{LAM} - S(r, t)_{p-stress}}{S(r, t, L)_{LAM}} \right|, \quad (4.5)$$

$$\delta S(r, t, L)(\%)_{p-strain} = 100 \left| \frac{S(r, t, L)_{LAM} - S(r, t)_{p-strain}}{S(r, t, L)_{LAM}} \right|. \quad (4.6)$$

Nas equações (4.5) e (4.6), $S(r, t, L)_{LAM}$ é a expressão que descreve a o caminho óptico para o modelo LAM e $S(r, t, L)_{p-stress}$ e $S(r, t, L)_{p-strain}$ são as expressões que descrevem a variação do caminho óptico nos limites de *plane-stress* e *plane-strain*.

Os resultados obtidos na determinação do erro percentual são mostrados nas Figs. (4.19 - 4.22).

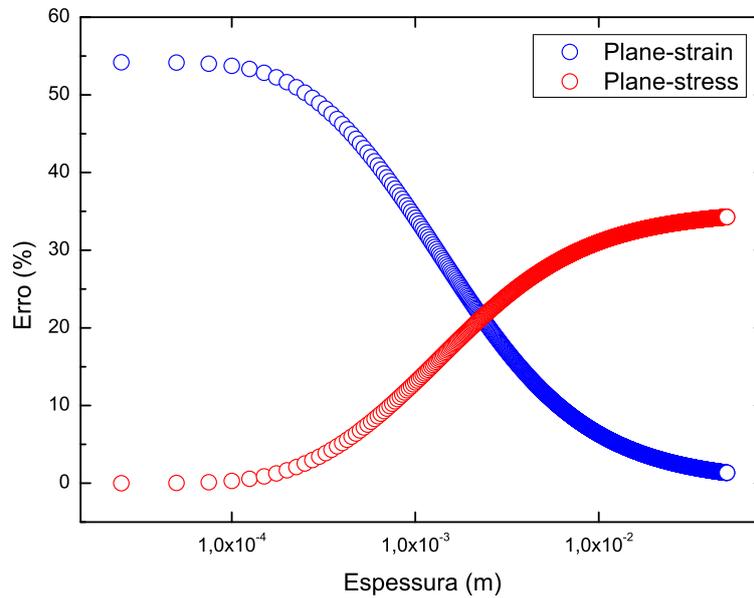


Figura 4.19: Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de BK7, quando utilizado a aproximação de *plane-stress* (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de *plane-strain* (círculo em cor azul).

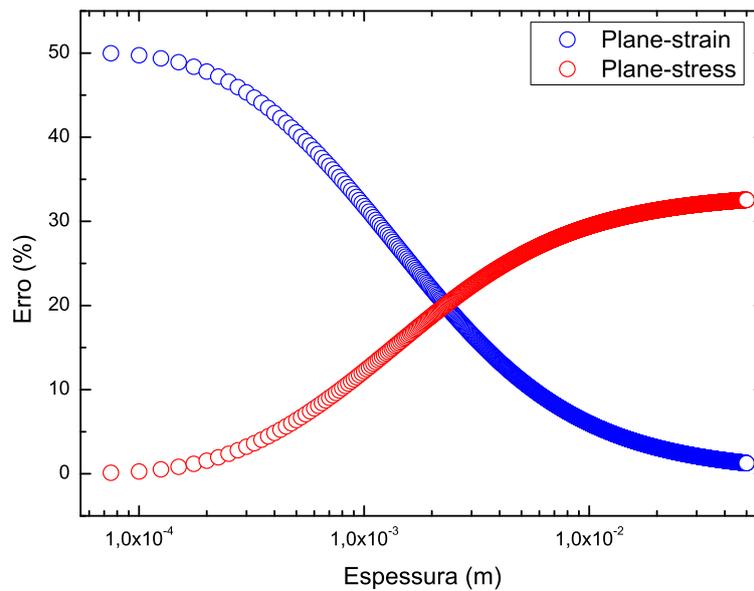


Figura 4.20: Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de CAS, quando utilizado a aproximação de *plane-stress* (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de *plane-strain* (círculo em cor azul).

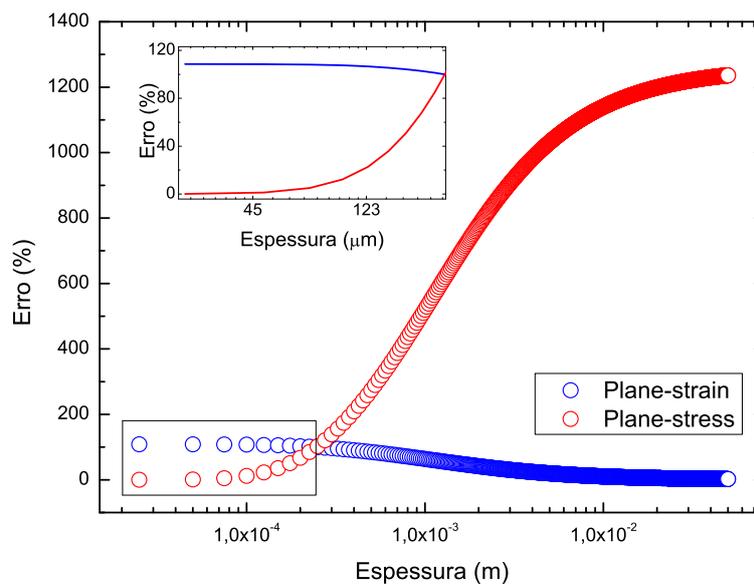


Figura 4.21: Determinação do erro percentual em função da espessura, para uma amostra de OFG, quando utilizado a aproximação de *plane-stress* (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de *plane-strain* (círculo em cor azul).

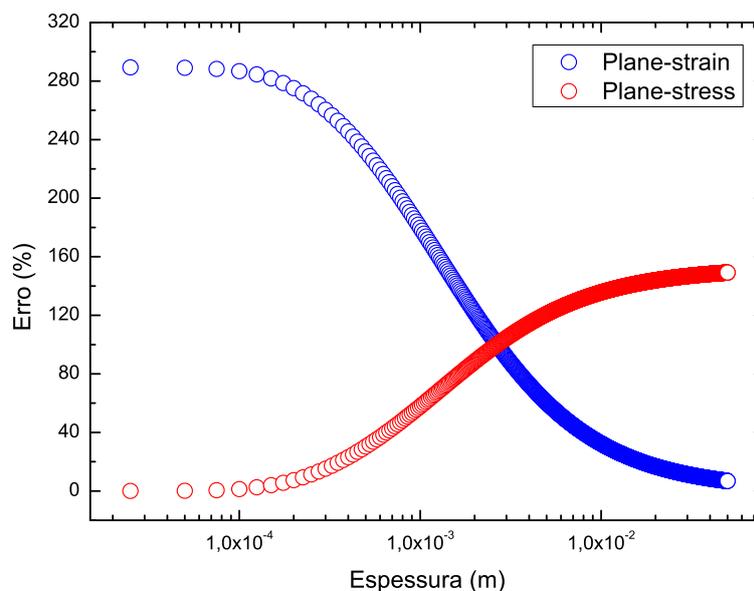


Figura 4.22: Erro percentual em função da espessura, para uma amostra de QX, quando utilizado a aproximação de *plane-stress* (círculo em cor vermelha) e quando utilizado a aproximação de *plane-strain* (círculo em cor azul).

Além da espessura, as figuras acima evidenciam que, ao escolher entre a aproximação de *plane-stress* ou *plane-strain*, deve-se considerar também as propriedades físicas do material utilizado. Como exemplo disso, tem-se que, ao assumir a aproximação de *plane-stress* para uma amostra de BK7 ou CAS com $500\mu\text{m}$ de espessura, obtém-se o erro percentual em torno de 6% para a variação do caminho óptico, enquanto que, para uma amostra de QX com a mesma espessura, obtém-se um erro de 30%; e quando assumida esta mesma aproximação para uma amostra de OFG, o erro obtido é de 274%, conforme mostrado na Fig. (4.23).

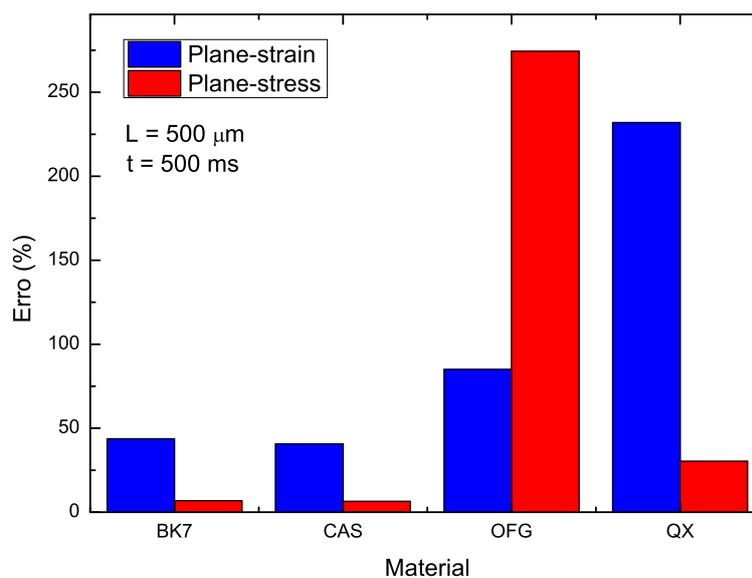


Figura 4.23: Erro percentual entre diferentes materiais quando assumida a aproximação de *plane-strain* (barras em cor azul) ou de *plane-stress* (barras em cor vermelha) para uma amostra com espessura de $L = 500\mu\text{m}$.

A Tabela (4.2) fornece as espessuras a partir das quais as aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain* podem ser assumidas, fornecendo uma descrição da variação do caminho óptico com um erro percentual menor do que 10%.

Tabela 4.2: Valores de espessuras para os quais as aproximações de *plane-stress* e *plane-strain* podem ser assumidas com um erro menor do que 10%.

Material	<i>Plane-strain</i>	<i>Plane-stress</i>
-	$L > mm$	$L < \mu m$
BK7	6,02	725,0
CAS	5,65	775,0
OFG	10,52	75,0
QX	34,10	225,0

A importância de se estabelecer os limites corretos de aplicação das aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain*, possibilitada pelos modelos apresentados neste trabalho, deve-se ao fato de que estas aproximações são as únicas alternativas para a obtenção de uma expressão analítica para a descrição de efeitos foto-elasticamente induzidos. Entre outras aplicações, estas aproximações têm sido utilizadas para descrever a variação do caminho óptico na técnica de lente térmica, que utiliza o princípio da variação do caminho óptico para obter propriedades termo-ópticas de materiais sólidos semitransparentes.

A Técnica de Lente térmica

5.1 Introdução

As técnicas fototérmicas compreendem um grupo de técnicas de alta sensibilidade utilizadas para a medida de propriedades térmicas e ópticas de diversos materiais. A base dessas técnicas reside na absorção óptica, seguida por processos de relaxação de estados excitados que resultam em um incremento da energia interna, cujo processo de dispersão gera variação de temperatura. Se a variação de temperatura for mais rápida do que o tempo necessário para que ocorra a expansão/deformação do material, essa variação de temperatura resultará em uma mudança de pressão que será dispersa em forma de ondas acústicas ao longo da amostra e do fluido circundante. Se a variação de temperatura é gerada em tempo suficiente para que a amostra se expanda/deforme, a mudança de temperatura pode induzir mudança nas propriedades da amostra, em particular no índice de refração.

Perdas devido à reflexão ou espalhamento não influenciam os efeitos fototérmicos. Estes, por sua vez, só dependem do aquecimento, que é consequência direta da absorção óptica. Sendo assim, técnicas fototérmicas são consideradas mais precisas na análise da absorção óptica do que os métodos que utilizam a medida da transmissão da luz [48].

O caráter indireto nas técnicas fototérmicas¹ resulta em uma maior sensibilidade devido à presença de fatores de amplificação². Geralmente, estes fatores de amplificação podem depender das propriedades térmicas e ópticas da amostra, da potência óptica ou energia empregada, assim como também da geometria óptica utilizada (raios dos feixes e espessura da amostra). Em geral, a amplitude dos efeitos fototérmicos são proporcionais à variação de temperatura induzida pela absorção parcial da energia do feixe, e inversamente proporcional ao volume aquecido. Devido principalmente à sua pureza espectral e alta potência, a utilização de laser em técnicas fototérmicas permite que a luz possa ser focalizada em pequenos volumes, ocasionando uma ampliação do sinal fototérmico, e possibilitando a aplicação de técnicas fototérmicas juntamente com técnicas de microscopia

¹A absorção óptica não é obtida pela medida direta da transmissão de luz.

²Enhancement factor.

para o estudo de materiais heterogêneos [48].

A mudança da temperatura induzida por um efeito fototérmico pode ser detectada utilizando vários métodos, alguns deles sumarizados na Tabela 5.1

Parâmetro	Propriedade medida	Técnica de detecção
Temperatura	Temperatura	Calorimetria
Temperatura	Emissão no infravermelho	Radiometria fototérmica
Temperatura	Ondas acústica	Espectroscopia fotoacústica
Densidade	Índice de refração	Espectroscopia fototérmica
Densidade	Índice de refração	Interferometria fototérmica
Densidade	Índice de refração	Deflexão fototérmica
Densidade	Índice de refração	Difração fototérmica
Densidade	Deformação superficial	Espelho térmico

Tabela 5.1: Principais técnicas de detecção de efeitos fototérmicos [48]

Dentre as técnicas fototérmicas, a espectroscopia de lente térmica foi o primeiro método aplicado à análise química [1, 18, 49, 50]. Na técnica de lente térmica, a amostra é iluminada por um feixe de laser, geralmente com perfil radial de intensidade gaussiano, sendo parte dessa radiação absorvida pela amostra, ou por determinados cromóforos contidos na amostra.

Estados excitados formados devido à absorção podem perder energia de forma radioativa, por meio de processos de fluorescência e fosforescência ou por meio não radioativo, via processos de conversão interna ou interação com outras moléculas contidas na amostra, gerando calor. Mesmo em processos em que a eficiência quântica de fluorescência é unitária, o calor pode ser gerado devido ao deslocamento Stokes (Stokes shift³) [18].

O fluxo de calor da região iluminada pelo laser resulta em um gradiente térmico que é proporcional à distribuição de intensidade do laser na amostra. Por sua vez, o gradiente térmico estabelece um gradiente de índice de refração. O coeficiente térmico do índice de refração (dn/dT) varia para diferentes materiais, normalmente sendo negativo para líquidos e gases, e positivo para sólidos. Para o caso de amostras gasosas e líquidas, o gradiente de índice de refração se apresenta como uma lente para o feixe de laser que progressivamente diverge ao atravessá-lo. O grau de divergência do feixe depende, entre outros fatores, da potência do laser e do coeficiente de absorção óptica da amostra. Desse modo, é fácil perceber como a técnica de lente térmica pode ser utilizada como um método indireto para determinar a absorbância, vindo daí seu potencial como uma técnica analítica e espectrométrica. Por ser parte integrante deste trabalho, descrever-se-á sucintamente o desenvolvimento histórico dessa técnica.

³Diferença entre a banda de máxima absorção e a banda de máxima emissão.

5.2 Histórico

Durante um experimento de espalhamento Raman em líquidos, no qual uma cubeta com faces paralelas, em ângulo de Brewster, contendo diferentes solventes orgânicos, era inserida na cavidade de um laser de hélio-neônio de modo a aproveitar a potência óptica circulante na cavidade, conforme representado na Fig. (5.1), Gordon e colaboradores [1] observaram a divergência do feixe de laser e um decaimento transiente na potência, com constante de tempo na ordem de segundos. Usando esta configuração intracavidade, eles calcularam o coeficiente de absorção óptica de solventes orgânicos puros [49].

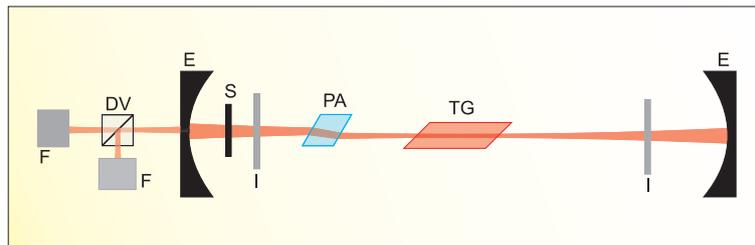


Figura 5.1: Representação da configuração experimental do considerado primeiro espectrômetro de lente térmica. Na figura, F são fotodetectores, E são espelhos, TG é o tubo de gás He-Ne, PA é a cubeta contendo a amostra, DV é um divisor de feixe, S é um obturador e I são íris utilizadas para selecionar o modo de propagação do feixe TEM_{00} [1].

O problema com a configuração intracavidade estava na reprodutibilidade dos resultados, uma vez que esta configuração oferecia significativa dificuldade no controle do alinhamento da cubeta. O primeiro experimento extracavidade foi realizado por Rieckhoff [51], o qual observou a divergência de um laser de He-Ne ao atravessar uma cubeta contendo alguns solventes orgânicos. Em 1973, Hu e Whinnery [2] mostraram que a detecção do efeito de lente térmica poderia ser realizada com maior sensibilidade utilizando a configuração extracavidade e introduzindo uma lente de forma a criar uma cintura no feixe, fixando a amostra logo após a posição desta cintura. Além disso, a divergência do feixe poderia ser provada monitorando a intensidade na posição central do feixe, utilizando para isso, um pinhole em frente ao fotodetector, conforme mostrado na Fig. (5.2).

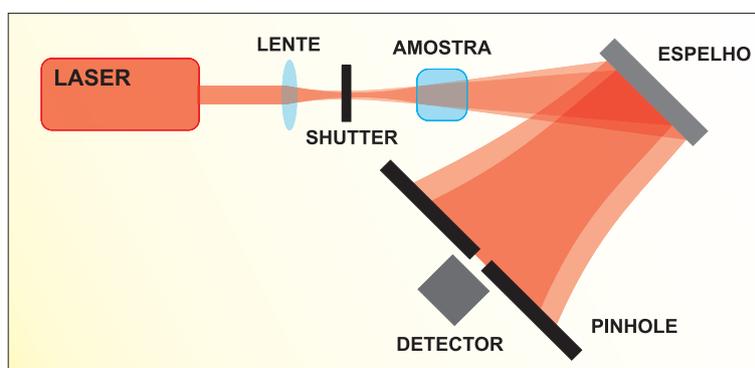


Figura 5.2: Esquema da configuração extracavidade para a técnica de lente térmica utilizada por Hu e Whinnery [2].

A configuração experimental desenvolvida por Swofford e colaboradores [3,4] utilizava dois feixes de laser, um modulado periodicamente para geração do efeito de lente térmica, chamado feixe de excitação e outro chamado feixe de prova, que incide colinearmente com o feixe de excitação, provando a lente térmica modulada. Um filtro óptico, impede que o feixe de excitação incida no fotodetector, conforme representado na Fig. (5.3). A intensidade do feixe de prova é analisada utilizando um amplificador de sinal do tipo "lock-in", fornecendo uma melhora na razão sinal-ruído, quando comparado com a configuração de feixe único.

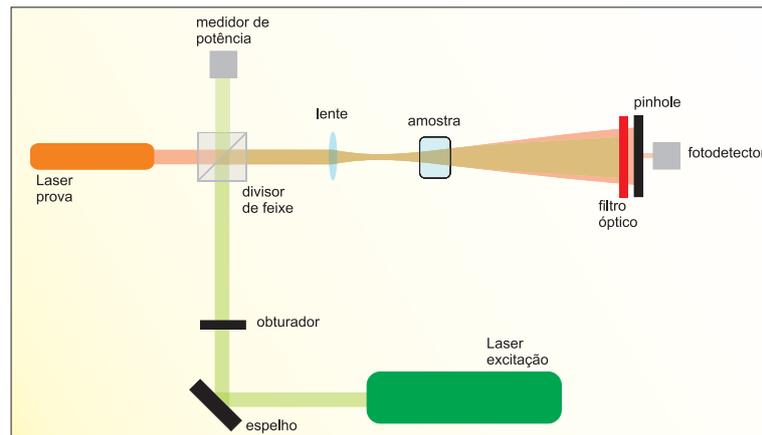


Figura 5.3: Esquema da configuração com feixe duplo utilizado por Swofford [3,4].

Shen e colaboradores [52] desenvolveram o modelo teórico quantitativo para a configuração descasada, na qual os feixes de prova e de excitação têm raios diferentes na posição da amostra. Esse novo modelo poderia ser utilizado para medidas em estado estacionário ou resolvido no tempo. A Fig. (5.4) representa uma típica configuração experimental de lente térmica em modo descasado.

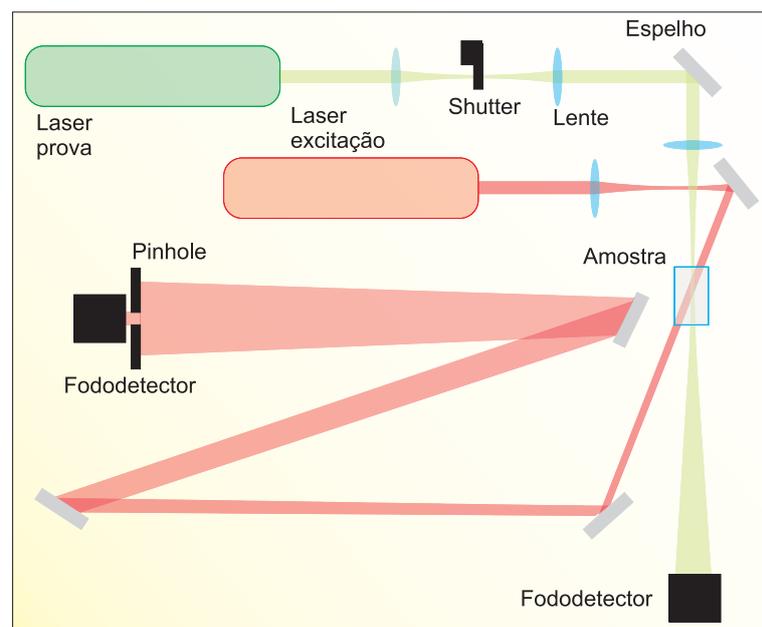


Figura 5.4: Representação esquemática da configuração com feixe duplo em modo descasado.

Dentre as possíveis configurações do espectrômetro de lente térmica, a configuração descasada é atualmente a mais utilizada. Deve-se a isso, principalmente, a maior sensibilidade obtida utilizando dois feixes, e ao fato de ela não necessitar de filtros interferométricos ou divisores de feixes para separar os feixes, o que poderia limitar a potência óptica utilizada.

A técnica de lente térmica em modo descasado vem sendo aplicada com sucesso por pesquisadores do Grupo de Estudos de Fenômenos Fototérmicos (GEFF), da Universidade Estadual de Maringá, na investigação de propriedades térmicas e ópticas de cristais líquidos [53], vidros ópticos que possam ser utilizados como meio ativo em laser de estado sólido [15–17, 19], ou como meio luminescente para geração de luz branca [54, 55], estudos de compostos fotossensíveis [56–58], dentre outras aplicações. Esses e outros trabalhos forneceram a motivação para o desenvolvimento de trabalhos teóricos de modo a aperfeiçoar a interpretação dos resultados obtidos utilizando esta técnica, dentre os quais, o trabalho aqui apresentado.

5.3 Intensidade do sinal de lente térmica

Conforme mostrado no apêndice D, a intensidade central do feixe de prova na posição do fotodetector é dada por

$$I(t) = \left| \int_0^\infty e^{-(1+iV)g} e^{-i\phi(g,t)} dg \right|^2, \quad (5.1)$$

sendo,

$$\phi(g, t) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S(g, t), \quad (5.2)$$

a diferença de fase induzida pela variação do caminho óptico. na Eq. (5.1) foi feito a mudança de variável $r^2/\omega^2 = mg$, com m e V sendo parâmetros geométricos da configuração experimental dados por

$$m = \left(\frac{\omega_{1p}}{\omega_{0e}} \right)^2 \quad (5.3)$$

e

$$V = \frac{z_1}{z_{cp}} + \frac{z_{cp}}{z_2} \left[1 + \left(\frac{z_1}{z_{cp}} \right)^2 \right] \quad z_{cp} = \frac{\pi\omega_{0P}^2}{\lambda_P}, \quad (5.4)$$

em que z_{cp} é denominada distância confocal do feixe de prova, z_1 é a distância entre as cinturas do feixe de prova e de excitação, e z_2 é a distância entre a amostra e o fotodetector.

Para que resultados quantitativos possam ser obtidos a partir da LT, um tratamento matemático é necessário de modo a descrever os efeitos presentes durante a medida, fornecendo uma equação de ajuste para os dados experimentais.

Para a obtenção de resultados quantitativos na técnica de lente térmica, deve-se utilizar um modelo teórico que descreva os efeitos presentes na amostra ao se incidir o laser de excitação e a interação desses efeitos com o laser de prova. Esse modelo deve prover uma

equação de ajuste para a intensidade do feixe de prova em função do tempo. Assim como os modelos para lente térmica apresentados neste trabalho, para obter o modelo de Shen para a técnica de lente térmica, deve-se considerar as etapas descritas a seguir [52, 59].

- Determinar a variação de temperatura devido à absorção parcial do feixe de excitação, ou seja, resolver a equação diferencial de difusão de calor, considerando as condições de contorno e condição inicial do sistema.
- Determinar a variação do caminho óptico devido à variação de temperatura que induz mudança na densidade, deformação térmica e efeitos fotoelásticos.
- Determinar a intensidade do feixe de prova utilizando a aproximação de campo distante, considerando que a alteração da propagação do feixe de prova deve-se a uma variação na fase do campo elétrico, devido à variação do caminho óptico.

Entre outros fatores, ao utilizar os modelos de LT deve-se considerar os seguintes aspectos:

- Não há fluxo de calor para o meio ou o fluxo de calor para o meio é desprezível.
- A região aquecida deve ser muito menor do que a dimensão radial da amostra.
- Os raios dos feixes devem ser constantes ao longo da espessura da amostra.

Astrath e colaboradores [36, 60] mostraram que o efeito devido à troca de calor com o fluido circundante pode ser desconsiderado se este fluido for o ar.

Em relação à absorção óptica, Belançon [31] mostrou que o modelo de baixa absorção óptica pode ser aplicado para amostras cujo coeficiente de absorção óptica seja tal que $\beta < 200m^{-1}$.

Como os raios dos feixes na amostra devem ser considerados constantes, em geral, a maioria dos resultados obtidos utilizando a técnica de lente térmica em sólidos são interpretados à luz da aproximação de *plane-stress* [20, 61]. Embora controverso, um dos possíveis métodos de se avaliar a relação entre a espessura da amostra e a aproximação para os raios constantes é verificando a relação $L < z_{ce}$, na qual z_{ce} é a distância confocal do feixe de excitação. No capítulo 6 é discutido em detalhes a utilização da aproximação de *plane-strain* para a interpretação dos resultados obtidos via técnica de lente térmica.

5.4 Modelo de Shen para a técnica de lente térmica

No tratamento proposto por Baesso e colaboradores [62], foi utilizado a aproximação de *plane-stress*, no qual

$$\Delta S(r, t) = L\chi_0 [T(r, t) - T(0, t)], \quad (5.5)$$

com

$$\chi_0 = \left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4} (q_{\parallel} + q_{\perp}) + (n_0 - 1)(1 + \nu)\alpha_T. \quad (5.6)$$

χ_0 é usualmente denominado de coeficiente térmico da variação do caminho óptico (dS/dT). No entanto, como verificado nos capítulos anteriores, essa definição precisa ser tomada com maior critério devido a dependência do caminho óptico com a espessura da amostra, e que no caso geral, não é proporcional a variação de temperatura. Nesta seção será utilizada a aproximação de *plane-stress* como proposta por Shen, sendo que na próxima seção serão incorporados esses efeitos na formulação do efeito de LT. Note no entanto, que na aproximação de *plane-strain*, também tem-se que $S(r, t)$ é proporcional a temperatura, de forma que a expressão final no modelo de Shen pode ser usada neste caso com a simples modificação $\chi_0 \rightarrow \chi_{\infty}$.

Na obtenção do modelo de Shen para a LT, a expressão da variação de temperatura é dada pela solução da equação diferencial de difusão de calor, Eq. (5.7), assumindo que a quantidade de calor que a amostra troca com o meio circundante é desprezível:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r, t) - D_{th} \nabla^2 T(r, t) = Q_0 e^{-2r^2/\omega_{0e}^2}, \quad (5.7)$$

com

$$Q_0 = \frac{2P \beta \varphi}{\rho c_p \pi \omega_{0e}^2}, \quad (5.8)$$

sujeita às condições de contorno

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= 0, \\ T(\infty, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

ρ é a densidade (kg/m^3), β é o coeficiente de absorção óptica (m^{-1}), c_p é o calor específico ($J/kg.K$), ω_{0e}^2 é o raio da cintura do feixe de excitação (m) e φ é a taxa de energia absorvida convertida em calor. Embora originalmente obtida pelo método das funções de Green, a solução para a Eq. (5.7) pode ser obtida também pelo método das transformadas integrais. Independente do método empregado, a expressão para a variação de temperatura é dada por,

$$T(r, t) = Q_0 \int_0^t \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega_0^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} d\tau, \quad (5.10)$$

em que $t_c = \omega_0^2/4D_{th}$ é definido como o tempo característico de difusão térmica⁴.

A expressão que relaciona a variação de fase com a variação de temperatura pode ser obtida:

$$\phi(g, t) = \frac{\Theta}{t_c} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{2mg}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} d\tau, \quad (5.11)$$

com

$$\Theta = \theta\chi_0 L \quad (5.12)$$

e

$$\theta = \frac{P\beta}{k\lambda}\varphi \quad (5.13)$$

Assumindo a aproximação na fase, isto é, $e^{-i\phi(g,t)} \approx 1 - i\phi(g, t)$, a integral na Eq. (5.1) pode ser resolvida, fornecendo uma expressão analítica para a intensidade central do feixe de prova em função do tempo, na posição do fotodetector [52, 59]

$$I_{Shen}(t) = I(0) \left\{ 1 - \frac{\Theta}{2} \arctan \left[\frac{2mV}{[(1+2m)^2 + V^2](t_c/2t) + 1 + 2m + V^2} \right] \right\}^2. \quad (5.14)$$

Apesar de fornecer uma expressão analítica para a intensidade central do feixe de prova, a aproximação na fase limita os valores de amplitude que podem ser tratados com o modelo de Shen.

⁴Ver apêndice B

5.5 Modelo BAM para a técnica de lente térmica

Para a caracterização de materiais utilizando a técnica de lente térmica com o modelo de Shen, as amostras devem possuir valores pequenos para o coeficiente de absorção óptica, e seus diâmetros e espessuras devem ser tais que as aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain* possam ser empregadas para descrever a variação do caminho óptico. No intuito de obter um modelo teórico que possibilite a aplicação da técnica de lente térmica em amostras sólidas, de quaisquer espessuras e valores moderados do coeficiente de absorção óptica, utilizar-se-á a expressão que descreve a variação do caminho óptico para o modelo BAM, aplicando-a para descrever a variação do caminho óptico induzido pelo efeito de lente térmica. A relação entre a variação de fase e a variação do caminho óptico é dada pela substituição da Eq. (3.27) na Eq. (5.2):

$$\phi_{BAM}(g, t) = \frac{2\pi}{\lambda_P} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty L \chi^+(\alpha, \lambda) T(\alpha, \lambda, t) J_0(\alpha \sqrt{mg} \omega_{0e}) \alpha d\alpha d\lambda, \quad (5.15)$$

em que

$$\chi^+ = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{\sin(L\lambda)}{L\lambda} + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1-\nu)} p^+(\alpha, \lambda) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T q(\alpha, \lambda), \quad (5.16)$$

com

$$p^+(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{L\lambda(\alpha^2 + \lambda^2) [L\alpha + \sinh(L\alpha)]} \left\{ 2\alpha\lambda(q_{\parallel}\nu + q_{\perp}\nu + 2q_{\perp})(1 + \cos(L\lambda))(\cosh(L\alpha) - 1) - \sin(L\lambda) [L(q_{\parallel} + 3q_{\perp})\alpha(\alpha^2 + \lambda^2)] - \sin(L\lambda) \sinh(L\alpha) [(q_{\parallel} + 3q_{\perp})\alpha^2 + \lambda^2(q_{\parallel} - q_{\perp} - 2q_{\parallel}\nu - 2q_{\perp}\nu)] \right\}, \quad (5.17)$$

$$q(\alpha, \lambda) = \frac{2\alpha}{L\alpha(e^{2L\alpha} + 2L\alpha e^{L\alpha} - 1)(\alpha^2 + \lambda^2)} [(e^{L\alpha} - 1)^2\alpha(1 + \cos(L\alpha)) - (1 - e^{2L\alpha})\lambda \sin(L\lambda)], \quad (5.18)$$

e

$$T(\alpha, \lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega^2}{4} Q_0 \int_0^t e^{-D_{th}\alpha^2\tau} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2\tau} \frac{\beta}{(\beta^2 + \lambda^2)} e^{-D_{th}\lambda^2\tau} d\tau, \quad (5.19)$$

A expressão que descreve a intensidade do sinal de lente térmica para o modelo BAM é obtida ao substituir a Eq. (5.15) na Eq. (5.1). Entre as vantagens apresentadas por este modelo frente ao modelo de Shen, destaca-se o fato dele permitir a aplicação da técnica de lente para caracterização de amostras com quaisquer espessuras, ampliar a faixa de valores de coeficiente de absorção óptica que a amostra pode apresentar e possibilitar o

tratamento teórico de transientes de lente térmica com valores de amplitudes maiores do que os permitidos pelo modelo de Shen. Para ajustar os dados experimentais utilizando o modelo BAM deve-se resolver as integrais numericamente utilizando um software de computação algébrica, como por exemplo, o Mathematica 7.0.

5.6 Modelo ABAM para a técnica de lente térmica

O ajuste dos dados experimentais obtidos utilizando a técnica de lente térmica como o modelo BAM pode demandar um tempo computacional considerável, devido às integrais numéricas a serem resolvidas. Para amostras cujo coeficiente de absorção óptica seja moderado, pode-se diminuir o tempo demandado, utilizando o modelo ABAM para descrever a variação de fase induzida pela variação do caminho óptico, substituindo a Eq. (3.33) na Eq. (5.2), tem-se

$$\phi_{ABAM}(g, t) = \frac{2\pi}{\lambda_P} \int_0^\infty L \chi_\beta^+(\alpha) T(\alpha, t) J_0(\alpha\sqrt{mg}\omega_0e) \alpha d\alpha, \quad (5.20)$$

em que

$$\chi_\beta^+ = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{1 - e^{-\beta L}}{\beta L} + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} p_\beta^+(\alpha) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T q_\beta(\alpha), \quad (5.21)$$

com

$$\begin{aligned} p_\beta^+(\alpha) = & \frac{e^{-L\alpha}}{[L\alpha + \sinh(L\alpha)]} \frac{e^{-L\beta}}{2L\beta(\beta - \alpha^2)} \\ & \left\{ 2\alpha\beta(e^{-L\alpha-1})^2(e^{L\beta} + 1) [q_\parallel\nu + q_\perp(\nu + 2)] \right. \\ & + \beta^2(1 - e^{2L\alpha})(e^{L\beta} - 1)(2\nu(q_\parallel + q_\perp) - q_\parallel + q_\perp) \\ & \left. - 2\alpha e^{L\alpha}(e^{L\beta} - 1)(q_\parallel + 3q_\perp) [L(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \sinh(L\alpha)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} q_\beta(\alpha) = & \frac{4e^{-L\beta/2}}{L(\beta^2 - \alpha^2) [L\alpha + \sinh(L\alpha)]} \\ & \left[\beta \sinh(L\alpha) \sinh(L\beta/2) \right. \\ & \left. - 2\alpha \cosh(L\beta/2) \sinh(L\alpha/2)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

e

$$T(\alpha, t) = Q_0 \frac{\omega^2}{4} \int_0^\tau e^{-D_{th}\alpha^2\tau} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} d\tau. \quad (5.24)$$

A expressão que descreve a intensidade do sinal de lente térmica para o modelo ABAM é obtida substituindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.1). Com exceção do fato de ser empregado para a caracterização de amostras que apresentam valores moderados para o coeficiente de absorção óptica, o modelo ABAM apresenta as mesmas vantagens que o modelo BAM, possibilitando também a aplicação da técnica de lente para caracterização de amostras com quaisquer espessuras e ampliando o tratamento teórico de transientes de lente térmica com valores de amplitudes maiores do que os permitidos pelo modelo de Shen.

5.7 Modelo LAM para a técnica de lente térmica

Para materiais cujo coeficiente de absorção óptica seja muito pequeno, pode-se utilizar a aproximação na qual a absorção de luz ao longo do caminho óptico seja constante. Esta aproximação é a base da expressão que descreve a variação do caminho óptico no modelo LAM, podendo ser aplicada também na técnica de lente térmica. Neste caso, a expressão que relaciona a variação de fase com a variação do caminho óptico descrito pelo modelo LAM é obtida substituindo a Eq. (3.38) na Eq. (5.2):

$$\phi_{LAM}(g, t) = \frac{2\pi}{\lambda_P} \int_0^\infty L \chi(\alpha) T(\alpha, t) J_0(\alpha \sqrt{mg} \omega_{0e}) \alpha d\alpha, \quad (5.25)$$

em que

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) = & \left(\frac{dn}{dT} \right) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T \frac{4h(\alpha)}{L\alpha} \\ & + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} \left\{ (q_{\parallel} + 3q_{\perp}) - \frac{4 [q_{\parallel} \nu + q_{\perp} (2 + \nu)] h(\alpha)}{L\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

com

$$h(\alpha) = \frac{\cosh(L\alpha) - 1}{\sinh(\alpha L) + L\alpha} \quad (5.27)$$

e

$$T(\alpha, t) = Q_0 \frac{\omega^2}{4} \int_0^\tau e^{-D_{th} \alpha^2 \tau} e^{-\frac{1}{8} \alpha^2 \omega^2} d\tau. \quad (5.28)$$

A expressão para a intensidade do sinal de lente térmica para o modelo LAM é obtida substituindo a Eq.(5.25) na Eq. (5.1). Assim como os demais modelos, este também pode ser aplicado para amostras com quaisquer valores de espessura, desde que observada a condição na qual o coeficiente de absorção óptica da amostra deve ser muito pequeno. Sua principal vantagem recai sobre o fato de que o tempo computacional necessário para se realizar o ajuste dos dados experimentais é muito menor do que o requerido pelo modelo BAM.

5.8 Análise das aproximações de *plane-strain* e *plane-stress*

Na técnica de lente térmica, o modelo de Shen vem sendo aplicado no estudos de materiais sólidos, utilizando as aproximações de *plane-stress* ou de *plane-strain*. Com o intuito de verificar a validade destas aproximações, simulou-se o sinal de lente térmica com o modelo LAM, descrito pelas Eqs. (5.25) e (5.1), para as amostras de vidros CAS, BK7, QX e OFG, com diferentes valores de espessura. Os transientes de lente térmica simulados foram ajustados utilizando a Eq. (5.14), que descreve a intensidade do sinal de lente térmica no modelo de Shen, e podem ser vistos nas Figs. (5.5 - 5.8).

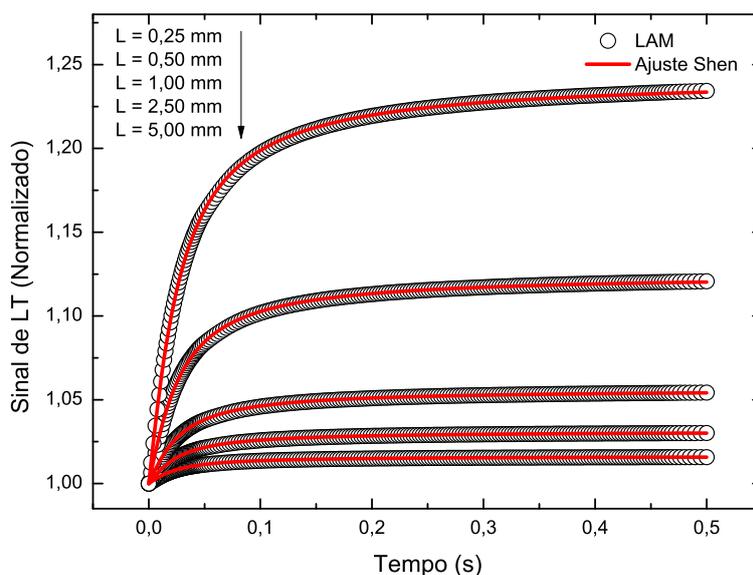


Figura 5.5: Transientes de LT para uma amostra de BK7, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).

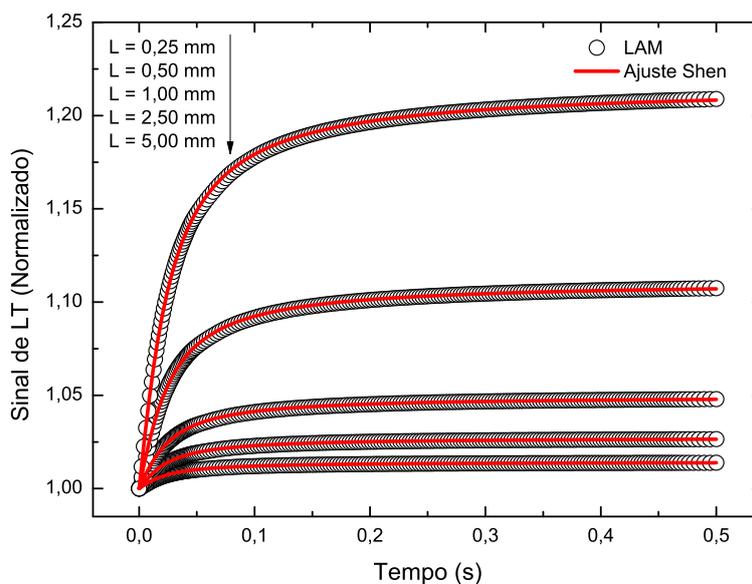


Figura 5.6: Transientes de LT para uma amostra de CAS, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).

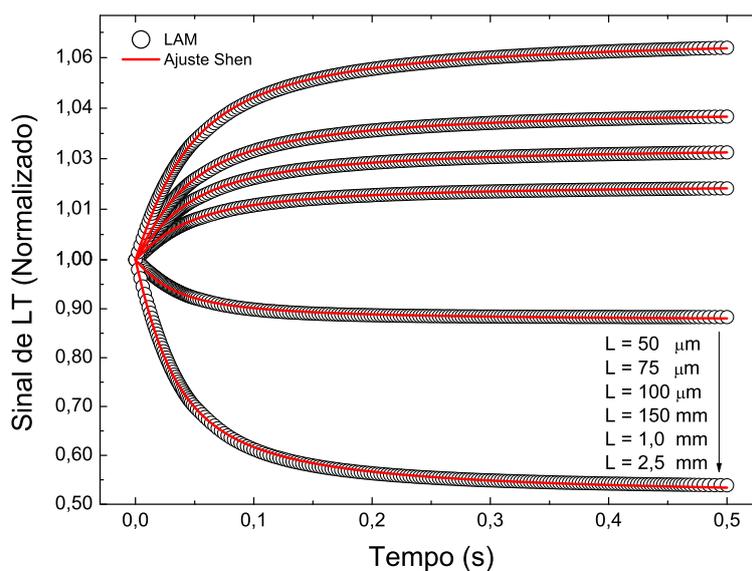


Figura 5.7: Transientes de LT para uma amostra de OFG, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).

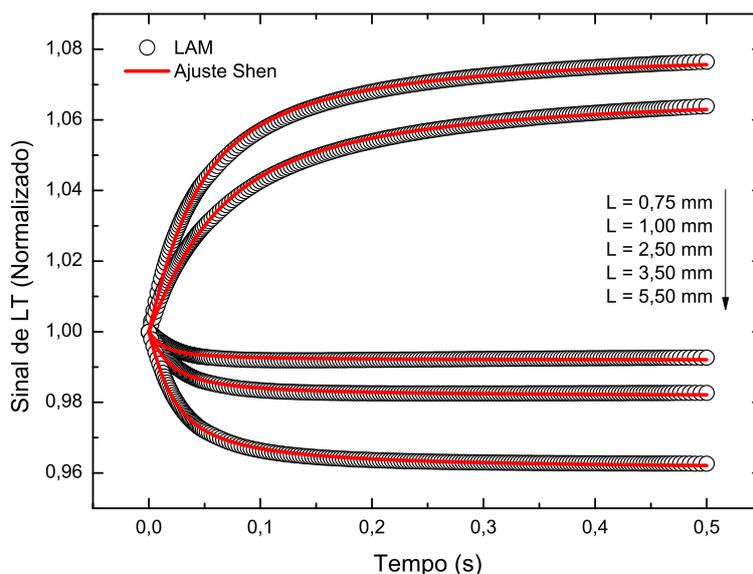


Figura 5.8: Transientes de LT para uma amostra de QX, para diferentes espessuras, simulados com modelo LAM (círculos abertos em cor preta) e ajuste com modelo de Shen (linha contínua em cor vermelha).

Ajustando os transientes com o modelo de Shen, pode-se obter os parâmetros $\Theta/PL\chi$ para verificar o comportamento dos mesmos em função da espessura, conforme mostrado nas Figs. (5.9 - 5.12).

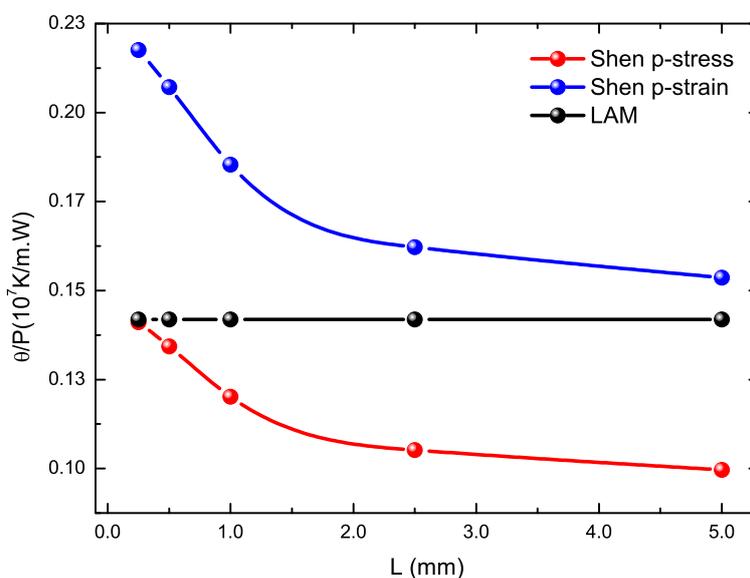


Figura 5.9: Valores dos parâmetros θ/P para o vidro BK7 em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando o ajuste com modelo Shen na aproximação de *plane-stress* (vermelho) e *plane-strain* (azul).

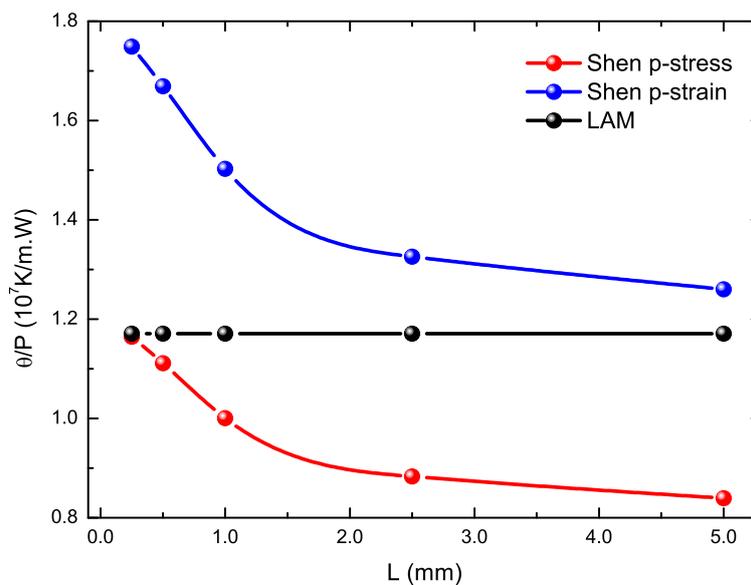


Figura 5.10: Valores dos parâmetros θ/P para o vidro CAS em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de *plane-stress* (vermelho) e *plane-strain* (azul).

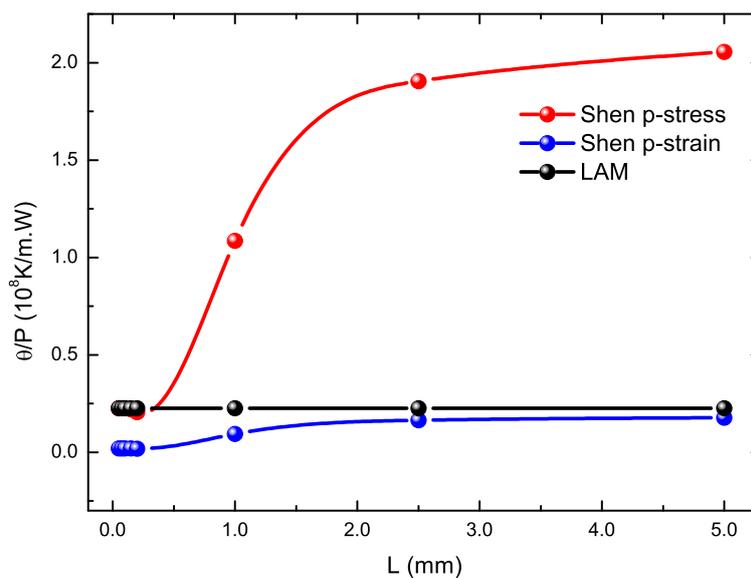


Figura 5.11: Valores dos parâmetros θ/P para o vidro OFG em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de *plane-stress* (vermelho) e *plane-strain* (azul).

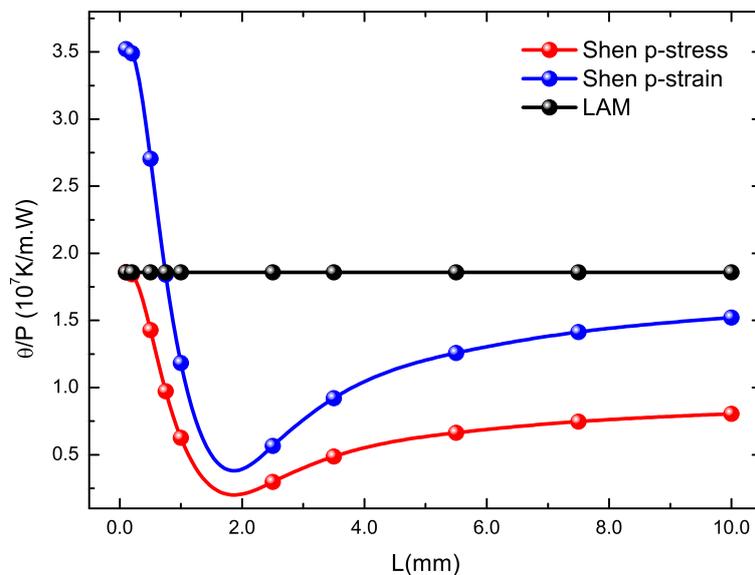


Figura 5.12: Valores dos parâmetros θ/P para o vidro QX em função da espessura, obtidos via simulação com o modelo LAM (preto) e calculados utilizando os valores obtidos pelo ajuste com modelo de Shen na aproximação de *plane-stress* (vermelho) e *plane-strain* (azul).

A análise das figuras acima mostra que, à medida que a espessura da amostra aumenta, a aproximação de *plane-strain* tende a fornecer valores mais próximos dos simulados, enquanto que a aproximação de *plane-stress* fornece valores que divergem dos valores simulados à medida que a espessura aumenta. Além disso, apenas o modelo LAM fornece os valores e comportamento correto para o parâmetro θ/P em função da espessura, conforme descrito pela Eq. (5.29). A depender da espessura da amostra, a aproximação de *plane-stress* ou *plane-strain*, utilizada no modelo de Shen pode fornecer valores incorretos para as propriedades físicas que se obtém utilizando o parâmetro θ ,

$$\frac{\Theta}{PL\chi} = \theta = \frac{\beta\varphi}{k\lambda}. \quad (5.29)$$

5.9 Eficiência quântica de fluorescência

Dentre as possíveis aplicações da técnica de lente térmica ao estudo de materiais sólidos semi-transparentes, a utilização da técnica para a determinação da eficiência quântica de fluorescência (EFQ) vem sendo empregada, baseando-se nos métodos conhecidos como método da "normalização pela base" e o método dos "múltiplos comprimentos de onda", ambos utilizando o tratamento teórico advindo do modelo de Shen.

Como mostrado na subseção anterior, utilizar o modelo de Shen fora dos limites de *plane-stress* e *plane-strain* para descrever o efeito de lente térmica pode ocasionar erro significativo nos valores das propriedades térmicas obtidas utilizando o parâmetro θ . Por outro lado, preparar amostras cuja espessura se enquadrem nos limites necessários mostra-se trabalhoso e, algumas vezes, impraticável.

No intuito de verificar se o modelo de Shen pode fornecer valores corretos para a eficiência quântica de fluorescência, mesmo para amostras fora dos limites de *plane-stress* e *plane-strain*, simulou-se transientes do sinal de lente térmica com o modelo LAM, para materiais cuja as propriedades físicas se baseiam nos vidros BK7, CAS, OFG e QX, aplicando os métodos de normalização pela base e o método dos múltiplos comprimentos de onda utilizando o modelo de Shen.

5.9.1 Método da normalização pela base

Como o próprio nome diz, este método baseia-se na normalização do resultado obtido na medida do material que contém o íon responsável pelo processo de fluorescência (dopante) pelo resultado obtido na medida do material sem o referido íon (base). De acordo com o modelo de Shen, o parâmetro Θ é descrito por,

$$\Theta = \frac{P\beta L}{k\lambda} \chi_0 \varphi, \quad (5.30)$$

com

$$\varphi = 1 - \eta \frac{\lambda_{exc}}{\langle \lambda_{em} \rangle}, \quad (5.31)$$

em que P é a potência do feixe de excitação, β é o coeficiente de absorção óptica, L é a espessura da amostra, k é a condutividade térmica, λ é o comprimento de onda do feixe de prova e χ_0 é o coeficiente térmico da variação do caminho óptico⁵. Na Eq. (5.31), λ_{exc} é o comprimento de onda do feixe de excitação, $\langle \lambda_{em} \rangle$ é o comprimento de onda médio de emissão e η é a eficiência quântica de fluorescência. Uma das condições necessárias para a utilização desse método é assumir que a concentração do íon dopante não altera as propriedades térmicas do material dopado em relação a amostra base. Essa aproximação é muito razoável, uma vez que, na maioria dos casos, a concentração do dopante é muito

⁵A descrição matemática do coeficiente térmico da variação do caminho óptico depende se a aproximação utilizada é a de *plane-stress* ou *plane-strain*.

pequena. Fazendo uso dessa aproximação, pode-se reescrever a Eq. (5.30) para a amostra base e para a amostra dopada, de acordo com as Eqs. (5.32) e (5.33), respectivamente.

$$\Theta_b = \frac{P\beta_b L}{k_b \lambda} \chi_0, \quad (5.32)$$

$$\Theta_d = \frac{P\beta_b L \chi_0}{k_b \lambda} \left[1 + \frac{\beta_d}{\beta_b} \varphi \right], \quad (5.33)$$

em que os subíndices d e b referem-se à amostra dopada e à amostra base, respectivamente. Utilizando as Eqs. (5.31), (5.32) e (5.33), a eficiência quântica de fluorescência é dada por

$$\eta = \frac{\langle \lambda_{em} \rangle}{\lambda_{exc}} \left[1 + \frac{\beta_b}{\beta_d} \left(1 - \frac{\Theta_d}{\Theta_b} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Para verificar se o modelo de Shen pode fornecer os valores corretos da EQF para uma amostra cuja espessura não se enquadra nos limites de *plane-strain* ou *plane-stress*, utilizou-se o modelo LAM para simular transientes de lente térmica para amostras de vidros BK7, CAS, OFG e QX, com uma espessura de $L = 1mm$ e diferentes valores de EQF. Os transientes simulados foram ajustados pelo método dos mínimos quadrados com o modelo de Shen, utilizando a Eq. (5.14), fornecendo os valores para o parâmetro Θ , e utilizando a Eq. (5.34) foi possível determinar a EQF conforme mostrado na Tabela (5.2).

EQF		EQF - Shen		
Simulado	BK7	CAS	OFG	QX
0,8	0,79 (1,3%)	0,79 (1,3%)	0,78 (2,5%)	0,78 (2,5%)
0,7	0,69 (1,4%)	0,69 (1,4%)	0,68 (2,9%)	0,68 (2,9%)
0,6	0,58 (3,3%)	0,59 (1,7%)	0,58 (3,3%)	0,57 (5,0%)
0,5	0,48 (4,0%)	0,48 (4,0%)	0,48 (4,0%)	0,47 (6,0%)
0,4	0,37 (7,5%)	0,38 (5,0%)	0,38 (5,0%)	0,36 (10,0%)

Tabela 5.2: Comparação entre os valores para a EQF, utilizando o modelo LAM e obtidos via ajuste com o modelo de Shen. Entre parênteses está o erro percentual em comparação ao valor simulado.

O resultado desta verificação mostra que o modelo de Shen forneceu valores da EQF muito próximos aos valores simulados. Embora não descreva adequadamente a variação do caminho óptico presente no efeito de lente térmica, o modelo de Shen pode ainda ser utilizado para determinar a eficiência quântica de fluorescência utilizando o método da base.

5.9.2 Método dos múltiplos comprimentos de onda

Outro método utilizado na técnica de lente térmica para determinar a EQF é o método conhecido como método dos múltiplos comprimentos de onda [63]. Esse método consiste em medir o sinal de LT de uma determinada amostra com mesma concentração de dopante, utilizando diferentes comprimentos de onda de excitação (λ_{exc}). Assumindo que a EQF e o comprimento de onda médio de emissão ($\langle \lambda_{em} \rangle$) sejam constantes, pode-se utilizar a Eq. (5.35) para ajustar a curva obtida da relação entre o parâmetro Θ/PL em função do comprimento de onda de excitação utilizado.

$$\frac{\Theta}{PL} = \frac{\beta}{k\lambda} \chi_0 \left[1 - \eta \frac{\lambda_{exc}}{\langle \lambda_{em} \rangle} \right]. \quad (5.35)$$

Com o intuito de verificar se o modelo de Shen pode fornecer valores corretos para a EQF, simulou-se transientes de lente térmica com o modelo LAM, com diferentes valores para a EQF, para amostras com propriedades físicas similares às dos vidros BK7, CAS, OFG e QX. Esses transientes foram ajustados utilizando o modelo de Shen, por meio da Eq. (5.14), fornecendo o parâmetro Θ/PL . A relação entre este parâmetro e o comprimento de onda de excitação simulado, é mostrados na Fig. (5.13), assim como o ajuste linear utilizando a Eq. (5.35).

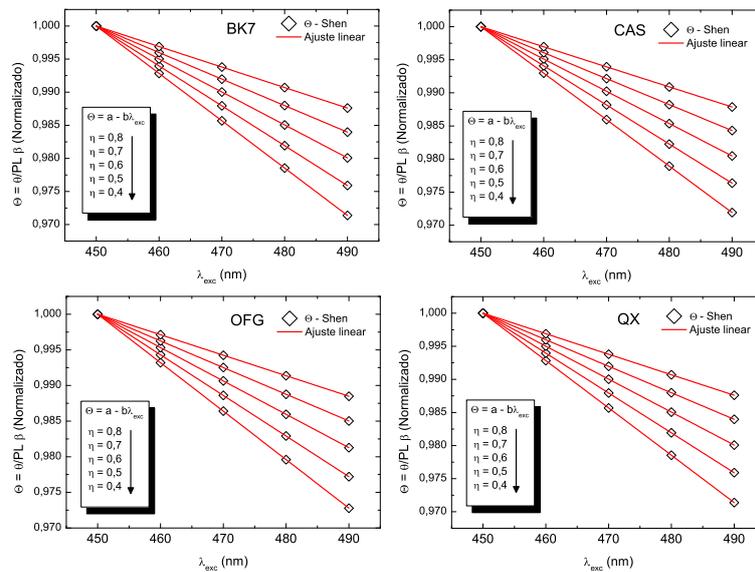


Figura 5.13: Parâmetro Θ/PL em função do comprimento de onda de excitação para os vidros BK7, CAS, OFG e QX. Ajuste linear utilizando a Eq. (5.35). Os valores para EQF são obtidos por meio da relação $\eta = b\langle \lambda_{em} \rangle/a$.

A Tabela (5.3) mostra os valores simulados para a EQF com o modelo LAM e obtidos via ajuste com modelo de Shen.

Simulado	BK7	CAS	OFG	QX
0,8	0,801 (0,1%)	0,801 (0,1%)	0,781 (2,4%)	0,812 (1,5%)
0,7	0,701 (0,1%)	0,701 (0,1%)	0,680 (2,9%)	0,711 (1,6%)
0,6	0,601 (0,2%)	0,601 (0,2%)	0,580 (3,3%)	0,610 (1,7%)
0,5	0,501 (0,2%)	0,500 (<0,1%)	0,481 (3,8%)	0,509 (1,8%)
0,4	0,401 (0,3%)	0,400 (<0,1%)	0,382 (4,5%)	0,408 (2,0%)

Tabela 5.3: Valores simulados para EQF e valores obtidos utilizando o ajuste com modelo de Shen e o método dos múltiplos comprimentos de onda para diferentes materiais.

Apesar de não descrever corretamente a variação do caminho óptico, para uma amostra com espessura de $L = 1,0mm$, o modelo de Shen forneceu valores para a EQF muito próximos aos valores simulados. Este fato mostra que o modelo de Shen pode ser aplicado para determinação da EQF, utilizando o método dos múltiplos comprimentos de onda. Neste método, nota-se que o erro devido à incorreta descrição da variação do caminho óptico está contido no coeficiente linear da reta descrita pela Eq. (5.35), e o valor da EQF advém do valor do coeficiente angular, ou seja, o erro apenas translada o coeficiente linear ao longo do eixo das ordenadas, não alterando o coeficiente angular.

Determinação dos coeficientes de stress óptico

Dentre os parâmetros que são utilizados para caracterização óptica de um dado material sólido, incluem-se os coeficientes de stress ópticos q_{\parallel} e q_{\perp} . A diferença desses dois parâmetros descreve o coeficiente de birrefringência induzida por stress, ou birrefringência fotoelástica, por meio da seguinte relação:

$$B = -\frac{n^3}{2} (q_{\parallel} - q_{\perp}), \quad (6.1)$$

em que n é o índice de refração livre de stress. A Ref. [64] apresenta diversas técnicas utilizadas na determinação do coeficiente de birrefringência induzida por stress em vidros. Em geral, a determinação da birrefringência fotoelástica pode ser considerada uma medida simples de ser realizada.

Por sua vez, a determinação dos valores dos coeficientes de stress óptico pode ser considerada uma tarefa árdua, uma vez que, na maioria das técnicas, a medida desses parâmetros envolve a correta determinação da carga aplicada, a confecção de amostras com geometria específica e alto grau de polimento e de paralelismo das faces da amostra a ser analisada. Ao utilizar técnicas interferométricas, requer-se um perfeito alinhamento do sistema, redução dos níveis de ruídos e um sistema preciso para a contagem de franjas de interferência. Além desses fatores, por muitas vezes, a carga aplicada necessária à contagem de um número considerável de franjas pode gerar cisalhamento do material analisado [64, 65].

Um método alternativo proposto para determinação dos coeficientes de stress óptico, requer o emprego da técnica de lente térmica utilizando os modelos desenvolvidos neste trabalho. O método consiste em realizar o ajuste dos dados experimentais obtidos pela técnica de lente térmica de modo que q_{\perp} e q_{\parallel} sejam parâmetros ajustáveis.

Um breve olhar sobre essas equações mostra que os parâmetros q_{\perp} e q_{\parallel} surgem na forma de soma entre ambos, fato este que inviabiliza o simples ajuste dos dados experimentais para obter os valores dos coeficientes de stress óptico.

Uma alternativa seria utilizar as aproximações de *plane-stress* e *plane-strain* no modelo de Shen para a técnica de lente térmica. As amplitudes do sinal de lente térmica nesses dois casos podem ser escritas como

$$\Theta_0 = \theta \left[\left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4} (q_{\parallel} + q_{\perp}) + (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha_T \right], \quad (6.2)$$

$$\Theta_{\infty} = \theta \left[\left(\frac{dn}{dT} \right) + \frac{n_0^3 Y \alpha_T}{4(1 - \nu)} (q_{\parallel} + 3q_{\perp}) \right]. \quad (6.3)$$

Normalizando pelo comprimento da amostra e pela potência óptica empregada, estas duas expressões podem ser combinadas para obter os coeficientes de stress óptico,

$$q_{\parallel} = -\frac{2}{n^3 Y \alpha} \left[\frac{dn}{dT} (2 + \nu) + 3(n - 1)(1 + \nu) \alpha \right] + \frac{2k\lambda}{n^3 Y \beta \alpha \varphi} \left[3\tilde{\Theta}_0 - (1 - \nu)\tilde{\Theta}_{\infty} \right], \quad (6.4)$$

$$q_{\perp} = \frac{2}{n^3 Y \alpha} \left[\frac{dn}{dT} \nu + (n - 1)(1 + \nu) \alpha \right] - \frac{2k\lambda}{n^3 Y \beta \alpha \varphi} \left[\tilde{\Theta}_0 + (\nu - 1)\tilde{\Theta}_{\infty} \right], \quad (6.5)$$

em que

$$\tilde{\Theta}_0 = \frac{\Theta_0}{PL} \quad ; \quad \tilde{\Theta}_{\infty} = \frac{\Theta_{\infty}}{PL}. \quad (6.6)$$

Os valores dos coeficientes de stress óptico podem ser obtidos realizando medidas de lente térmica para uma mesma amostra nas condições de *plane-stress* e de *plane-strain*, substituindo os valores de $\tilde{\Theta}_0$ e $\tilde{\Theta}_{\infty}$, obtidos via ajuste dos dados experimentais com o modelo de Shen, nas Eqs. (6.4) e (6.5). No entanto, obter condições necessárias para utilizar a condição de *plane-stress* em medidas de lente térmica pode ser um obstáculo praticamente intransponível, dado que, para alguns materiais, esta aproximação somente pode ser aplicada quando a amostra possui uma espessura em torno de $75\mu m^1$.

Por outro lado, a aproximação de *plane-strain* apresenta poucas dificuldades em termos de confecção de amostras que possam ser utilizadas nas medidas de lente térmica. De posse dos valores de B e $\tilde{\Theta}_{\infty}$, obtidos pela técnica de lente térmica utilizando a aproximação de *plane-strain* e a medida de birrefringência fotoelástica, pode-se obter os valores de q_{\perp} e q_{\parallel} dados pelas Eqs. (6.7) e (6.8), resultado da combinação das Eqs. (6.1) e (6.3).

$$q_{\parallel} = \frac{k\lambda(1 - \nu)}{n^3 Y \alpha \beta \phi} \tilde{\Theta}_{\infty} - \frac{3B}{2n^3} - \frac{(1 - \nu)}{n^3 Y \alpha} \frac{dn}{dT}, \quad (6.7)$$

$$q_{\perp} = \frac{k\lambda(1 - \nu)}{n^3 Y \alpha \beta \phi} \tilde{\Theta}_{\infty} + \frac{B}{2n^3} - \frac{(1 - \nu)}{n^3 Y \alpha} \frac{dn}{dT}. \quad (6.8)$$

No intuito de verificar a validade desse método, simulou-se transientes de lente térmica

¹Ver Tabela (4.2).

utilizando o modelo LAM, através das Eqs. (5.25) e (5.1), para amostras de vidros BK7, CAS, OFG e QX. Assumindo a aproximação de *plane-strain*, os transientes simulados foram ajustados com o modelo de Shen, fornecendo os valores para os parâmetros Θ_{strain} para cada amostra. Os valores do coeficiente de birrefringência induzida por stress foram calculados usando os valores dos parâmetros q_{\perp} e q_{\parallel} listados na Tabela (4.1), assim como as demais propriedades utilizadas na simulação dos transientes. Os resultados da determinação dos coeficientes de stress ópticos, utilizando esse método, podem ser vistos na Tabela (6.1)

Amostra	Espessura (<i>mm</i>)	q_{\parallel} simulado (<i>TPa</i>) ⁻¹	q_{\perp} simulado (<i>TPa</i>) ⁻¹	q_{\parallel} Shen (Erro%) (<i>TPa</i>) ⁻¹	q_{\perp} Shen (Erro%) (<i>TPa</i>) ⁻¹
BK7	40,0	-3,950	1,840	-3,932(0,5%)	1,858(1,0%)
CAS	40,0	0,089	0,910	0,115(28,8%)	0,936(2,8%)
OFG	40,0	0,234	0,587	0,263(12,4%)	0,616(4,9%)
QX	40,0	1,720	-0,575	1,576(2,1%)	-0,539(6,3%)

Tabela 6.1: Resultados obtidos para determinação dos coeficientes de stress ópticos, combinando as técnicas de lente térmica na aproximação de *plane-strain* e a medida do coeficiente de birrefringência fotoelástica.

A Tabela (6.1) apresenta os resultados os valores do coeficiente de stress óptico, obtidos quando combinadas as técnicas de lente térmica e a medida do coeficiente de birrefringência fotoelástica para amostras com espessura de $L = 40mm$, confirmando que a metodologia proposta pode ser utilizada para estimar os valores desse parâmetro. Além das vantagens anteriormente discutidas, essa metodologia possibilita que medidas do coeficiente de stress óptico de amostras com baixo coeficiente de absorção óptica possam ser realizadas. Isso deve-se ao fato de que a espessura necessária para a aproximação de *plane-strain* compensa o baixo valor do coeficiente de absorção, ambos diretamente proporcionais à amplitude do sinal de lente térmica.

No entanto, uma das condições que os modelos teóricos para a técnica de lente térmica devem satisfazer é a de que os raios dos feixes de excitação e prova devem ser constantes ao longo da espessura da amostra. Essa condição se contradiz com a aproximação de *plane-strain*, o que pode inviabilizar sua aplicação na determinação dos coeficientes de stress óptico. A Fig. (6.1) mostra uma representação esquemática dos feixes de prova e excitação para a técnica de lente térmica na configuração descasada e colinear: ω_{1p} é o raio do feixe de prova na posição da cintura do feixe de excitação, L é a espessura da amostra, ω_{0p} e z_{0p} são o raio e a posição da cintura do feixe de prova, e ω_{0e} e z_{0e} são o raio e a posição da cintura do feixe de excitação.

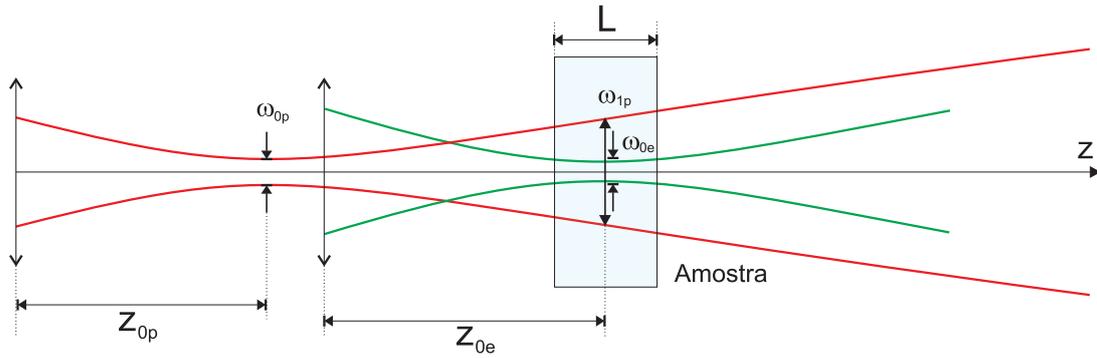


Figura 6.1: Representação esquemática dos feixes de prova (linha em cor vermelha) e de excitação (linha em cor verde) na técnica de lente térmica na configuração descasada e colinear. Detalhe para os feixes ao longo da espessura da amostra.

Devido à espessura necessária para a correta aplicação da aproximação de *plane-strain*, os raios dos feixes de excitação e prova podem não ser constantes ao longo da espessura da amostra. Os raios dos feixes de prova e excitação variam ao longo da posição z de acordo com a Eq. (6.9)

$$\omega_i(z) = \omega_{0i} \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_{0i}}{z_{ci}} \right)^2} \quad (6.9)$$

Utilizando a Eq. (6.9), é possível definir o raio médio dos feixes de prova e excitação ao longo da amostra por meio da Eq. (6.10),

$$\langle \omega(L) \rangle_i = \frac{1}{L} \int_0^L \omega_{0i} \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_{0i}}{z_{ci}} \right)^2} dz. \quad (6.10)$$

Nas equações (6.9) e (6.10), z_{ci} é a distância confocal do feixe de laser e os subíndices $i = e$ e $i = p$ referem-se aos feixe de excitação e prova, respectivamente. Utilizando a Eq. (6.10), pode-se definir os valores dos raios médios para os feixes de excitação e prova, assim como os valores do parâmetro m médio em função da espessura da amostra, conforme pode ser visto na Fig. (6.2)

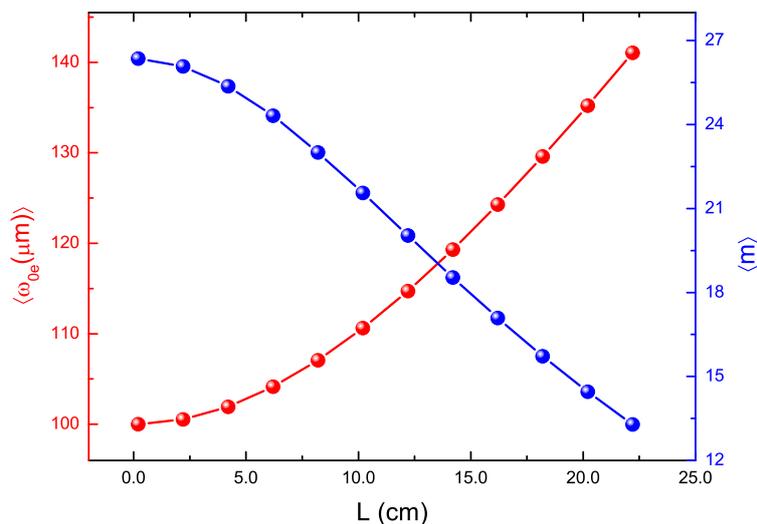


Figura 6.2: Dependência do parâmetro m médio (esferas de cor azul) e do raio médio do feixe de excitação (esferas de cor vermelha) o raio médio de prova é praticamente constante para esta faixa de espessuras. Demais parâmetros utilizados foram: $\lambda_e = 514,5nm$, $\lambda_p = 632,8nm$, $z_{0e} = 0,35cm$ e $z_{0p} = 0,1cm$.

Para verificar a influência da espessura da amostra na determinação do parâmetro Θ e t_c , simulou-se transientes de lente térmica com o modelo de Shen, utilizando os parâmetros geométricos obtidos com os valores dos raios médios dos feixes de excitação e de prova. Esses transientes foram ajustados com o modelo de Shen, utilizando os parâmetros geométricos obtidos ao assumir que os raios dos feixes de excitação e de prova são constantes ao longo da espessura da amostra. A Fig. (6.3) mostra os resultados obtidos.

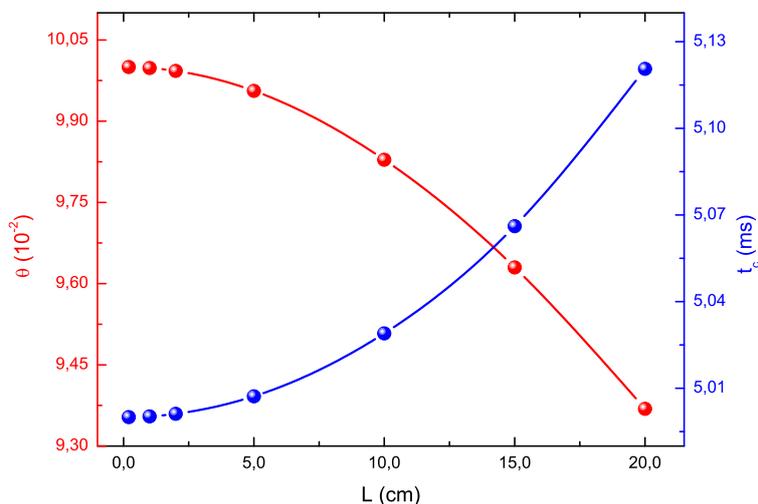


Figura 6.3: Resultados obtidos para os parâmetros θ (esferas em cor vermelha) e t_c (esferas em cor azul), utilizando $\omega_{0e} = 100\mu m$, $m = 26,4$, $d = 5,0 \times 10^{-7}m^2/s$ e $V = 5,4$. As linhas contínuas são apenas uma guia visual.

A partir das Figs. (6.2) e (6.3), é possível notar que uma amostra com espessura de $L = 20cm$ apresentará $\langle m \rangle = 14,6$ e $\langle \omega_{0e} \rangle = 134,6\mu m$, que são os valores utilizados para simulação do transiente para esta espessura, valores estes que diferem em 44% e 34%,

respectivamente, quando comparados aos valores utilizados para o ajuste do transiente simulado para essa espessura. Ainda assim, o valor obtido para o parâmetro θ foi de 0.0936 com um erro de 6%, quando comparado ao parâmetro utilizado na simulação ($\theta = 0, 1$). O parâmetro t_c , para a mesma espessura, obtido por ajuste, foi de 5,12ms, que, juntamente com o valor para o raio da cintura do feixe de excitação de $\omega_{0e} = 100,0\mu m$, fornece o valor para a difusividade térmica de $4,88 \times 10^{-7} m^2/s$, apresentando um erro de 3%, quando comparado com o valor utilizado na simulação do transiente, que foi de $5,0 \times 10^{-7} m^2/s$.

De certa forma, a diminuição do parâmetro m e o aumento do raio médio parecem funcionar como um sistema de compensação, possibilitando que os modelos tradicionais possam ser aplicados, mesmo quando os raios dos feixes não sejam constantes ao longo da amostra. Cabe aqui salientar que, nesta análise, apesar de não possuírem raios constantes ao longo da amostra, considerou-se feixes como sendo colineares, e não foram considerados outros efeitos que podem surgir devido à variação de espessura da amostra.

Conclusão

Neste trabalho, obteve-se a primeira expressão semi-analítica que trata da variação do caminho óptico para materiais sólidos, homogêneos e isotrópicos, independente da espessura. Para tanto, considerou-se que, ao incidir em um material semitransparente, o feixe de laser tem parte de sua energia absorvida, ocasionando variação de temperatura, que, por sua vez, induz mudança local na densidade, expansão térmica e efeitos fotoelásticos. A combinação desses efeitos resulta na variação do caminho óptico, consequentemente induzindo distorções na frente de onda do feixe que atravessa a região onde tais efeitos ocorrem.

As expressões obtidas, que formam a base para a completa descrição da variação do caminho óptico, como as expressões da variação de temperatura e das componentes de stress, foram comparadas com os resultados que se obtém ao utilizar o método dos elementos finitos. Essa comparação mostrou que as referidas expressões obtidas neste trabalho estão em excelente acordo com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

Em relação aos valores do coeficiente de absorção óptica, três modelos teóricos para a descrição do caminho óptico foram obtidos: modelos BAM, ABAM e LAM. O modelo BAM, entre outros aspectos, pode ser aplicado para amostras de quaisquer espessuras e cuja absorção óptica seja descrita pela lei de Beer. O modelo ABAM, também pode ser aplicado independentemente da espessura da amostra, desde que possua valores moderados para o coeficiente de absorção óptica. O modelo LAM, assim como os demais, descreve a variação do caminho óptico independente da espessura, desde que o coeficiente de absorção da amostra seja muito pequeno. Os limites corretos de aplicação desses três modelos, em relação ao valor do coeficiente de absorção óptica, foram estabelecidos comparando as expressões para a variação de temperatura e a variação de caminho óptico para os três.

Utilizando o modelo LAM, simulou-se a variação do caminho óptico em função do tempo, para os vidros borossilicato, aluminossilicato de cálcio, óxido-fluoreto e para o vidro fosfato QX. Estas simulações provaram que o modelo descreve a variação do caminho óptico em função da espessura, inclusive nos limites de *plane-stress* e *plane-strain*.

Utilizando a descrição do coeficiente da variação do caminho óptico, para os limites de *plane-stress* e *plane-strain*, determinou-se os percentuais de contribuição dos efeitos de aumento de temperatura, expansão térmica e efeitos fotoelásticos, mostrando que os efeitos de expansão e de temperatura dominam a variação do caminho ótico em ambos os limites. Utilizando o modelo LAM, foi possível determinar o erro induzido ao se utilizar as aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain* em função da espessura, evidenciando que a escolha apropriada destas aproximações não depende apenas da espessura e diâmetro da amostra, mas também de suas propriedades físicas. Esta análise configura os modelos aqui apresentados como uma importante ferramenta prática na determinação dos limites de *plane-stress* e *plane-strain* para o desenho de sistemas ópticos.

Aplicando os modelos BAM, ABAM e LAM para descrever a variação do caminho óptico na técnica de lente térmica, obteve-se modelos que possibilitam a aplicação desta técnica para a caracterização de materiais independentemente de sua espessura, fato este que não era possível até então. Em comparação ao modelo de Shen, estes novos modelos possibilitam também que amostras cuja absorção óptica seja descrita pela lei de Beer e possua valores moderados para o coeficiente de absorção óptica possam ser caracterizadas.

A análise da utilização das aproximações de *plane-stress* e *plane-strain*, nas técnicas de lente térmica, foi realizada utilizando-se o modelo LAM para gerar transientes do sinal de lente térmica, que posteriormente foram ajustados com o modelo de Shen. Utilizando as aproximações citadas para a interpretação da amplitude obtida por ajuste, e comparando-as com os valores utilizados para gerar os transiente com o modelo LAM para a técnica de lente térmica, foi possível mostrar que apenas o modelo LAM descreve corretamente a amplitude do sinal de lente térmica em função da espessura, provando que o modelo de Shen pode fornecer valores incorretos para a amplitude, descrita pelo parâmetro θ , quando as aproximações de *plane-stress* ou *plane-strain* forem erroneamente empregadas.

Mais uma vez utilizando o modelo LAM, gerou-se transientes do sinal de lente térmica para amostras com diferentes valores de eficiência quântica de fluorescência, posteriormente ajustando-os com o modelo de Shen. Demonstrou-se que, embora não descreva corretamente a variação do caminho óptico quando fora dos limites de *plane-stress* ou *plane-strain*, o modelo de Shen pode ainda fornecer os valores corretos para a eficiência quântica de fluorescência ao utilizar, para isso, o método da base ou o método dos múltiplos comprimentos de onda.

Os modelos que descrevem a variação do caminho ótico, desenvolvidos neste trabalho, não apenas poderão ser aplicados no estudo das distorções de frente de onda em sistemas em que o controle deste parâmetro torna-se necessário, mas também para descrever a variação do caminho óptico em técnicas experimentais que baseiam-se neste efeito, como no caso da técnica de lente térmica. Estes modelos fornecem expressões semi-analíticas que podem ser ajustadas aos dados experimentais advindos destas técnicas.

Feixes gaussianos

O objetivo deste apêndice é obter a expressão matemática que descreve a distribuição radial da intensidade de um feixe de laser com perfil gaussiano, sabendo que a equação da propagação de ondas de um campo elétrico em um meio não condutor é dada pela equação

$$\nabla^2 E(r, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(r, z, t) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Assumindo que

$$E(r, z, t) = E(r, z) e^{-i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

e substituindo na Eq. (A.1), tem-se

$$(\nabla^2 + k^2) E(r, z) = 0, \quad (\text{A.3})$$

com $k^2 = \omega^2/c^2$.

Dentre as soluções possíveis, a que nos interessa é a solução paraxial, ou seja,

$$E(r, z) = E_0 A(r, z) e^{-ikz}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo a Eq. (A.4) na Eq. (A.3), obtém-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) A(r, z) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(r, z) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Assumindo que $A(r, z)$ varia lentamente com z , pode-se tomar a aproximação

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A(r, z) \ll \frac{\partial}{\partial z} A(r, z). \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma, a Eq. (A.5) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) A(r, z) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(r, z) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Assumindo que

$$A(r, z) = e^{-iP(z)} e^{-ik \frac{r^2}{q(z)}}, \quad (\text{A.8})$$

como solução da Eq. (A.7), é possível obter

$$\frac{\partial}{\partial z} P(z) = -\frac{i}{q(z)} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} q(z) = 1. \quad (\text{A.10})$$

Para que a Eq. (A.8) conduza a uma intensidade finita, $q(z)$ deve ser escrito como

$$q(z) = z + iz_c. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a Eq. (A.11) na Eq. (A.8), tem-se

$$A(r, z) = e^{-iP(z)} \exp\left(-i \frac{k}{2} r^2 \frac{z}{z^2 + z_c^2}\right) \exp\left(-\frac{k}{2} r^2 \frac{z_c}{z^2 + z_c^2}\right). \quad (\text{A.12})$$

Tomando a Eq. (A.12) em $z = 0$, chega-se a

$$A(r, 0) = e^{-iP(0)} \exp\left(-\frac{k}{2} \frac{r^2}{z_c}\right). \quad (\text{A.13})$$

Nota-se que o termo que multiplica r^2 é um fator de escala para o raio do feixe, dado por

$$\omega_0^2 = 2 \frac{z_c \lambda}{\pi}, \quad (\text{A.14})$$

em que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{A.15})$$

O termo que multiplica r^2 na amplitude da Eq. (A.12) é um fator de escala para o raio do feixe em relação a uma dada posição z , ou seja,

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_c^2}}. \quad (\text{A.16})$$

O termo que multiplica r^2 na fase da Eq. (A.12) é um fator de escala para o comprimento, e pode ser reescrito como

$$R(z) = z \left(1 + \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z}\right). \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a Eq. (A.11) na Eq. (A.9), obtém-se

$$P(z) = -i \left[-1 \arctan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{1}{2} \ln(z_c^2) + \frac{1}{2} \ln(z^2 + z_c^2) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo as Eqs. (A.16), (A.17) e (A.18) na Eq. (A.12), e esta por sua vez, na Eq. (A.4), a expressão para o campo elétrico de um feixe gaussiano pode ser escrita como

$$E(r, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{\omega(z)^2}\right) \exp\left(-i\left(kz - \arctan\left(\frac{z}{z_c}\right)\right)\right) \exp\left(-i\frac{k}{2} \frac{r^2}{R(z)}\right). \quad (\text{A.19})$$

Logo, A relação entre a intensidade e o campo elétrico é dada por

$$I(r, z) = |E(r, z)|^2 = E_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)}\right)^2 \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega(z)^2}\right). \quad (\text{A.20})$$

Utilizando o conceito de potência óptica, ou seja,

$$P = \int_0^\infty I(r, z) 2\pi r dr, \quad (\text{A.21})$$

a intensidade de um feixe de laser gaussiano, será dada por

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi\omega(z)^2} \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega(z)^2}\right). \quad (\text{A.22})$$

O feixe definido pela Eq. (A.19) é chamado de feixe gaussiano de ordem zero ou TEM₀₀. Feixes de ordens superiores têm a descrição matemática de suas amplitudes escritas em termos dos polinômios de Hermite [66], suas distribuições radiais de intensidade são mostradas na Fig. (A.1)

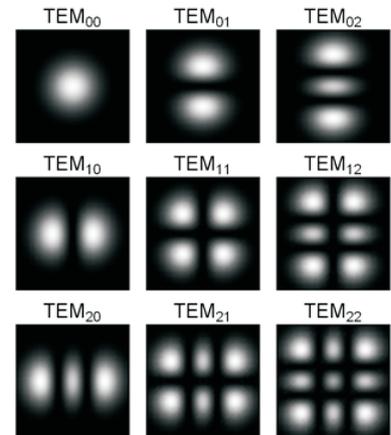


Figura A.1: Distribuição radial de intensidade para feixes gaussianos de diferentes ordens.

Equação de difusão de calor

Obtenção da equação de difusão

Segundo a lei de Fourier, a razão do fluxo de calor por unidade de área de um corpo isotrópico é proporcional ao gradiente de temperatura [67]:

$$\vec{F} \propto \nabla T, \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{F} = -k\nabla T. \quad (\text{B.2})$$

O sinal negativo informa que o fluxo de calor se dá da região de maior para a de menor temperatura, e k é o coeficiente de condutividade térmica do material. Seja S uma superfície fechada que delimita um volume arbitrário V de um corpo, e \hat{n} um vetor unitário normal à superfície S que aponta para fora do volume V . A razão de fluxo de calor por área unitária da superfície S é dada por

$$\hat{n} \cdot \vec{F} = -\hat{n} \cdot (k\nabla T). \quad (\text{B.3})$$

Sendo que o fluxo total \vec{J} através da superfície S é

$$\vec{J} = - \int_S [\hat{n} \cdot (k\nabla T)] dS. \quad (\text{B.4})$$

Utilizando o teorema da divergência

$$\vec{J} = - \int_S [\hat{n} \cdot (k\nabla T)] dS = - \int_V [\nabla \cdot (k\nabla T)] dV. \quad (\text{B.5})$$

Supondo que haja geração de calor no interior do volume V ,

$$\vec{J} = - \int_V [Q + \nabla(k\nabla T)] dV, \quad (\text{B.6})$$

em que Q é o termo de fonte que gera o aquecimento.

Se ρ é a densidade e c é o calor específico de um elemento de volume dV , a taxa de

ganho de calor neste elemento de volume é dada por

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} T. \quad (\text{B.7})$$

A taxa de ganho de calor para todo o volume V será

$$\int_V \left(\rho c \frac{\partial}{\partial t} T \right) dV. \quad (\text{B.8})$$

Pelo princípio de conservação de energia, a taxa de geração de calor e o fluxo total de calor devem se igualar, ou seja,

$$- \int_V [Q + \nabla(k \nabla T)] dV = \int_V \left(\rho c \frac{\partial}{\partial t} T \right) dV \quad (\text{B.9})$$

e dessa forma

$$\int_V \left[\rho c \frac{\partial}{\partial t} T - \nabla(k \nabla T) - Q \right] dV = 0, \quad (\text{B.10})$$

e como o volume V pode ser qualquer,

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} T - \nabla(k \nabla T) = Q. \quad (\text{B.11})$$

Para materiais isotrópicos e homogêneos a equação de difusão pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r, z, t) - D_{th} \nabla^2 T(r, z, t) = Q'(r, z, t), \quad (\text{B.12})$$

em que $D_{th} = k/\rho c$.

Termo de fonte da equação de difusão

A equação de difusão de calor expressa por (B.12) descreve a variação de temperatura em um material isotrópico e homogêneo, podendo ser aplicada para os mais diversos sistemas. Para obter a solução da equação de difusão de calor para um sistema composto por um material isotrópico, homogêneo e semi-transparente, no qual a variação de temperatura é induzida pela absorção parcial de um feixe de luz, deve-se considerar a distribuição espacial e temporal do termo à direita da igualdade na Eq. (B.12) aqui denominado termo de fonte. Neste caso, a dependência espacial e temporal do termo de fonte está relacionada com o tipo de laser utilizado.

Para obter a dependência espacial e temporal do termo de fonte, deve-se considerar um material composto por muitas camadas de espessura l muito fina, de tal forma que a absorção de luz possa ser considerada constante ao longo de cada camada. Descreve-se a variação de intensidade entre o feixe incidente e o feixe transmitido como

$$\Delta I_0 = I_0 - I_1. \quad (\text{B.13})$$

Para materiais cuja absorção de luz seja descrita pela lei de Beer, pode-se descrever a intensidade após o feixe atravessar a camada l como

$$I_1 = I_0 e^{-\beta l}, \quad (\text{B.14})$$

ou seja,

$$\Delta I_0 = I_0 - I_0 e^{-\beta l} = I_0(1 - e^{-\beta l}), \quad (\text{B.15})$$

em que β é o coeficiente de absorção óptico da amostra. Seja l muito pequeno, de forma que pode-se assumir

$$e^{-\beta l} \approx 1 - \beta l + \dots, \quad (\text{B.16})$$

$$Q_0 = \frac{\Delta I_0}{l} = \frac{I_0(1 - e^{-\beta l})}{l} = I_0 \beta. \quad (\text{B.17})$$

Para a camada posterior,

$$Q_1 = \frac{I_1 - I_2}{l} = \frac{I_1 - I_1(1 - \beta l)}{l} \approx I_0 \beta (1 - \beta l), \quad (\text{B.18})$$

que generalizando para n camadas fornece

$$Q_n = \frac{I_n - I_{n+1}}{l} = I_0 \beta \left(1 - \beta \frac{z}{n}\right)^n = I_0 \beta e^{-\beta z}, \quad (\text{B.19})$$

em que I_0 é a intensidade do feixe antes de incidir no material.

A intensidade inicial I_0 dependerá da distribuição espacial dos feixes de laser utilizados, dentre as distribuições, destacam-se a distribuição gaussiana e a distribuição degrau

ou *top-hat*, respectivamente dadas por

$$I_0 = \begin{cases} \frac{2P}{\pi\omega^2} e^{-2r^2/\omega^2} & \text{distribuição gaussiana,} \\ \frac{P}{\pi\omega^2} U(\omega - r) & \text{distribuição top-hat.} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

em que ω é o raio do feixe na amostras e $U(\omega_r)$ é a função de grau que obedece a seguinte relação:

$$U(\omega - r) = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| > \omega, \\ 1 & \text{se } |r| < \omega. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Utilizando as Eqs. (B.19) e (B.20), pode-se escrever o termo de fonte como

$$Q(r, z, t) = \begin{cases} \frac{2P}{\pi\omega^2} e^{-2r^2/\omega^2} e^{-\beta z} Q(t) & \text{distribuição gaussiana,} \\ \frac{P}{\pi\omega^2} U(\omega - r) e^{-\beta z} Q(t) & \text{distribuição top-hat,} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

em que $Q(t)$ representa a dependência temporal do termo de fonte.

Para corretamente descrever esta dependência temporal, deve-se considerar o modo de operação do feixe utilizado (pulsado ou contínuo). Para a aplicação de feixes operando em modo pulsado, em técnicas experimentais resolvidas no tempo, deve-se considerar também a relação entre a largura do pulso e a resolução temporal exigida pela técnica empregada [68]. Dentre as possíveis distribuições temporais que se pode atribuir à um feixe de laser, destacam-se

$$Q(t) = \begin{cases} 1 & \text{distribuição temporal constante,} \\ \delta(t) & \text{distribuição temporal delta de Dirac,} \\ \frac{2e^{-(t-\xi)^2/\tau}}{\sqrt{\pi}(1-\text{erf}(\xi/\tau))} & \text{distribuição temporal gaussiana,} \\ \frac{H(\tau-t)H(t)}{\tau} & \text{distribuição temporal retangular.} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Solução da Equação de difusão

Para determinar a distribuição de temperatura em um dado material, homogêneo e isotrópico, devido à absorção parcial da energia de um feixe de laser que incide sobre o mesmo, a equação que fornece a dinâmica dessa distribuição de temperatura é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial t}T(r, z, t) - D_{th} \nabla^2 T(r, z, t) = Q(r, z, t). \quad (\text{B.24})$$

Assumindo que as dimensões radial e azimutal possam ser consideradas infinitas quando comparadas com a região que será aquecida, que a troca de calor com o meio circundante possa ser considerada desprezível, e que nenhuma variação de temperatura é induzida antes da incidência do feixe de laser, as condições de contorno e condição inicial necessárias para a resolução da Eq. (B.24) são dadas por

$$\begin{aligned} T(r, z, 0) &= 0, \\ T(\infty, z, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}T(r, z, t)|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Dentre os possíveis métodos empregados para obter a solução da Eq. (B.24), destaca-se o método das transformadas integrais [69]. Para este caso, utilizar-se-á a transformada integral de Laplace para a variável temporal, a transformada de Fourier cosseno para a variável azimutal, e a transformada de Hankel para a variável radial. Aplicando a transformada de Laplace ($t \rightarrow s$) na Eq. (B.24), tem-se

$$sT(r, z, s) - D_{th} \nabla^2 T(r, z, s) = Q(r, z, s). \quad (\text{B.26})$$

Antes de aplicar a próxima transformada, deve-se observar que

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.27})$$

Substituindo a Eq. (B.27) em (B.26), obtém-se

$$sT(r, z, s) - D_{th} \nabla_r^2 T(r, z, s) - D_{th} \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(r, z, s) = Q(r, z, s). \quad (\text{B.28})$$

Aplicando a transformada de Fourier cosseno ($z \rightarrow \lambda$) na Eq. (B.28), chega-se a

$$sT(r, \lambda, s) - D_{th} \nabla_r^2 T(r, \lambda, s) + D_{th} \lambda^2 T(r, \lambda, s) = Q(r, \lambda, s). \quad (\text{B.29})$$

Aplicando a transformada de Hankel ($r \rightarrow \alpha$) na Eq. (B.29), conclui-se que

$$T(\alpha, \lambda, s) = \frac{1}{[s + D_{th}(\alpha^2 + \lambda^2)]} Q(\alpha, \lambda, s). \quad (\text{B.30})$$

Para a obtenção da expressão para a variação de temperatura no espaço (r, z, t) , é

necessário aplicar as transformadas inversas (Laplace, Fourier cosseno e Hankel). Para isso, deve-se explicitar a dependência espacial e temporal do termo de fonte $Q(r, z, t)$, aplicando as transformadas integrais para obter $Q(\alpha, \lambda, s)$, e então proceder à aplicação das transformadas inversas. Como já dito, o termo de fonte dependerá da distribuição espacial e modo de operação do feixe de laser utilizado, assim como, da absorção óptica da amostra ao longo do caminho óptico.

Para um material cuja absorção óptica ao longo do eixo de propagação do feixe possa ser descrita pela lei de Beer, e considerando um laser gaussiano (TEM₀₀) operando em modo contínuo, o termo de fonte pode ser escrito conforme a Eq. (B.31),

$$Q(r, z, t) = Q_0 e^{-2r^2/\omega^2} e^{-\beta z}, \quad (\text{B.31})$$

em que

$$Q_0 = \frac{2P\beta\varphi}{\rho c_p \pi \omega^2}. \quad (\text{B.32})$$

Na equação acima, P é a potência do feixe de laser, β é o coeficiente de absorção óptica, φ é a taxa de conversão de energia em calor, ρ é a densidade, c_p é p calor específico a pressão constante e ω é o raio do feixe.

Aplicando a transformada de Laplace, Fourier cosseno e Hankel, na Eq. (B.31), tem-se

$$Q(\alpha, \lambda, s) = \frac{Q_0}{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{(\beta^2 + \lambda^2)} \frac{\omega^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2}. \quad (\text{B.33})$$

Substituindo a Eq. (B.33), na Eq. (B.30), obtém-se

$$T(\alpha, \lambda, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q_0}{s [s + D_{th}(\alpha^2 + \lambda^2)]} \frac{\beta}{(\beta^2 + \lambda^2)} \frac{\omega^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2}. \quad (\text{B.34})$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace ($t \rightarrow s$) na Eq. (B.34), chega-se a

$$T(\alpha, \lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega^2}{4} Q_0 \int_0^t e^{-D_{th}\alpha^2\tau} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} \frac{\beta}{(\beta^2 + \lambda^2)} e^{-D_{th}\lambda^2\tau} d\tau, \quad (\text{B.35})$$

que é a expressão para a variação de temperatura utilizada para descrever a variação do caminho óptico para materiais cuja absorção óptica seja descrita pela lei de Beer.

Aplicando a transformada inversa de Fourier cosseno ($\lambda \rightarrow z$) na Eq. (B.35), tem-se

$$T(\alpha, z, t) = \frac{Q_0 \omega^2}{2} \frac{1}{4} \int_0^t f(z, \tau) e^{-D_{th}\alpha^2\tau} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} d\tau, \quad (\text{B.36})$$

em que

$$f(z, \tau) = e^{\beta(-z+D_{th}\beta\tau)} \left\{ 2 - \text{Erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{D_{th}\tau}} (z - 2D_{th}\beta\tau) \right] + e^{2z\beta} \text{Erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{D_{th}\tau}} (z + 2D_{th}\beta\tau) \right] \right\}. \quad (\text{B.37})$$

Aplicando a transformada inversa de Hankel ($\alpha \rightarrow r$) na Eq. (B.37), conclui-se que

$$T(r, z, t) = \frac{Q_0}{2} \int_0^t f(z, \tau) \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} d\tau \quad (\text{B.38})$$

em que $t_c = \omega^2/4D_{th}$ denominado tempo característico de difusão térmica.

É interessante salientar as considerações utilizadas na obtenção da Eq. (B.38):

- De acordo com a condição de contorno utilizada, a amostra é considerada radialmente infinita (condição para a aplicação da transformada de Hankel).
- A amostra é tratada como semi-infinita em relação a sua dimensão azimutal (condição necessária para a aplicação da transformada de Fourier cosseno).
- A absorção óptica da amostra ao longo do caminho óptico do feixe dentro da mesma é descrita pela lei de Beer.

O conjunto de considerações acima tornou possível a obtenção de uma expressão semi-analítica para a variação local de temperatura devido à absorção parcial de um feixe de laser que incide em um material semi-transparente, isotrópico e homogêneo. A este conjunto de considerações, dá-se o nome de Modelo BAM (Beer Absorption Model).

Para a amostra cuja absorção óptica seja muito pequena, pode-se realizar a aproximação descrita por

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} f(z, \tau) = 2, \quad (\text{B.39})$$

que, substituindo na Eq. (B.38), fornece

$$T(r, t) = Q_0 \int_0^t \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} d\tau. \quad (\text{B.40})$$

A equação (B.40) descreve a expressão para variação de temperatura para o modelo chamado Modelo LAM (Low Absorption Model), podendo ser utilizada nos casos em que a amostra possua um baixo coeficiente de absorção óptica. Pode também ser obtida assumindo $e^{-\beta z} \approx 1$ na Eq. (B.31).

Uma aproximação válida para materiais com absorção óptica moderada para a variação de temperatura é assumir que $T(r, z, t) = e^{-\beta z} T(r, t)$ e usar Eq. (B.40), que conduz a

$$T(r, z, t) = Q_0 e^{-\beta z} \int_0^t \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega^2}{1+2\tau/t_c}}}{1+2\tau/t_c} d\tau. \quad (\text{B.41})$$

A Eq. (B.41) descreve a variação de temperatura para o modelo chamado ABAM (Approximation to Beer Absorption Model). Essa aproximação equivale a desconsiderar o fluxo de calor na direção axial e assumir somente a propagação radial dentro da amostra.

Contribuição do stress para a variação do caminho óptico

Neste apêndice, obteve-se as expressões para a contribuição do stress para a variação do caminho óptico devido ao efeito de stress, conforme descrito pelas Eqs. (3.12) e (3.13).

Sabe-se que quando um corpo homogêneo e isotrópico é submetido a um campo de stress tridimensional, o stress induzido pode ser representado em cada ponto do corpo por um tensor de segunda ordem simétrico. Similarmente, o estado de strain do corpo pode ser representado por um tensor de strain, o qual também é simétrico. Para uma deformação elástica do corpo, ambos os tensores de stress e de strain têm as mesmas direções principais. Assim, seus elipsóides representativos (elipsóide de Cauchy) são coaxiais. A origem da birrefringência mecanicamente introduzida em um material isotrópico deve-se aos efeitos de stress e strain que induzem variações intermoleculares na estrutura do corpo, que, por sua vez, alteram opticamente o caráter isotrópico do material. Para deformações elásticas, os eixos principais dos elipsóides de stress e strain coincidem, sendo razoável, então, dizer que o eixo principal da birrefringência coincide com o eixo principal dos stress e strain. Assim, os elipsóides índice de refração (de Fresnel) e os elipsóides de stress e strain (de Cauchy) devem ser coaxiais [33].

Pelo exposto acima, tomar-se-á os elipsóides de Fresnel e de Cauchy em seus respectivos eixos principais comuns

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1, \quad (\text{C.1})$$

em que n_1 , n_2 e n_3 , são os índices de refração principais ao longo dos eixos $0x$, $0y$ e $0z$, respectivamente. Para o elipsóide de Cauchy para o stress

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 1, \quad (\text{C.2})$$

em que σ_1 , σ_2 e σ_3 , são as componentes principais de stress ao longo dos eixos $0x$, $0y$ e $0z$, respectivamente.

Para o caso de deformações elásticas, estes dois elipsóides são coaxiais, e suas seções

circulares planas devem ser paralelas. Portanto devem ser escritos das seguintes formas [33]:

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = A(x^2 + y^2 + z^2) \quad (\text{C.3})$$

e

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = B(x^2 + y^2 + z^2) \quad (\text{C.4})$$

Multiplicando por uma constante D o termo à direita da igualdade na Eq. (C.3) e o termo à esquerda da igualdade na Eq. (C.4),

$$\left(\frac{1}{n_1^2} - AD\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_2^2} - AD\right)y^2 + \left(\frac{1}{n_3^2} - AD\right)z^2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

e

$$(D\sigma_1 - B)x^2 + (D\sigma_2 - B)y^2 + (D\sigma_3 - B)z^2 = 0. \quad (\text{C.6})$$

Das Eqs. (C.5) e (C.6),

$$\frac{1}{n_1^2} = D\sigma_1 + C, \quad \frac{1}{n_2^2} = D\sigma_2 + C, \quad \frac{1}{n_3^2} = D\sigma_3 + C, \quad (\text{C.7})$$

em que $C = AD - B$.

As Eqs. (C.7) relacionam os índices de refração principais com as componentes principais de stress, através das quantidades D e C . Para o elipsóide de Fresnel, o índice de refração n_s , ao longo de uma dada direção $s(s_x, s_y, s_z)$, pode ser escrito como

$$\frac{1}{n_s^2} = \frac{s_x^2}{n_1^2} + \frac{s_y^2}{n_2^2} + \frac{s_z^2}{n_3^2}. \quad (\text{C.8})$$

Assim como, para o elipsóide de Cauchy para o stress,

$$\sigma_s = \sigma_1 s_x^2 + \sigma_2 s_y^2 + \sigma_3 s_z^2. \quad (\text{C.9})$$

Considerando a Eq. (C.7), a Eq. (C.9) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{n_s^2} = D\sigma_s + C, \quad (\text{C.10})$$

com

$$C = \frac{1}{n^2} + C'_2(\sigma_s + \sigma_t + \sigma_r) \quad (\text{C.11})$$

em que σ_s , σ_t e σ_r , são as componentes de stress mutuamente perpendiculares, e n é o índice de refração para o material livre de stress. Substituindo a Eq. (C.11), na Eq. (C.10),

$$\frac{1}{n_s^2} = \frac{1}{n^2} + C'_1\sigma_s + C'_2(\sigma_t + \sigma_r), \quad (\text{C.12})$$

com $C'_1 = C'_2 + D$, ou ainda,

$$n - n_s = \frac{n^2 n_s^2}{n + n_s} [C'_1 \sigma_s + C'_2 (\sigma_t + \sigma_r)]. \quad (\text{C.13})$$

Assumindo que $n - n_s$ é muito pequeno quando comparado com n ou n_s ,

$$\frac{n^2 n_s^2}{n + n_s} \simeq \frac{n^3}{2}. \quad (\text{C.14})$$

Substituindo a Eq. (C.14) em (C.13),

$$n - n_s = \frac{n^3}{2} [C'_1 \sigma_s + C'_2 (\sigma_t + \sigma_r)] \quad (\text{C.15})$$

Definindo [22]

$$C_1 = -\frac{n^3}{2} C'_1, \quad C_2 = -\frac{n^3}{2} C'_2, \quad (\text{C.16})$$

e substituindo na Eq. (C.15),

$$n_s - n = C_1 \sigma_s + C_2 (\sigma_t + \sigma_r). \quad (\text{C.17})$$

Assim como,

$$n_t - n = C_1 \sigma_t + C_2 (\sigma_s + \sigma_r), \quad (\text{C.18})$$

$$n_r - n = C_1 \sigma_r + C_2 (\sigma_t + \sigma_s). \quad (\text{C.19})$$

As Eqs. (C.17) e (C.18) descrevem a variação dos índices de refração, n_s , n_t e n_r , ao longo das direções s , r e t , como função linear das outras duas componentes principais de stress. As constantes de proporcionalidade C_1 e C_2 são chamadas de coeficientes de stress óptico e dependem das propriedades birrefringentes do material [33].

Utilizando a Eq. (C.17), pode-se escrever a variação do índice de refração em coordenadas cilíndricas para um sistema com simetria radial:

$$\begin{aligned} \Delta n_r &= n_r - n = C_1 \sigma_{rr} + C_2 (\sigma_{\phi\phi} + \sigma_{zz}) \\ \Delta n_\phi &= n_\phi - n = C_1 \sigma_{\phi\phi} + C_2 (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Fazendo uso da notação de Klein [23],

$$\begin{aligned} \Delta n_{st+} &= \Delta n_r + \Delta n_\phi \\ \Delta n_{st-} &= \Delta n_r - \Delta n_\phi \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Substituindo as Eq. de (C.20) em (C.21),

$$\Delta n_{st+} = (C_1 + C_2)(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + 2C_2\sigma_{zz}, \quad (\text{C.22})$$

$$\Delta n_{st-} = (C_1 - C_2)(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \quad (\text{C.23})$$

Da Referência [33], sabe-se que

$$C_1 = -\frac{n^3}{2} q_{\parallel} \quad C_2 = -\frac{n^3}{2} q_{\perp}. \quad (\text{C.24})$$

Substituindo as relações de (C.24), nas Eqs. (C.22) e (C.23),

$$\Delta n_{st+} = -\frac{n^3}{2} [(q_{\parallel} + q_{\perp})(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) - 2q_{\perp}\sigma_{zz}], \quad (\text{C.25})$$

e

$$\Delta n_{st-} = -\frac{n^3}{2} (q_{\parallel} - q_{\perp})(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \quad (\text{C.26})$$

Os efeitos fotoelásticos são uma das mais notáveis indicações das interações da radiação com a matéria, sendo que seu estudo tem fornecido um maior entendimento de como a radiação eletromagnética se propaga em um material submetido a uma carga de stress [21]. Além disso, quando aplicações tecnológicas de um dado material requerem a análise dos stress, técnicas que utilizem os princípios fotoelásticos podem ser aplicadas para a análise de materiais transparentes. Os primeiros experimentos que mostraram o efeito de dupla refração de um vidro quando submetido a uma carga de stress foi realizado por Brewster [70], sendo que as primeiras medidas quantitativas dos coeficientes de stress ópticos devem-se aos trabalhos de Wherstein e Kerr [21].

Ao longo do desenvolvimento das técnicas fotoelásticas, estudos que relacionam os efeitos fotoelásticos com a composição do material têm sido realizados, dentre os quais destacam-se os primeiros estudos que relacionaram a concentração de óxido de chumbo, trióxido de boro e óxido de potássio com a variação do coeficiente de stress óptico para os vidros flint e crown [71,72]. Em geral, assume-se que a birrefringência fotoelástica é gerada pela anisotropia na distribuição da densidade eletrônica causada pelo strain elástico.

Os primeiros trabalhos teóricos que trataram da birrefringência fotoelástica assumiam que este efeito devia-se inteiramente às mudanças nos arranjos dos átomos, o que já assumia-se para descrever a birrefringência natural de alguns cristais [21,73]. Essas teorias afirmavam que, ao tensionar um material isotrópico em uma dada direção, a distância média entre os átomos seria maior na direção do strain do que na direção perpendicular. Consequentemente, a componente do campo elétrico polarizado paralelamente ao eixo do strain encontraria uma densidade menor de elétrons do que a componente deste campo polarizado perpendicularmente, gerando assim, a birrefringência. Mueller calculou esse efeito, conhecido como efeito de estrutura, relacionando-o com o índice de refração do material [74], dado pela Eq. (C.27),

$$\mathcal{L} = p - q = -\frac{(n^2 - 1)^2}{5n^3}, \quad (\text{C.27})$$

em que p e q são os coeficientes de strain óptico, e n é o índice de refração. Por outro lado, esses coeficientes pode ser determinados pela Eq. (C.28)

$$p - q = \frac{YB}{n^2(1 + \nu)}, \quad (\text{C.28})$$

em que Y é o módulo de Young, B é o coeficiente fotoelástico e ν é a razão de Poisson. De acordo com a Eq. (C.27), o efeito de estrutura produziria valores negativo de birrefringência, enquanto que o coeficiente fotoelástico geralmente apresenta valores positivos. Este fato indicava que um segundo efeito deveria estar presente, contribuindo para a birrefringência fotoelástica. De fato, Mueller propôs o que chamou de efeito atômico, sugerindo que a deformação da nuvem eletrônica contribui de forma positiva enquanto o deslocamento da estrutura contribui de forma negativa para a birrefringência fotoelástica. Essas contribuições estão representadas na Fig. (C.1).

A teoria de Mueller forneceu uma explicação qualitativa para os valores positivos dos coeficientes fotoelásticos de vidros com baixo índice de refração e valores negativos para vidros com alto índice de refração.

Weyl e Tashiro [21, 75] apresentaram uma diferente interpretação qualitativa para a deformação da densidade eletrônica, sugerindo que a deformação dos íons não segue simplesmente a direção da tensão, mas depende de sua carga e polarizabilidade. Segundo Matusita e colaboradores [76], estes ânions (por exemplo, O^{-1}) tendem a se deformar na direção da tensão aplicada. Por outro lado, um efeito oposto resulta da deformação dos cátions polarizáveis, que também ocorre na direção do stress.

De acordo com essa teoria, quando uma tensão é aplicada em um vidro silicato, os oxigênios ligados por ligação covalente serão deformados. No entanto, a deformação da nuvem eletrônica devido ao campo elétrico paralelo à direção do stress pode ser muito maior do que na direção perpendicular, ocasionando um aumento do efeito atômico. Se oxigênios não ligados estiverem presentes, seus elétrons estão menos firmemente ligados do que os elétrons dos oxigênios ligados, podendo, então, responder ao campo elétrico igualmente nas direções paralela e perpendicular ao stress aplicado, diminuindo, assim o efeito atômico no fenômeno da birrefringência fotoelástica. Os efeitos discutidos neste parágrafo estão ilustrados na Fig. (C.2).

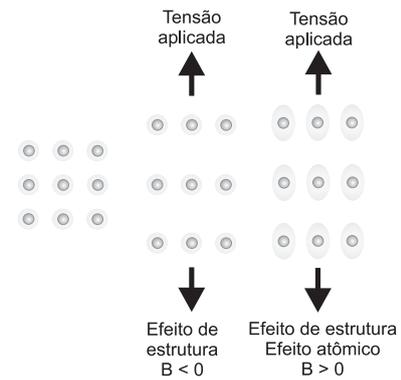


Figura C.1: Representação da estrutura atômica da teoria de Mueller com as contribuições para a birrefringência fotoelástica.

Por fim, cabe mencionar o trabalho de Borelli e Miller [77], que sugerem a determinação quantitativa da contribuição atômica para a fotoelasticidade baseando-se na polarizabilidade não linear e a deformabilidade dos íons quando um stress é aplicado. Uma vez feito isso, o coeficiente de strain óptico pode ser determinado, requerendo apenas o conhecimento da composição e do índice de refração do vidro.

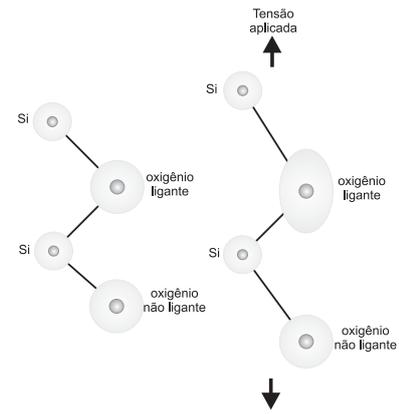


Figura C.2: Representação da estrutura atômica para um vidro silicato.

Obtenção da integral de difração

O objetivo deste apêndice é obter a expressão que descreve a intensidade central do feixe de prova em função do tempo, na posição do fotodetector. Para isso, deve-se considerar as equações de Maxwell para o vácuo:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}, t) &= 0. \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}(\vec{r}, t) &= 0. \\
 \nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\vec{r}, t). \\
 \nabla \times \mathbf{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\vec{r}, t).
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Aplicando o rotacional em ambos os termos da Lei de Faraday, tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, t)]. \tag{D.2}$$

Substituindo a Lei de Amperè na Eq. (D.2), obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\vec{r}, t). \tag{D.3}$$

Fazendo uso da identidade vetorial abaixo, chega-se a

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, t) = \nabla [\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{E}(\vec{r}, t)], \tag{D.4}$$

e substituindo na Eq. (D.3), conclui-se que

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\vec{r}, t). \tag{D.5}$$

Assumindo uma dependência harmônica no tempo, pode-se escrever o campo elétrico como

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \tag{D.6}$$

Substituindo a Eq. (D.6), na Eq. (D.5),

$$(\nabla^2 + k^2)E(\vec{r}) = 0, \quad (\text{D.7})$$

que é a equação de Helmholtz, cuja solução dá a expressão para o campo elétrico em uma posição \vec{r} do espaço. Para determinar este campo em uma posição \vec{r}' , utilizar-se-á a função de Green associada a este campo:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (\text{D.8})$$

Utilizando uma das identidades de Green, obtém-se

$$\int_V E(\vec{r}) \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 E(\vec{r}) dV = \int_S [E(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla E(\vec{r})] \cdot \hat{n} dS. \quad (\text{D.9})$$

Substituindo as Eqs. (D.7) e (D.8) na Eq. (D.9),

$$E(\vec{r}') = - \int_S [E(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla E(\vec{r})] \cdot \hat{n} dS. \quad (\text{D.10})$$

Introduzindo a solução da Eq. (D.8),

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (\text{D.11})$$

e substituindo-a na Eq.(D.10), chega-se a

$$E(\vec{r}') = - \int_S E(\vec{r}) ik \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\left(1 - \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{i}{k} \nabla E(\vec{r}) \right] \cdot \hat{n} dS. \quad (\text{D.12})$$

Aplicando a condição de contorno de Newmann, $\nabla E(\vec{r}) \cdot \hat{n}|_S = 0$ na Eq. (D.12), conclui-se que

$$E(\vec{r}') = - \frac{1}{4\pi} \int_S E(\vec{r}) ik \frac{e^{-ikR}}{R^2} \vec{R} \cdot \hat{n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S E(\vec{r}) \frac{e^{-ikR}}{R^3} \vec{R} \cdot \hat{n} dS, \quad (\text{D.13})$$

em que $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

À medida que R aumenta, a integral cujo denominador varia com R^3 deve ser desprezível em relação à integral cujo denominador varie com R^2 . Para $r' \gg r$, obtém-se

$$E(\vec{r}') = - \frac{i}{2\lambda} \int_S E(\vec{r}) \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} (\vec{r}-\vec{r}') \cdot \hat{n} dS. \quad (\text{D.14})$$

A Eq. (D.14) relaciona os campos na região \vec{r} e \vec{r}' . Em coordenadas cartesianas, essas posições podem ser escritas como $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ e $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$.

Na técnica de lente térmica, deve-se determinar a porção central do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector, ou seja, $z' = z_2$ e $x' = y' = 0$. Desse modo, a distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ fica dada por

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = z_2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{z_2^2}}. \quad (\text{D.15})$$

Tomando $z_2 \gg r^2$,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = z_2 + \frac{r^2}{2z_2}. \quad (\text{D.16})$$

Sabendo que $k = 2\pi/\lambda$ e substituindo a Eq. (D.16) na Eq. (D.14), obtém-se

$$E(z_2) = \frac{2\pi i}{\lambda z_2} \int_0^\infty E(\vec{r}) e^{-i\frac{2z_2}{\lambda}} e^{-i\frac{\pi r^2}{\lambda z_2}} r^2 dr. \quad (\text{D.17})$$

No apêndice B, obteve-se a expressão para o campo elétrico de um feixe gaussiano, Eq. (A.19),

$$E(r, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{\omega(z)^2}\right) \exp\left[-i\left(kz - \arctan\left(\frac{z}{z_c}\right)\right)\right] \exp\left[-i\frac{k}{2} \frac{r^2}{R(z)}\right]. \quad (\text{D.18})$$

Utilizando a Eq. (D.18), o campo elétrico do feixe de prova, na posição z_1 , logo após "provar" o efeito de lente térmica, fica dado por

$$E(r, z_1, t) = B \exp\left[-\frac{r^2}{\omega_{0P}^2}\right] \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{z_1 r^2}{z_1^2 + z_c^2}\right)\right) + \Phi(r, t)\right], \quad (\text{D.19})$$

com

$$B = E_0 \exp\left[-i\left(kz_1 - \arctan\left(\frac{z_1}{z_c}\right)\right)\right], \quad (\text{D.20})$$

em que $\Phi(r, t)$ é a variação de fase induzida devido ao efeito de lente térmica, e ω_{0P} e λ são o raio da cintura e o comprimento de onda do feixe de prova, respectivamente. Substituindo a Eq. (D.19) na Eq. (D.17), tem-se

$$E(g, t) = G \int_0^\infty e^{-(1+iV)g} e^{-i\Phi(g,t)} dg, \quad (\text{D.21})$$

com

$$G = i \frac{\omega_{1p}^2 \pi}{\lambda z_2} B e^{-\frac{2z_2}{\lambda}} \quad ; \quad g = \frac{r^2}{\omega_{1p}^2}, \quad (\text{D.22})$$

e

$$V = \frac{z_1}{z_{cp}} + \frac{z_{cp}}{z_2} \left[1 + \left(\frac{z_1}{z_{cp}}\right)^2\right], \quad (\text{D.23})$$

em que, z_{cp} é a distância confocal do feixe de prova. Sabendo que a intensidade de um campo elétrico é dada por $|E(t)|^2$ e fazendo uso da Eq. (D.21), a intensidade central do feixe de prova em função do tempo, na posição do fotodetector é descrita por

$$I(t) = \left| \int_0^\infty e^{-(1+iV)g} dg \right|^{-2} \left| \int_0^\infty e^{-(1+iV)g} e^{-i\Phi(g,t)} dg \right|^2. \quad (\text{D.24})$$

Trabalhos publicados

Trabalho relacionado com a tese

L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath and L. S. Herculano, Laser-induced wavefront distortion in optical materials: a general model. *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 29, n. 12, 3355-3359 (2012).

Demais trabalhos publicados

G. V. B. Lukasiewicz, N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, L. S. Herculano, V. S. Zanuto, M. L. Baesso, S. E. Bialkowski, Pulsed-Laser Time-Resolved Thermal Mirror Technique in Low-Absorbance Homogeneous Linear Elastic Materials. *Applied Spectroscopy*, v. 67, p. 1111-1116, (2013).

L. S. Herculano, L. C. Malacarne, V. S. Zanuto, G. V. B. Lukasiewicz, O. A. Capeloto, N. G. C. Astrath, Investigation of the Photobleaching Process of Eosin Y in Aqueous Solution by Thermal Lens Spectroscopy. *Journal of Physical Chemistry. B*, v. 117, p. 1932-1937, (2013).

V. S. Zanuto, L. S. Herculano, M. L. Baesso, G. V. B. Lukasiewicz, C. Jacinto, L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, Thermal mirror spectrometry: An experimental investigation of optical glasses. *Optical Materials (Amsterdam. Print)*, v. 35, p. 1129-1133, (2013).

M. V. Nova, M. C. P. Gonçalves, A. C. Nogueira, L. S. Herculano, A. N. Medina, R. B. Bazotte, M. L. Bruschi, Formulation and characterization of ethylcellulose microparticles containing l-alanyl-l-glutamine peptide. *Drug Development and Industrial Pharmacy*, v. xx, p. 1-10, (2013).

G. V. B. Lukasiewicz, L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, V. S. Zanutto, L. S. Herculano, S. E. Bialkowski, A Theoretical and Experimental Study of Time-Resolved Thermal

Mirror with Non-Absorbing Heat-Coupling Fluids. *Applied Spectroscopy*, v. 66, p. 1461-1467, (2012).

L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, A. N. Medina, L. S. Herculano, M. L. Baesso, P. R. B. Pedreira, J. Shen, Q. Wen, K. H. Michaelian, C. Fairbridge, Soret effect and photochemical reaction in liquids with laser-induced local heating. *Optics Express*, v. 19, p. 4047-4058, (2011).

L. S. Herculano, N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, J. H. Rohling, S. T. Tanimoto, M. L. Baesso, Laser-Induced Chemical Reaction Characterization in Photosensitive Aqueous Solutions. *Journal of Physical Chemistry. B*, v. 115, p. 9417-9420, (2011).

Rotinas empregando o software Mathematica

9.0

Neste apêndice são mostradas as rotinas para simular a variação do caminho óptico e o sinal de lente térmica utilizando o software MATHEMATICA 9.0. As Figs. (F.1), (F.2) e (F.3) mostram as rotinas utilizadas para simular a variação do caminho óptico para os modelo BAM, ABAM e LAM, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 & \text{OpticalPathBam}[r_, t_, L_, v_, d_, \beta_, \omega_, q1_, q2_, n_, \alpha t_, y_, dndt_, \alpha \text{lim}_, \lambda \text{lim}_] := \\
 & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{NIntegrate}[\text{NIntegrate}[\\
 & \left(\text{dndt} \frac{\text{Sin}[L \lambda]}{L \lambda} + (n - 1) (1 + v) \alpha t \left(\left(2 \alpha \left((-1 + e^{L \alpha})^2 \alpha + (-1 + e^{L \alpha})^2 \alpha \text{Cos}[L \lambda] + (-1 + e^{2 L \alpha}) \lambda \text{Sin}[L \lambda] \right) \right) / \right. \\
 & \left. (L \alpha (-1 + e^{2 L \alpha} + 2 e^{L \alpha} L \alpha) (\alpha^2 + \lambda^2)) \right) + \frac{(n)^3 \alpha t y}{4 (1 - v)} \left(-\frac{e^{-L \alpha}}{L \lambda (L \alpha + \text{Sinh}[L \alpha]) (\alpha^2 + \lambda^2)} \right. \\
 & \left. \left(-e^{L \alpha} \left((q1 + 3 q2) \alpha^2 + (q1 - q2) \lambda^2 \right) \text{Sin}[L \lambda] \text{Sinh}[L \alpha] + 2 \text{Cos}\left[\frac{L \lambda}{2}\right] \left((-1 + e^{L \alpha})^2 \alpha \lambda (q1 v + q2 (2 + v)) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \text{Cos}\left[\frac{L \lambda}{2}\right] - e^{L \alpha} \text{Sin}\left[\frac{L \lambda}{2}\right] (L (q1 + 3 q2) \alpha (\alpha^2 + \lambda^2) - 2 (q1 + q2) \lambda^2 v \text{Sinh}[L \alpha]) \right) \right) \right) \right) \\
 & \left. \left(\frac{\omega^2}{4} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \frac{1 - e^{-d t (\alpha^2 + \lambda^2)}}{d (\alpha^2 + \lambda^2)} \right) \text{BesselJ}[0, r \alpha \alpha, \{\alpha, 0, \alpha \text{lim}\}], \{\lambda, 0, \lambda \text{lim}\}]
 \end{aligned}$$

Figura F.1: Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo BAM.

$$\begin{aligned}
 & \text{OpticalPathABAM}[r_ , t_ , L_ , \nu_ , d_ , \beta_ , \omega_ , q1_ , q2_ , n_ , \alpha t_ , y_ , dndt_ , \alpha \text{lim}_] := \\
 & \text{NIntegrate}\left[\left(\left(\text{dndt}\right) \frac{(1 - e^{-L\beta})}{L\beta} + (n-1)(1+\nu)\alpha t \left(\frac{4e^{-\frac{L\beta}{2}}(-2\alpha \text{Cosh}\left[\frac{L\beta}{2}\right] \text{Sinh}\left[\frac{L\alpha}{2}\right]^2 + \beta \text{Sinh}[L\alpha] \text{Sinh}\left[\frac{L\beta}{2}\right])}{L(-\alpha^2 + \beta^2)(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])}\right) + \right. \\
 & \left. \frac{(n)^3 \alpha t y}{4(1-\nu)} \frac{e^{-L\alpha}}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])} \frac{e^{-L\beta}}{2L\beta(-\alpha^2 + \beta^2)} \left((q1 + 3q2)(2\alpha e^{L\alpha}(1 - e^{L\beta})(L(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \text{Sinh}[L\alpha])) + \right. \right. \\
 & \left. \left. (q1\nu + 2q2 + q2\nu)(2\alpha\beta(1 - e^{L\alpha})^2(1 + e^{L\beta})) - (q2 + 2q2\nu - q1 + 2q1\nu)\beta^2(1 - e^{2L\alpha})(1 - e^{L\beta})\right)\right) \\
 & \left(\frac{\omega^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} \frac{1 - e^{-dt(\alpha^2)}}{d(\alpha^2)}\right) \text{BesselJ}[0, r\alpha] \alpha, \{\alpha, 0, \alpha \text{lim}\}]
 \end{aligned}$$

Figura F.2: Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo ABAM.

$$\begin{aligned}
 & \text{OpticalPathLAM}[r_ , t_ , L_ , \nu_ , d_ , \beta_ , \omega_ , q1_ , q2_ , n_ , \alpha t_ , y_ , dndt_ , \alpha \text{lim}_] := \\
 & \text{NIntegrate}\left[\left(\text{dndt} + \frac{(n)^3 y \alpha t}{4(1-\nu)} \left((q1 + 3q2) - \frac{4(q1\nu + q2(2+\nu))}{L\alpha} \frac{(\text{Cosh}[L\alpha] - 1)}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])}\right) + \right. \\
 & \left. \frac{4(n-1)(1+\nu)\alpha t}{L\alpha} \frac{(\text{Cosh}[L\alpha] - 1)}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])}\right) \left(\frac{\omega^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} \frac{1 - e^{-dt(\alpha^2)}}{d(\alpha^2)}\right) \text{BesselJ}[0, r\alpha] \alpha, \{\alpha, 0, \alpha \text{lim}\}]
 \end{aligned}$$

Figura F.3: Rotina para a simulação da variação do caminho óptico com o modelo LAM.

As Figs. (F.4), (F.5) e (F.6) mostram as expressões que descrevem a variação de fase na técnica de lente térmica para os modelos BAM, ABAM e LAM, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 & \text{PhaseBam}[\theta_ , g_ , t_ , L_ , \nu_ , d_ , \beta_ , \omega_ , q1_ , q2_ , n_ , \alpha t_ , y_ , dndt_ , \lambda p_ , m_ , \alpha \text{lim}_ , \lambda \text{lim}_] := \\
 & \theta L \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{NIntegrate}\left[\text{NIntegrate}\left[\left(\text{dndt}\right) \frac{\text{Sin}[L\lambda]}{L\lambda} + (n-1)(1+\nu)\alpha t \left(\left(2\alpha\left((-1 + e^{L\alpha})^2\alpha + (-1 + e^{L\alpha})^2\alpha \text{Cos}[L\lambda] + (-1 + e^{2L\alpha})\lambda \text{Sin}[L\lambda]\right)\right) / \right. \right. \\
 & \left. \left. (L\alpha(-1 + e^{2L\alpha} + 2e^{L\alpha}L\alpha)(\alpha^2 + \lambda^2))\right) + \frac{(n)^3 \alpha t y}{4(1-\nu)} \left(-\frac{e^{-L\alpha}}{L\lambda(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])}(\alpha^2 + \lambda^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(-e^{L\alpha}\left((q1 + 3q2)\alpha^2 + (q1 - q2)\lambda^2\right) \text{Sin}[L\lambda] \text{Sinh}[L\alpha] + 2\text{Cos}\left[\frac{L\lambda}{2}\right] \left((-1 + e^{L\alpha})^2\alpha\lambda(q1\nu + q2(2+\nu)) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \text{Cos}\left[\frac{L\lambda}{2}\right] - e^{L\alpha} \text{Sin}\left[\frac{L\lambda}{2}\right] (L(q1 + 3q2)\alpha(\alpha^2 + \lambda^2) - 2(q1 + q2)\lambda^2\nu \text{Sinh}[L\alpha])\right)\right)\right)\right) \\
 & \left(e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \frac{1 - e^{-dt(\alpha^2 + \lambda^2)}}{(\alpha^2 + \lambda^2)}\right) \left(\text{BesselJ}[0, \alpha\sqrt{mg}\omega] - 1\right) \alpha, \{\alpha, 0, \alpha \text{lim}\}, \{\lambda, 0, \lambda \text{lim}\}]
 \end{aligned}$$

Figura F.4: Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo BAM.

```
PhaseABAM[θ_, g_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_, αt_, y_, dndt_, m_, αlim_] :=
NIntegrate[θ L  $\left( \left( \text{dndt} \frac{(1 - e^{-L\beta})}{L\beta} + (n-1)(1+v)\alpha t \frac{\left( 4 e^{-\frac{L\beta}{2}} \left( -2\alpha \text{Cosh}\left[\frac{L\beta}{2}\right] \text{Sinh}\left[\frac{L\alpha}{2}\right]^2 + \beta \text{Sinh}[L\alpha] \text{Sinh}\left[\frac{L\beta}{2}\right] \right)}{L(-\alpha^2 + \beta^2)(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])} \right) + \right.$ 
 $\frac{(n)^3 \alpha t y}{4(1-v)} \frac{e^{-L\alpha}}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])} \frac{e^{-L\beta}}{2L\beta(-\alpha^2 + \beta^2)} \left( (q1 + 3q2) (2\alpha e^{L\alpha} (1 - e^{L\beta}) (L(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \text{Sinh}[L\alpha])) + \right.$ 
 $\left. \left. (q1 v + 2q2 + q2 v) (2\alpha\beta(1 - e^{L\alpha})^2(1 + e^{L\beta})) - (q2 + 2q2v - q1 + 2q1v)\beta^2(1 - e^{2L\alpha})(1 - e^{L\beta}) \right) \right)$ 
 $\left( e^{-\frac{i}{2}\alpha^2\omega^2} \frac{1 - e^{-d t (\alpha^2)}}{(\alpha^2)} \right) \left( \text{BesselJ}[0, \sqrt{m g} \omega \alpha] - 1 \right) \alpha, \{\alpha, 0, \alpha\text{lim}\}]$ 
```

Figura F.5: Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo ABAM.

```
PhaseLAM[θ_, g_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_, αt_, y_, dndt_, m_, αlim_] := θ LNIntegrate[
 $\left( \text{dndt} + \frac{(n)^3 y \alpha t}{4(1-v)} \left( (q1 + 3q2) - \frac{4(q1 v + q2(2+v))}{L\alpha} \frac{(\text{Cosh}[L\alpha] - 1)}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])} \right) + \frac{4(n-1)(1+v)\alpha t}{L\alpha} \frac{(\text{Cosh}[L\alpha] - 1)}{(L\alpha + \text{Sinh}[L\alpha])} \right)$ 
 $\left( e^{-\frac{i}{2}\alpha^2\omega^2} \frac{1 - e^{-d t (\alpha^2)}}{(\alpha^2)} \right) \left( \text{BesselJ}[0, \sqrt{m g} \omega \alpha] - 1 \right) \alpha, \{\alpha, 0, \alpha\text{lim}\}]$ 
```

Figura F.6: Rotina para a determinação da variação de fase para o modelo LAM.

As Figs. (F.7), (F.8) e (F.9) mostram as expressões que descrevem o campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para os modelos BAM, ABAM e LAM, respectivamente.

```
ElectricFieldBam[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_, αt_, y_,
dndt_, λp_, m_, V_, αlim_, λlim_, glim_] := NIntegrate[Exp[-(1+iV)g] Exp[
-i PhaseBam[θ, g, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, λp, m, αlim, λlim]], {g, 0, glim}]
```

Figura F.7: Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo BAM.

```
ElectricFieldABAM[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_,
αt_, y_, dndt_, m_, V_, αlim_, glim_] := NIntegrate[Exp[-(1+iV)g]
Exp[-i PhaseABAM[θ, g, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, m, αlim]], {g, 0, glim}]
```

Figura F.8: Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo ABAM.

```
ElectricFieldLAM[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_,
αt_, y_, dndt_, m_, V_, αlim_, glim_] := NIntegrate[Exp[-(1+iV)g]
Exp[-i PhaseLAM[θ, g, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, m, αlim]], {g, 0, glim}]
```

Figura F.9: Rotina para o cálculo do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo LAM.

As Figs. (F.10), (F.11) e (F.12) mostram as expressões que descrevem a intensidade do campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para os modelos BAM,

ABAM e LAM, respectivamente. Essas expressões podem ser utilizadas para simular os transientes de lente térmica, assim como, para ajustar os dados experimentais obtidos por essa técnica. A Fig. (F.12) mostra a rotina que foi utilizada para simular os transientes de lente térmica neste trabalho.

```
IntensityBam[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_, q2_, n_,
αt_, y_, dndt_, λp_, m_, V_, αlim_, λlim_, glim_] :=  $\frac{1}{\text{Abs}\left[-\frac{i}{-i+v}\right]^2}$ 
Abs[ElectricFieldBam[θ, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, λp, m, V, αlim, λlim, glim]]2
```

Figura F.10: Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo BAM.

```
IntensityABAM[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_,
q2_, n_, αt_, y_, dndt_, m_, V_, αlim_, glim_] :=  $\frac{1}{\text{Abs}\left[-\frac{i}{-i+v}\right]^2}$ 
Abs[ElectricFieldABAM[θ, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, m, V, αlim, glim]]2
```

Figura F.11: Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo ABAM.

```
IntensityLAM[θ_, t_, L_, v_, d_, β_, ω_, q1_,
q2_, n_, αt_, y_, dndt_, m_, V_, αlim_, glim_] :=  $\frac{1}{\text{Abs}\left[-\frac{i}{-i+v}\right]^2}$ 
Abs[ElectricFieldLAM[θ, t, L, v, d, β, ω, q1, q2, n, αt, y, dndt, m, V, αlim, glim]]2
```

Figura F.12: Rotina para o cálculo da intensidade campo elétrico do feixe de prova na posição do fotodetector para o modelo LAM.

A Tabela (F.1) mostra o significado dos símbolos utilizados nas rotinas para o cálculo do caminho óptico, da variação da fase, do campo elétrico e da intensidade do sinal de lente térmica.

Símbolo	Descrição
θ	Fator de amplitude para o sinal de LT ($P\beta\varphi/k\lambda$)
L	Espessura da amostra
ν	Razão de Poisson
d	Coefficiente de difusão térmico
β	Coefficiente de absorção óptico
ω	Raio da cintura do feixe de excitação
q_1	Coefficiente de stress óptico (q_{\parallel})
q_2	Coefficiente de stress óptico (q_{\perp})
n	Índice de refração
αt	Coefficiente linear de expansão térmica
y	Módulo de Young
$dndt$	Coefficiente térmico da variação do índice de refração
m	Parâmetro geométrico do espectrômetro
V	Parâmetro geométrico do espectrômetro
α_{lim}	Limite superior da integração na variável α
λ_{lim}	Limite superior da integração na variável λ
g_{lim}	Limite superior da integração na variável g

Tabela F.1: Descrição dos símbolos utilizados nas rotinas acima com o software Mathematica.

Referências Bibliográficas

- [1] J. P. Gordon, R. C. C. Leite, R. S. Moore, P. S. P. S., and J. R. Whinnery, “Long transient effects in lasers with inserted liquids samples,” *Journal of Applied Physics*, vol. 36, no. 3, pp. 3–8, (1965).
- [2] C. Hu and J. Whinnery, “New thermo-optical measurement method and a comparison with other methods,” *Applied Optics*, vol. 12, no. 1, pp. 72–79, (1973).
- [3] M. Long, R. Swofford, and A. Albrecht, “Thermal lens technique: a new method of absorption spectroscopy,” *Science*, vol. 191, no. 4223, pp. 183–185, (1976).
- [4] R. Swofford, M. Long, and A. Albrecht, “C-h vibrational states of benzene, naphthalene, and anthracene in the visible region by thermal lensing spectroscopy and the local mode model,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 65, no. 1, pp. 179–190, (1976).
- [5] R. M. Wood, *Laser-Induced Damage of Optical Materials*. IOP Publishing, (2003).
- [6] T. H. Maiman, “Stimulated optical radiation in ruby,” *Nature*, vol. 187, no. 4736, pp. 493–494, (1960).
- [7] W. Koechner, *Solid-State Laser Engineering*. Springer, (2006).
- [8] M. A. Arain, W. Z. Korth, L. F. Williams, R. M. Martin, G. Mueller, D. B. Tanner, and D. H. Reitze, “Adaptive control of modal properties of optical beams using photothermal effects,” *Optics Express*, vol. 18, no. 3, pp. 2767–2781, (2010).
- [9] Y. Fan, C. Zhao, J. Degallaix, L. Ju, D. G. Blair, B. J. J. Slagmolen, D. J. Hosken, A. F. Brooks, P. J. Veitch, and J. Munch, “Feedback control of thermal lensing in a high optical power cavity,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 79, no. 10, p. 104501, (2008).
- [10] S. Chénais, F. Druon, S. Forget, F. Balembois, and P. Georges, “On thermal effects in solid-state lasers: The case of ytterbium-doped materials,” *Progress in Quantum Electronics*, vol. 30, no. 4, pp. 89–153, (2006).

- [11] J. W. Campbell and W. V. Dent, Jr., “Orbital debris removal analysis using the airborne laser chemical oxygen iodine laser located at the amos site on maui,” *Proc. SPIE*, vol. 4091, pp. 261–267, (2000).
- [12] L. Welsh, J. Tuchman, and I. Herman, “The importance of thermal stresses and strains induced in laser processing with focused gaussian beams,” *Journal of Applied Physics*, vol. 64, no. 11, pp. 6274–6286, (1988).
- [13] K. Dooley, M. Arain, D. Feldbaum, V. Frolov, M. Heintze, D. Hoak, E. Khazanov, A. Lucianetti, R. Martin, G. Mueller, O. Palashov, V. Quetschke, D. Reitze, R. Savage, D. Tanner, L. Williams, and W. Wu, “Thermal effects in the input optics of the enhanced laser interferometer gravitational-wave observatory interferometers,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 83, no. 3, p. 033109, (2012).
- [14] S. V. Dhurandhar, P. Hello, B. S. Sathyaprakash, and J.-Y. Vinet, “Stability of giant fabry-perot cavities of interferometric gravitational-wave detectors,” *Applied Optics*, vol. 36, no. 22, pp. 5325–5334, (1997).
- [15] M. L. Baesso, J. Shen, and R. D. Snook, “Thermal lens study of undoped and fe₂o₃-doped silicate glasses at different wavelengths,” *Journal de Physique IV*, vol. 4, no. 27, pp. 389–392, (1994).
- [16] M. L. Baesso, S. M. Lima, T. Catunda, R. Lebullenger, A. C. Lebullenger, A. C. Bento, and L. C. M. Miranda, “Temperature dependence of thermo-optical properties of fluoride glasses determined by thermal lens spectrometry,” *Physical Review B*, vol. 60, no. 22, pp. 15173–15178, (1999).
- [17] M. L. Baesso, A. C. Bento, A. A. Andrade, J. A. Sampaio, E. Pecoraro, L. A. Nunes, and S. Catunda, T. Gama, “Absolute thermal lens method to determine fluorescence quantum efficiency and concentration quenching of solids,” *Physical Review B*, vol. 57, no. 17, pp. 10545–10549, (1998).
- [18] R. D. Snook and R. D. Lowe, “Thermal lens spectroemetry: A review,” *Analyst*, vol. 120, no. 8, pp. 2051–2068, (1995).
- [19] S. M. Lima, J. A. Sampaio, T. Catunda, A. C. Bento, L. C. M. Miranda, and M. L. Baesso, “Mode-mismatched thermal lens spectrometry for thermo-optical properties measurement in optical glasses: A review,” *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 273, no. 1-3, pp. 215–227, (2000).
- [20] A. A. Andrade, T. Catunda, I. Bodnar, J. Mura, and M. L. Baesso, “Thermal lens determination of the temperature coefficient of optical path length in optical materials,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 74, no. 1, pp. 877–880, (2003).
- [21] H. Aben and C. Guillemet, *Photoelasticity of glass*. Springer-Verlag, (1993).

- [22] J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford University Press, (1985).
- [23] C. A. Klein, “Optical distortion coefficients of high-power laser windows,” *Optical Engeneering*, vol. 29, no. 4, pp. 343–350, (1990).
- [24] W. Nowacki, “Progress in thermoelasticity,” in *VIII European Mechanics Colloquium* (W. K. Nowacki, ed.), (1967).
- [25] L. Liu, X. Wang, S. Guo, X. Xu, and Q. Lu, “Review of the formula of thermal focal length in side-pumped laser rods,” *Optics Communications*, vol. 284, no. 5, pp. 1274–1277, (2011).
- [26] C. A. Klein, “Calcium fluoride windows for high-energy chemical lasers,” *Journal of Applied Physics*, vol. 100, no. 8, p. 083101, 2006.
- [27] J. M. C. Duhamel, “Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques,” *Journal of L’École Polytechnique*, vol. 25, no. 15, pp. 1–57, (1837).
- [28] H. Parkus, *Thermoelasticity*. Springer-Verlag/Wien, (1976).
- [29] D. S. Chandrasekharaiah and L. Debnath, *Continuum Mechanics*. Academic Press, Boston, (1994).
- [30] W. Nowacki, *Thermoelasticity*. Pergamon Press, (1962).
- [31] M. P. Belancon, *Análise das técnicas de espelho térmico e de lente térmica para o estudos de materiais semi-transparentes e opacos*. Tese, Universidade Estadual de Maringá, (2009).
- [32] C. A. Klein, “Oxiflouride glass for high-energy laser windows: Thermal lensing issue,” *Applied Physics*, vol. 87, no. 1-3, p. 23117, (2005).
- [33] P. S. Theocaris and E. E. Gdoutos, *Matrix theory of photoelasticity*. Springer-Verlag, (1976).
- [34] L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, and L. S. Herculano, “Laser-iduced wavefront distorption in optical materials: a general model,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 29, no. 12, pp. 3355–3359, (2012).
- [35] L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, and M. L. Baesso, “Unifield theoretical model for calculating laser-induced wavefront distortion in optical materials,” *Journal of Optical Society of America B*, vol. 29, no. 7, pp. 1772–1777, 2012.
- [36] L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, G. V. B. Lukasiewicz, E. K. Lenzi, M. L. Baesso, and S. E. Bialkowski, “Time-resolved thermal lens and thermal mirror with sample-fluid heat-coupling: A complete model for material characterization,” *Applied Spectroscopy*, vol. 65, no. 1, pp. 99–104, (2011).

- [37] X. Peng, A. Asundi, Y. Chen, and Z. Xiong, “Study of the mechanical properties of nd:yvo₄ crystal by use of laser interferometry and finite-element analysis,” *Applied Optics*, vol. 40, no. 9, pp. 1396–1403, (2001).
- [38] Y.-F. Peng and Z.-H. Cheng, “Finite element analyses of thermal distortions of mirror substrates for high power lasers,” *Qiangguang Yu Lizishu/High Power Laser and Particle Beams*, vol. 17, no. 1, pp. 5–8, (2005).
- [39] H.-J. Chun, S.-Y. Cheong, J.-H. Han, S.-J. Heo, J.-P. Chung, I.-C. Rhyu, Y.-C. Choi, H.-K. Baik, Y. Ku, and M.-H. Kim, “Evaluation of design parameters of osseointegrated dental implants using finite element analysis,” *Journal of Oral Rehabilitation*, vol. 29, no. 6, pp. 565–574, (2002).
- [40] H. Meijer, F. Starmans, W. Steen, and F. Bosman, “A three-dimensional, finite-element analysis of bone around dental implants in an edentulous human mandible,” *Archives of Oral Biology*, vol. 38, no. 6, pp. 491–496, (1993).
- [41] P. Agoramurthy, L. Campana, and R. Sundararajan, “Finite element modeling and analysis of human breast tissue for electrochemotherapy,” *Annual Report - Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, CEIDP*, pp. 191–194, (2011).
- [42] J. Lemonds and A. Needleman, “Finite element analyses of shear localization in rate and temperature dependent solids,” *Mechanics of Materials*, vol. 5, no. 4, pp. 339–361, (1986).
- [43] W. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. Cendes, “Modeling of solid conductors in two-dimensional transient finite-element analysis and its application to electric machines,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, no. 2 I, pp. 426–434, (2004).
- [44] A. Needleman, R. Asaro, J. Lemonds, and D. Peirce, “Finite element analysis of crystalline solids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 52, no. 1-3, pp. 689–708, (1985).
- [45] M. J. Weber, *Handbook of Optics Materials*. CRC Press LLC, (2003).
- [46] A. Steimacher, *Desenvolvimento e Caracterização de Vidros Aluminossilicato de Cálcio dopados com Nd³⁺*. Tese, Universidade Estadual de Maringá, (2008).
- [47] Kigre, *Tabela de propriedades de vidros fosfatos*. Disponível em: <http://www.kigre.com/files/qxdata.pdf>, (Setembro de 2013).
- [48] S. E. Bialkowski, *Photothermal spectroscopy methods for chemical analysis*. John Wiley, (1996).
- [49] R. C. C. Leite, R. S. Moore, and J. R. Whinnery, “Low absorption measurements by means of the thermal lens effect using an he-ne laser,” *Applied Physics Letters*, vol. 5, no. 7, pp. 141–143, (1964).

- [50] F. Grabiner, D. Siebert, and G. Flynn, “Laser induced time-dependent thermal lensing studies of vibrational relaxation: translational cooling in CH_3F ,” *Chemical Physics Letters*, vol. 17, no. 2, pp. 189–194, (1972).
- [51] K. Rieckhoff, “Self-induced divergence of cw laser beams in liquids - a new nonlinear effect in the propagation of light,” *Applied Physics Letters*, vol. 9, no. 2, pp. 87–88, (1966).
- [52] J. Shen, R. Lowe, and R. Snook, “A model for cw laser induced mode-mismatched dual-beam thermal lens spectrometry,” *Chemical Physics*, vol. 165, no. 2, pp. 385–396, (1992).
- [53] M. L. Baesso, J. R. D. Pereira, A. J. Bento, A. C. Palangana, A. M. Mansanares, and L. R. Evangelista, “Thermal lens spectrometry to study complex fluids,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 28, no. 4, pp. 359–368, (1998).
- [54] A. C. P. Rocha, S. M. Lima, L. H. C. Andrade, M. L. Baesso, A. M. Farias, G. Boulon, A. C. Bento, and Y. Guyot, “Tunable color temperature of $\text{Ce}^{3+} / \text{Eu}^{2+}$, $3+$ co-doped low silica aluminosilicate glasses for white lighting,” *Optics Express*, vol. 20, p. 10034, (2012).
- [55] L. Andrade, S. Lima, M. Baesso, A. Novatski, J. Rohling, Y. Guyot, and G. Boulon, “Tunable light emission and similarities with garnet structure of ce-doped lscas glass for white-light devices,” *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 510, pp. 54–59, (2012).
- [56] N. G. C. Astrath, F. B. G. Astrath, J. Shen, J. Zhou, K. Michaelian, C. Fairbridge, L. C. Malacarne, P. R. B. Pederira, A. N. Medina, and M. L. Baesso, “Thermal lens study of photochemical reaction kinetics,” *Optics Letters*, vol. 34, pp. 3460–3462, (2009).
- [57] L. S. Herculano, N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, J. H. Rohling, and M. L. Baesso, “Laser-induced chemical reaction characterization in photo-sensitive aqueous solutions,” *Journal of Physical Chemistry. B*, vol. 115, pp. 9417–9420, (2011).
- [58] L. S. Herculano, L. C. Malacarne, V. S. Zanuto, G. V. B. Lukasiewicz, O. A. Capeloto, and N. G. C. Astrath, “Investigation of the photobleaching process of eosin y in aqueous solution by thermal lens spectroscopy,” *Journal of Physical Chemistry. B*, vol. 117, pp. 1932–1937, (2013).
- [59] J. Shen, *Theoretical modeling of photothermal lens spectrometry and its experimental applications*. Thesis, University of Manchester, (1993).
- [60] N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, , G. V. B. Lukasiewicz, M. P. Belancon, M. L. Baesso, R. J. Prakash, and S. E. Bialkowski, “Pulsed-laser excited thermal lens spec-

- troscopy with sample-fluid heat coupling,” *Journal of Applied Physics*, vol. 7, no. 8, p. 083512, (2010).
- [61] A. A. Andrade, T. Catunda, J. Mura, and M. L. Baesso, “Study of temperature dependence of the optical path length in ion doped solids,” *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, vol. 4829, no. I, pp. 539–590, (2003).
- [62] J. S. R. D. Baesso, M. L. Shen, “Mode-mismatched thermal lens determination of temperature coefficient of optical path length soda lime glass at different wavelengths,” *Journal of Applied Physics*, vol. 75, no. 8, pp. 3732–3737, 1994.
- [63] S. M. Lima, A. A. Andrade, R. Lebullenger, A. C. Hernandez, and T. Catunda, “Multiwavelength thermal lens determination of fluorescence quantum efficiency of solids: Application to Nd^{3+} -doped fluoride glass,” *Applied Physics Letters*, vol. 78, no. 21, pp. 3220–3222, (2001).
- [64] H. W. McKenzie and R. J. Hand, *Basic optical stress measurement in glass*. Society of glass technology, (2011).
- [65] A. Feldman, “Measurement of the photoelastic contents of optical materials,” *Optical engineering*, vol. 17, no. 5, pp. 453–462, (1978).
- [66] S. C. Zilio, *Óptica moderna - Fundamentos e aplicações*. Compacta Gráfica E Editora Ltda-me, 2009.
- [67] L. B. Theodore, S. L. Adrienne, P. I. Frank, and P. D. David, *Fundamental of Heat Tand Mass Transfers*. John Wiley, (2011).
- [68] G. V. B. Lukasiewicz, N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, L. S. Herculano, V. S. Zanuto, M. L. Baesso, and S. E. Bialkowski, “Pulsed-laser time-resolved thermal mirror technique in low-absorbance homogeneous linear elastic materials,” *Applied Spectroscopy*, vol. 67, no. 10, pp. 1111–1116, (2013).
- [69] E. C. Oliveira, *Funções especiais com aplicações*. Livraria da Física, (2005).
- [70] D. Brewster, “On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances, by mechanical compression and dilatation,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 106, pp. 156–178, (1816).
- [71] G. Warren and L. Malvar, “Direct two-dimensional photoelastic calibration,” *Experimental Techniques*, vol. 9, no. 3, pp. 38–39, (1985).
- [72] L. N. G. Filon, “On the dispersion of artificial double refraction,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 207, pp. 263–306, (1908).

- [73] K. F. Herzfeld, “On the theory of forced double refraction (photoelasticity),” *Journal of Optical Society of America*, vol. 17, no. 1, pp. 26–34, (1928).
- [74] H. Mueller, “Theory of photoelasticity in amorphous solids,” *Journal Applied Physics*, vol. 6, no. 179, pp. 179–184, (1935).
- [75] M. Taschiro, “The effects of the polarisation of the constituent ions on the photoelastic birefringence of the glass,” *Journals of Society of Glass Technology*, vol. 40, pp. 353–362, (1956).
- [76] K. Matusita, C. Ihara, T. Komatsu, and R. Yokota, “Photoelastic effects in silicate glasses,” *Journal of American Ceramic Society*, vol. 67, no. 10, pp. 700–704, (1984).
- [77] N. F. Borelli and R. A. Miller, “Determination of the individual strain-optic coefficients of glass by an ultrasonic technique,” *Applied Optics*, vol. 7, no. 5, pp. 745–750, (1968).